

УДК 539.376

МЕТОДИКА ВЫБОРА ФУНКЦИЙ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ И ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ С ОДНИМ СКАЛЯРНЫМ ПАРАМЕТРОМ ПОВРЕЖДЕННОСТИ

Е. Б. Кузнецов, С. С. Леонов

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
125993 Москва, Россия
E-mails: kuznetsov@mai.ru, powerandglory@yandex.ru

Определены деформационно-прочностные характеристики авиационных конструкций из упрочняющихся материалов при одноосном растяжении в условиях ползучести. Задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений кинетической теории ползучести с одним скалярным параметром поврежденности. Для цилиндрических образцов из стали марки Ст.45 и пластин из титанового сплава марки ЗВ получены приближенные решения задачи с помощью неявного метода Эйлера и метода длины дуги в сочетании с явными методами семейства Рунге — Кутты.

Ключевые слова: ползучесть, разрушение, параметр поврежденности, продолжение решения по параметру, наилучшая параметризация, методика определения функциональных зависимостей, системы дифференциальных уравнений.

DOI: 10.15372/PMTF20160221

Введение. В настоящей работе рассматривается численное решение двух модельных задач, описывающих ползучесть и длительную прочность конструкций из упрочняющихся материалов при одноосном растяжении в случае постоянных напряжений и температур вплоть до начала разрушения. В первой задаче исследуется растяжение прутков с фиксированным радиусом из стали марки Ст.45 [1], применяемой в авиации, а во второй — растяжение прямоугольных образцов из титанового сплава марки ЗВ [2], используемого в ракетно-космической технике. Поведение данных конструкций описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) кинетической теории ползучести с одним скалярным параметром поврежденности [3]. В случае постоянных напряжений рассматриваемую систему ОДУ можно проинтегрировать аналитически. Однако аналитическое решение подобных задач может быть очень трудоемким или вообще невозможным. Численное решение осложнено тем, что в начальный момент времени и при разрушении правые части уравнений стремятся к бесконечности. Данная особенность устраняется с помощью метода продолжения решения по параметру и наилучшей параметризации, в рамках которого получены численные решения, хорошо согласующиеся с результатами эксперимента и аналитическими решениями для обеих задач. Показаны преимущества данного подхода по сравнению с решением исходной задачи неявным методом Эйлера. Актуальность рас-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-08-00943а).

© Кузнецов Е. Б., Леонов С. С., 2016

смаатриваемых задач обусловлена тем, что большинство современных конструкционных материалов при умеренных температурно-силовых режимах имеют явно выраженную начальную стадию, на которой интенсивность процесса ползучести монотонно уменьшается (стадия упрочнения) до минимального значения (установившаяся стадия), и неучет стадии упрочнения при моделировании процесса ползучести и длительной прочности может привести к существенным погрешностям [4].

1. Определяющие уравнения. Для описания поведения металлов в условиях ползучести вплоть до разрушения используем уравнения энергетического варианта теории ползучести в виде системы трех ОДУ [2, 4–7]

$$\frac{dA}{dt} = f(\sigma, T)\Psi(\omega, T), \quad \frac{d\omega}{dt} = \varphi(\sigma, T)\Omega(\omega, T), \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\sigma} \frac{dA}{dt}, \quad (1)$$

где A — удельная энергия рассеяния; ω — скалярный параметр поврежденности; ε — деформация ползучести; σ — действующее напряжение; t — время; T — температура; функциональные зависимости, входящие в правые части, определяются по результатам эксперимента.

В работе [8] предложен вариант системы (1), включающий соотношения

$$\frac{dA}{dt} = f(\sigma, T)\Psi(\omega, T), \quad \frac{d\omega}{dt} = \varphi(\sigma, T)\Psi(\omega, T), \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\sigma} \frac{dA}{dt}. \quad (2)$$

Согласно [1] функцию $\Psi(\omega, T)$ можно выбрать в виде

$$\Psi(\omega, T) = \omega^{-\alpha}(1 - \omega^{\alpha+1})^{-m}, \quad (3)$$

где α, m — параметры модели, в общем случае зависящие от температуры T .

Подставляя соотношение (3) в систему (2), получаем

$$\frac{dA}{dt} = \frac{f(\sigma, T)}{\omega^{\alpha}(1 - \omega^{\alpha+1})^m}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\varphi(\sigma, T)}{\omega^{\alpha}(1 - \omega^{\alpha+1})^m}, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\sigma} \frac{dA}{dt}. \quad (4)$$

Для системы ОДУ (4) выбираются однородные начальные условия

$$t = 0: \quad A(0) = 0, \quad \omega(0) = 0, \quad \varepsilon(0) = 0. \quad (5)$$

Задачу (4), (5) можно разрешить относительно $A(t), \omega(t), \varepsilon(t)$ [9]:

$$\omega(t) = \left(1 - \left(1 - (\alpha + 1)(m + 1) \int_0^t \varphi(\sigma, T) dt\right)^{1/(m+1)}\right)^{1/(\alpha+1)}; \quad (6)$$

$$A(t) = \int_0^t f(\sigma, T) \left(1 - \left(1 - (\alpha + 1)(m + 1) \int_0^t \varphi(\sigma, T) dt\right)^{1/(m+1)}\right)^{-\alpha/(\alpha+1)} \times \\ \times \left(1 - (\alpha + 1)(m + 1) \int_0^t \varphi(\sigma, T) dt\right)^{-m/(m+1)} dt; \quad (7)$$

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \frac{1}{\sigma} f(\sigma, T) \left(1 - \left(1 - (\alpha + 1)(m + 1) \int_0^t \varphi(\sigma, T) dt\right)^{1/(m+1)}\right)^{-\alpha/(\alpha+1)} \times \\ \times \left(1 - (\alpha + 1)(m + 1) \int_0^t \varphi(\sigma, T) dt\right)^{-m/(m+1)} dt. \quad (8)$$

Полагая параметр поврежденности $\omega(t)$ в момент разрушения t_* равным единице, получаем выражение для определения длительной прочности конструкции

$$(\alpha + 1)(m + 1) \int_0^{t_*} \varphi(\sigma, T) dt = 1. \quad (9)$$

Применим приведенные уравнения для расчета ползучести и длительной прочности конструкций из стали марки Ст.45 и анизотропного титанового сплава марки ЗВ.

2. Растяжение образцов из стали марки Ст.45. Для задачи об одноосном растяжении прутков диаметром $d = 42$ мм из стали марки Ст.45, широко используемой в авиации (например, для создания деталей трубопроводной арматуры после закалки и отпуска), при постоянной температуре $T = 850$ °С выберем функции $f(\sigma)$, $\varphi(\sigma)$ [1]:

$$f(\sigma) = B_A \sigma^n, \quad \varphi(\sigma) = B_\omega \sigma^k,$$

где B_A , B_ω , n , k — характеристики ползучести материала.

При постоянных напряжениях $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ и температуре задачу (4), (5) представим в виде системы ОДУ

$$\frac{dA}{dt} = \frac{B_A \sigma_0^n}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m} \quad (10)$$

с начальными условиями

$$t = 0: \quad A(0) = 0, \quad \omega(0) = 0 \quad (11)$$

и уравнения для определения деформации ползучести

$$\varepsilon(t) = A(t)/\sigma_0. \quad (12)$$

Используя соотношения (5)–(9), аналитическое решение задачи (10), (11) и выражение для длительной прочности рассматриваемой конструкции запишем в виде

$$\omega(t) = \left(1 - (1 - (\alpha + 1)(m + 1)B_\omega \sigma_0^k t)^{1/(m+1)}\right)^{1/(\alpha+1)}; \quad (13)$$

$$A(t) = \frac{B_A \sigma_0^n}{B_\omega \sigma_0^k} \left(1 - (1 - (\alpha + 1)(m + 1)B_\omega \sigma_0^k t)^{1/(m+1)}\right)^{1/(\alpha+1)}; \quad (14)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{B_A \sigma_0^{n-1}}{B_\omega \sigma_0^k} \left(1 - (1 - (\alpha + 1)(m + 1)B_\omega \sigma_0^k t)^{1/(m+1)}\right)^{1/(\alpha+1)}; \quad (15)$$

$$t^* = [(m + 1)(\alpha + 1)B_\omega \sigma_0^k]^{-1}. \quad (16)$$

Однако, в случае если напряжение зависит от времени, деформации ползучести и других параметров, получить аналитическое решение может быть затруднительно или невозможно, тогда задача решается с использованием численных или численно-аналитических методов.

Отметим следующую особенность: получение численного решения системы уравнений (10) с начальными условиями (11) с помощью традиционных явных методов интегрирования задачи Коши осложнено тем, что в начальный момент времени правые части уравнений системы (10) стремятся к бесконечности. Это имеет место и в случае, когда параметр поврежденности $\omega \rightarrow 1$.

Устраним данную особенность, параметризуя систему уравнений (10) с использованием метода продолжения решения по наилучшему параметру [10]. Для этого будем полагать, что неизвестные A , ω и независимая переменная t являются функциями некоторого параметра λ :

$$A = A(\lambda), \quad \omega = \omega(\lambda), \quad t = t(\lambda). \quad (17)$$

Согласно [10], для того чтобы задачу Коши для нормальной системы ОДУ преобразовать в рамках метода продолжения решения по параметру к наилучшему аргументу, необходимо и достаточно в качестве λ выбрать длину дуги интегральной кривой этой задачи:

$$d\lambda^2 = (dA)^2 + (d\omega)^2 + (dt)^2. \quad (18)$$

С учетом соотношений (17), (18) для параметра λ получаем систему трех ОДУ первого порядка

$$\frac{dA}{d\lambda} = \frac{B_A \sigma_0^n}{R(\omega)}, \quad \frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{B_\omega \sigma_0^k}{R(\omega)}, \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}{R(\omega)}, \quad (19)$$

где $R(\omega) = \sqrt{\omega^{2\alpha} (1 - \omega^{\alpha+1})^{2m} + B_A^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k}}$.

Отсчитывая аргумент λ от начальной точки задачи (10), (11), условия (11) для системы (19) запишем в виде

$$\lambda = 0: \quad \omega(0) = 0, \quad A(0) = 0, \quad t(0) = 0. \quad (20)$$

Нетрудно показать, что правые части уравнений системы (19) не стремятся к бесконечности, более того, по модулю не превышают единицы. Задачу (19), (20) можно решить любым методом численного интегрирования систем ОДУ.

Помимо аналитического решения (13)–(15) были получены приближенные решения параметризованной и непараметризованной задач с использованием различных численных методов решения задачи Коши для систем ОДУ.

Поскольку получить численное решение непараметризованной задачи (10), (11) с помощью явных численных методов интегрирования затруднительно, для решения данной задачи был выбран неявный метод Эйлера с переменным шагом интегрирования (получаемые системы нелинейных уравнений решаются методом простой итерации). Приближенное решение параметризованной задачи (19), (20) получено явным методом Эйлера и методом Рунге — Кутты четвертого порядка точности с переменным шагом интегрирования.

Смена шага выполняется в соответствии с принципом Рунге — Ромберга — Ричардсона с постоянными $\varepsilon_1 = 10^{-4}$, $\varepsilon_2 = 5 \cdot 10^{-5}$, определяющими точность численного решения [11]. Данные методы были реализованы в вычислительной среде Matlab R2012b. Расчет проводился на персональном компьютере Intel Core i5 — 2410M (CPU 2,30 ГГц; 4,00 ГБ ОЗУ; видеокарта NVIDIA GeForce GT540M 2 ГБ; 64-разрядная операционная система Windows 7 Домашняя базовая Service Pack 1).

Характеристики ползучести для систем уравнений (10), (19) определены по данным работы [1]: $B_A = 9,967 \cdot 10^{-20}$ МПа $^{-n} \cdot \text{с}^{-1}$, $B_\omega = 9,689 \cdot 10^{-17}$ МПа $^{-k} \cdot \text{с}^{-1}$, $\alpha = 0,849$, $n = 9,1$, $k = 6,97$, $m = 2,83$.

В табл. 1 приведены значения параметров процесса ползучести при растяжении образцов из стали марки Ст.45 (t_* — длительная прочность конструкции; \bar{t}_* — время в нормированных координатах $\omega - \bar{t}$ при разрушении, где $\bar{t} = t/t_*$; ε_* — деформация ползучести в момент разрушения; ω_* — параметр поврежденности в момент разрушения; A_* — удельная энергия рассеяния в момент разрушения; t_n — время счета; 1–5 — способы решения: 1 — явный метод Эйлера, 2 — метод Рунге — Кутты четвертого порядка точности, 3 — неявный метод Эйлера, 4 — аналитическое решение, 5 — эксперимент).

Таблица 1

Значения параметров процесса ползучести
при растяжении образцов из стали марки Ст.45

σ_0 , МПа	Способ решения	t_* , ч	$\bar{\tau}_*$	ε_*	ω_*	A_* , МДж/м ³	t_n , с
35	1	7,000 4940	1,000 00	0,057 157	0,999 97	2,000 495	0,922
	2	7,000 4000	0,999 99	0,057 157	0,999 97	2,000 495	0,342
	3	6,999 0700	0,999 80	0,057 156	0,999 96	2,000 460	1,258
	4	7,000 4920	1,000 00	0,057 159	1,000 00	2,000 555	—
	5	6,706 1220	1,000 00	0,051 606	1,000 00	1,806 210	—
40	1	2,760 0999	1,000 00	0,066 467	0,999 99	2,658 680	1,006
	2	2,760 0610	0,999 99	0,066 453	0,999 78	2,658 120	0,361
	3	2,756 9340	0,998 90	0,066 467	0,999 98	2,658 680	1,375
	4	2,760 0998	1,000 00	0,066 477	1,000 00	2,658 724	—
	5	2,979 5920	1,000 00	0,061 554	1,000 00	2,462 160	—
45	1	1,214 4838	1,000 00	0,075 927	0,999 96	3,416 715	0,947
	2	1,214 4660	0,999 99	0,075 909	0,999 72	3,415 905	0,355
	3	1,208 1190	0,994 76	0,075 926	0,999 94	3,416 670	1,313
	4	1,214 4836	1,000 00	0,075 928	1,000 00	3,416 868	—
	5	1,224 4900	1,000 00	0,063 327	1,000 00	2,849 715	—

Таблица 2

Абсолютная погрешность расчета параметров процесса ползучести
при растяжении образцов из стали марки Ст.45

σ_0 , МПа	Метод решения	$\Delta\varepsilon_{av} \cdot 10^6$	$\Delta\varepsilon_{\max}$	$\Delta\omega_{av} \cdot 10^4$	$\Delta\omega_{\max}$	$\Delta A_{av} \cdot 10^4$	ΔA_{\max}
35	1	6,813	0,0005	1,192	0,0090	2,385	0,013
	2	39,370	0,0020	6,888	0,0290	13,780	0,040
	3	158,900	0,0030	27,780	0,0600	55,620	0,121
40	1	8,056	0,0006	1,212	0,0090	3,222	0,016
	2	44,310	0,0020	6,667	0,0293	17,720	0,048
	3	452,800	0,0060	68,100	0,0960	197,000	0,256
45	1	9,661	0,0007	1,272	0,0090	4,347	0,016
	2	53,790	0,0023	7,085	0,0300	24,210	0,055
	3	1339,000	0,0110	176,300	0,1460	580,800	0,500

На рис. 1 приведены зависимости удельной энергии рассеяния, параметра поврежденности и деформации ползучести от времени при различных значениях начального напряжения.

На рис. 2 представлена “единая” кривая в нормированных координатах $\omega-\bar{\tau}$. Экспериментальные значения деформации ползучести взяты из работы [1], данные для удельной энергии рассеяния и параметра поврежденности определены по формулам

$$A = \sigma\varepsilon, \quad \omega = \frac{\sigma}{A_*}\varepsilon, \quad A_* = \sigma\varepsilon_*. \quad (21)$$

Видно, что аналитическое и численные решения, полученные с помощью метода Рунге — Кутты и неявного метода Эйлера, практически совпадают.

В табл. 2 приведены значения абсолютной погрешности, в качестве осредненного значения абсолютной погрешности принимается ее среднее арифметическое значение [12]

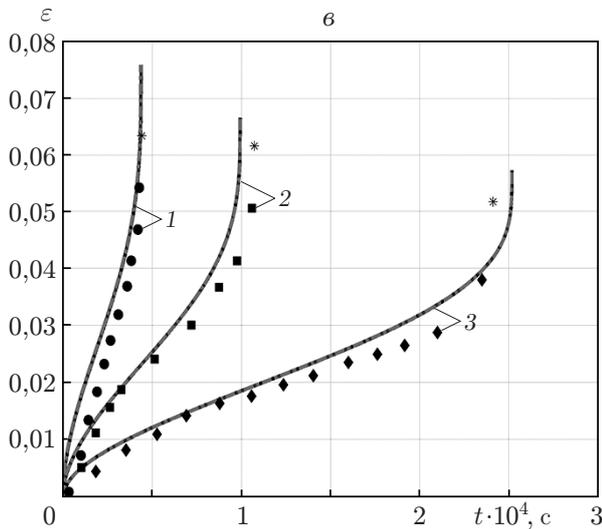
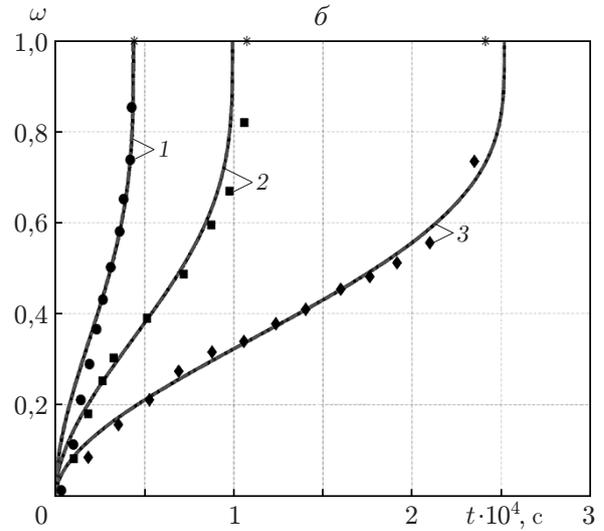
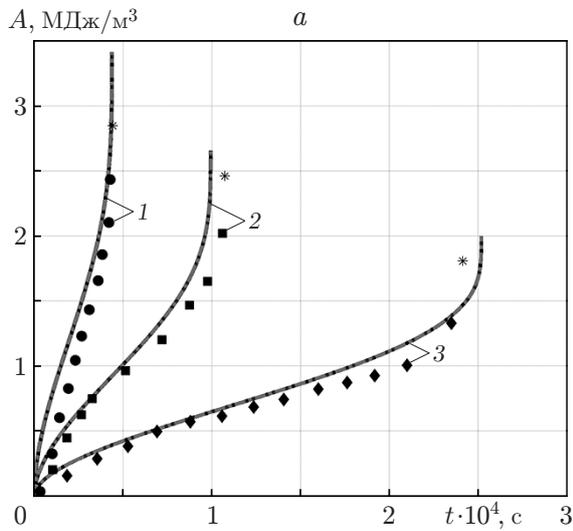


Рис. 1. Зависимости удельной энергии рассеяния (а), параметра поврежденности (б) и деформации ползучести (в) от времени для стали марки Ст.45 при $T = 850\text{ }^{\circ}\text{C}$ и различных значениях начального напряжения:

линии — численные и аналитические решения, точки — эксперимент, звездочка — момент разрушения в эксперименте; 1 — $\sigma_0 = 45\text{ МПа}$, 2 — $\sigma_0 = 40\text{ МПа}$, 3 — $\sigma_0 = 35\text{ МПа}$

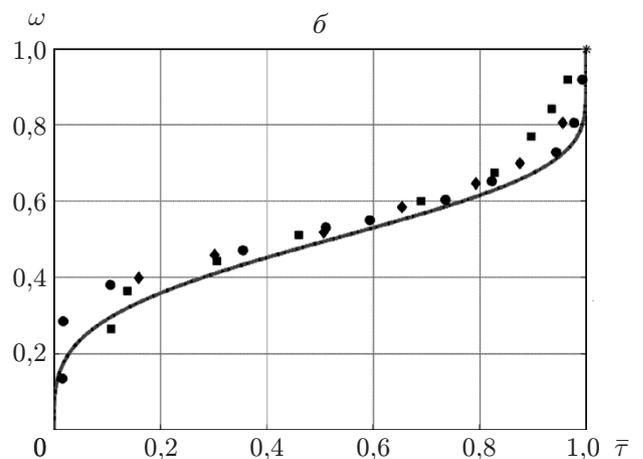
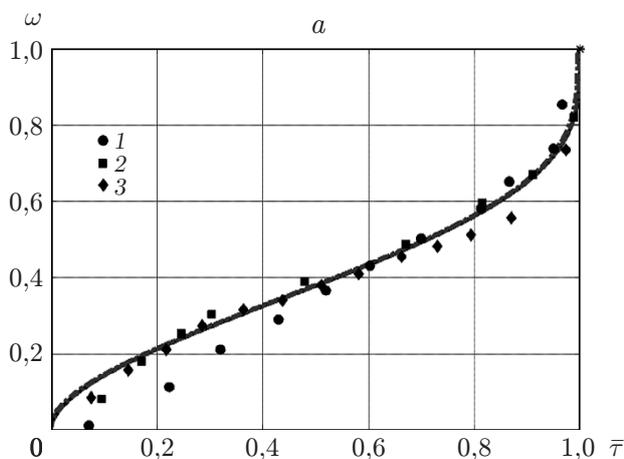


Рис. 2. “Единые” кривые в нормированных координатах $\omega-\bar{t}$:

а — сталь марки Ст.45 при $T = 850\text{ }^{\circ}\text{C}$ (1 — $\sigma_0 = 45\text{ МПа}$, 2 — $\sigma_0 = 40\text{ МПа}$, 3 — $\sigma_0 = 35\text{ МПа}$), б — титановый сплав марки 3В при $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ (1 — $\sigma_0 = 638\text{ МПа}$, 2 — $\sigma_0 = 618\text{ МПа}$, 3 — $\sigma_0 = 603\text{ МПа}$)

Таблица 3

Значения параметров процесса ползучести
при растяжении продольных образцов из титанового сплава марки ЗВ

σ_0 , МПа	Способ решения	t_* , ч	$\bar{\tau}_*$	ε_*	ω_*	A_* , МДж/м ³	t_n , с
603	1	4292,339 904	1	0,109 805	0,999 990	66,212 491	6,035
	2	4292,339 898	1	0,109 805	0,999 992	66,212 592	1,855
	3	4292,339 905	1	0,109 806	0,999 996	66,212 861	8,374
	4	4292,339 898	1	0,109 806	1,000 000	66,213 152	—
	5	3452,067 894	1	0,090 521	1,000 000	54,583 964	—
618	1	1202,064 758	1	0,107 140	0,999 990	66,212 482	5,825
	2	1202,064 757	1	0,107 130	0,999 901	66,206 599	1,414
	3	1202,064 758	1	0,107 141	0,999 999	66,213 069	8,161
	4	1202,064 757	1	0,107 141	1,000 000	66,213 152	—
	5	1247,814 487	1	0,094 732	1,000 000	58,544 629	—
638	1	230,897 758	1	0,103 782	0,999 993	66,212 712	6,107
	2	230,897 758	1	0,103 776	0,999 940	66,209 399	1,994
	3	230,897 758	1	0,103 782	0,999 992	66,212 643	8,606
	4	230,897 758	1	0,103 782	1,000 000	66,213 152	—
	5	249,880 096	1	0,102 457	1,000 000	65,367 625	—

(ΔA_{av} , $\Delta \omega_{av}$, $\Delta \varepsilon_{av}$, ΔA_{\max} , $\Delta \omega_{\max}$, $\Delta \varepsilon_{\max}$ — среднее арифметическое абсолютной погрешности и максимальная абсолютная погрешность расчетных значений удельной энергии рассеяния, параметра поврежденности и деформации ползучести соответственно).

3. Растяжение образцов из титанового сплава марки ЗВ. К системе дифференциальных уравнений вида (4) сводится задача расчета ползучести и длительной прочности прямоугольных образцов из анизотропного титанового сплава марки ЗВ, применяемого в авиации, ракетостроении и космической технике (изготовление обшивки, деталей крепления, силового набора, деталей шасси, различных агрегатов), при растяжении.

Рассматривается задача об одноосном растяжении образцов из прямоугольных плит, вырезанных в направлении прокатки листа (продольные образцы), толщиной 20 мм при постоянной температуре $T = 20$ °С и напряжении $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$. Задача сводится к системе ОДУ (10) с начальными условиями (11) и уравнением для деформации ползучести (12). Как и в первой задаче, аналитическое решение принимает вид соотношений (13)–(15), параметризованная задача имеет вид (19), (20). Характеристики ползучести при растяжении образцов из данного материала следующие [2]: $B_A = 1,46 \cdot 10^{-151}$ МПа⁻ⁿ⁺¹ · с⁻¹, $B_\omega = 2,205 \cdot 10^{-153}$ МПа^{-k} · с⁻¹, $\alpha = 2,5$, $n = 51,8$, $k = 51,8$, $m = 7$.

При численном решении непараметризованной и параметризованной задач использовались методы и компьютер, описанные выше.

Значения параметров процесса ползучести при растяжении образцов из титанового сплава марки ЗВ приведены в табл. 3.

На рис. 3 приведены зависимости удельной энергии рассеяния, параметра поврежденности и деформации ползучести от времени при различных значениях начального напряжения. Для удельной энергии рассеяния использовались данные, полученные для рассматриваемой задачи Б. В. Горевым после обработки результатов экспериментов, проведенных О. В. Сосниным [4], при $\sigma_0 = 638, 618, 603$ МПа [2]. Результаты эксперимента для деформации ползучести и параметра поврежденности пересчитаны по формулам (21). Полученные численные решения также практически совпадают с аналитическим решением исходной задачи (13)–(15).

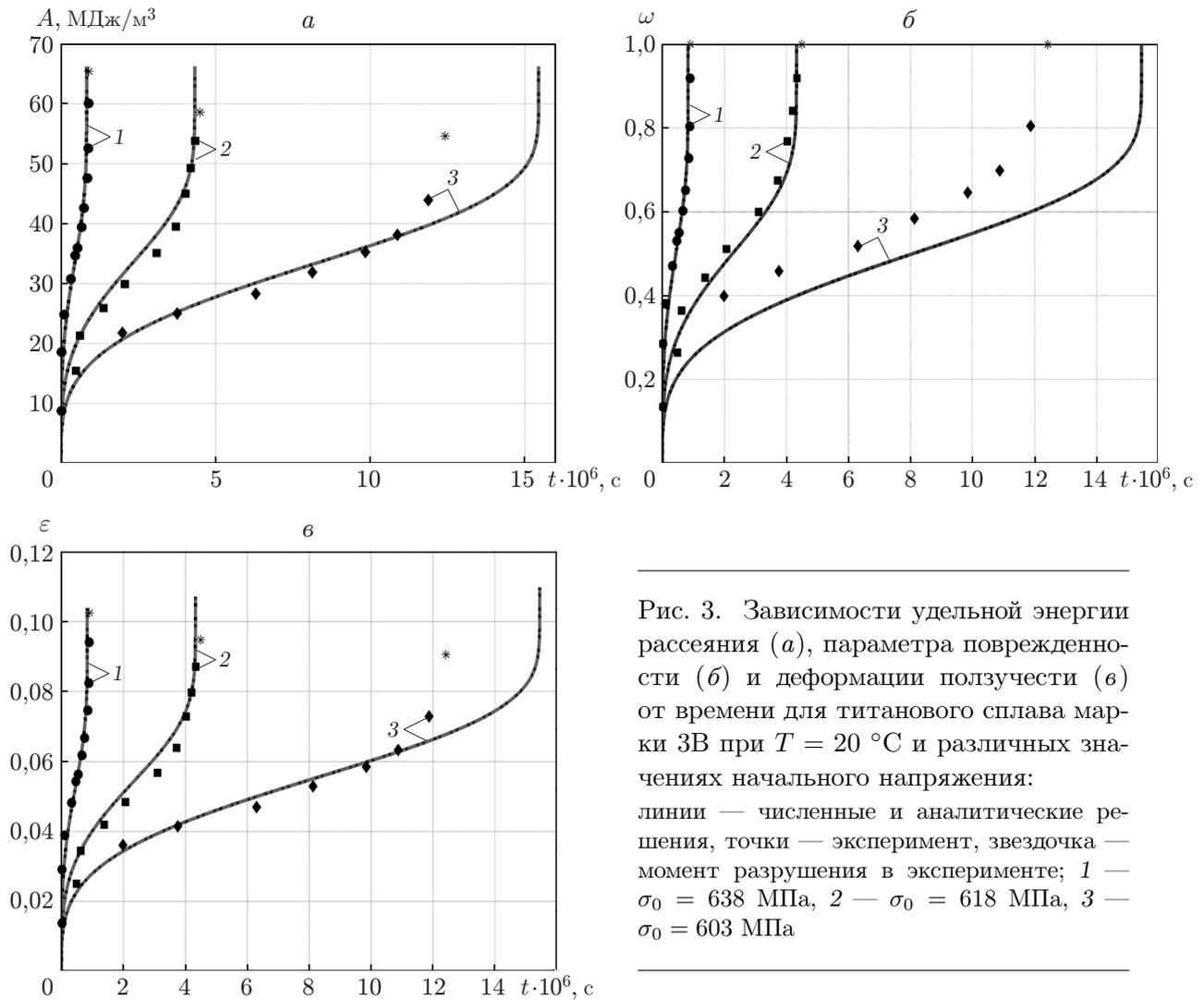


Рис. 3. Зависимости удельной энергии рассеяния (а), параметра поврежденности (б) и деформации ползучести (в) от времени для титанового сплава марки ЗВ при $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ и различных значениях начального напряжения: линии — численные и аналитические решения, точки — эксперимент, звездочка — момент разрушения в эксперименте; 1 — $\sigma_0 = 638 \text{ МПа}$, 2 — $\sigma_0 = 618 \text{ МПа}$, 3 — $\sigma_0 = 603 \text{ МПа}$

В табл. 4 приведены характеристики абсолютной погрешности. Для данной задачи среднее арифметическое значение абсолютной погрешности не позволяет адекватно оценить среднюю абсолютную погрешность используемых методов решения, поэтому для этой цели применяется медиана, т. е. величина, делящая значения абсолютной погрешности на две равные части [12]. В табл. 4 $\Delta\epsilon_m, \Delta\omega_m, \Delta A_m$ — медиана абсолютной погрешности расчетных значений деформации ползучести, параметра поврежденности и удельной энергии рассеяния соответственно.

Заключение. Получение численного решения рассматриваемых задач, описываемых системой дифференциальных уравнений кинетической теории ползучести с однородными начальными условиями, затруднительно при использовании традиционных явных методов интегрирования задачи Коши вследствие наличия особенностей в начальный момент времени и при разрушении. В работе предложен подход к решению данной проблемы, основанный на применении к исходной задаче метода продолжения решения по параметру и наилучшей параметризации. Преобразованная задача не имеет особенностей и может быть решена любым численным методом интегрирования систем ОДУ.

Таблица 4

Абсолютная погрешность расчета параметров процесса ползучести при растяжении продольных образцов из титанового сплава марки ЗВ

σ_0 , МПа	Метод решения	$\Delta\varepsilon_m \cdot 10^7$	$\Delta\varepsilon_{\max}$	$\Delta\omega_m \cdot 10^6$	$\Delta\omega_{\max}$	$\Delta A_m \cdot 10^4$	ΔA_{\max}
603	1	5,983	0,003	5,449	0,023	3,608	1,518
	2	$5 \cdot 10^{-7}$	$9 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-7}$	0,008	$3 \cdot 10^{-7}$	0,539
	3	5,875	0,003	5,449	0,023	3,543	1,521
618	1	5,865	0,002	5,474	0,021	3,625	1,382
	2	$4 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-7}$	0,008	$2 \cdot 10^{-7}$	0,518
	3	5,761	0,002	5,475	0,021	3,560	1,383
638	1	5,632	0,002	5,427	0,021	3,593	1,393
	2	$2 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-7}$	0,008	$2 \cdot 10^{-7}$	0,501
	3	5,560	0,001	5,456	0,014	3,547	0,914

Полученная параметризованная задача решалась численно с использованием явных методов Эйлера и Рунге — Кутты, непараметризованная задача — неявным методом Эйлера. Сравнение результатов решений этих задач с аналитическими и экспериментальными данными выявило следующие преимущества предложенного подхода.

Численные решения хорошо согласуются с аналитическими и экспериментальными данными для обеих задач.

Для параметризованных задач время счета меньше в 1,5–4 раза в зависимости от порядка точности используемого метода.

Абсолютные погрешности численных решений задачи о растяжении образцов из сплава марки ЗВ при использовании явного и неявного методов Эйлера различаются незначительно, а для численных решений параметризованной задачи о растяжении образцов из стали марки Ст.45 абсолютная погрешность в несколько раз меньше по сравнению с непараметризованной.

Следует отметить, что использование неявных методов решения задачи Коши приводит к необходимости численного решения систем нелинейных уравнений. Это обусловлено выбором начального приближения, проблемами сходимости итерационных процессов и сложностью реализации приближенных методов решения (приведение рассматриваемой задачи к специальному виду, аппроксимация производных и т. д.). В данной работе при использовании неявного метода Эйлера системы нелинейных уравнений решаются с помощью простых итераций, однако могут потребоваться более трудоемкие методы, требующие вычисления производных, например метод Ньютона, что может привести к значительному усложнению процесса решения. Сказанное выше подтверждает преимущество, которое дает метод продолжения решения по параметру, позволяя применять явные методы интегрирования систем ОДУ при решении рассматриваемых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горев Б. В., Захарова Т. Э., Клопотов И. Д. К описанию процесса ползучести и разрушения материалов с немонотонным изменением деформационно-прочностных свойств // Физ. мезомеханика. 2002. Т. 5, № 2. С. 17–22.
2. Горев Б. В., Банщикова И. А. К описанию процесса ползучести и разрушения упрочняющихся материалов по кинетическим уравнениям со скалярным параметром поврежденности // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2009. № 2. С. 90–98.

3. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
4. **Соснин О. В., Шокало И. К.** Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности. 2. Ползучесть и разрушение материалов с начальным упрочнением // Пробл. прочности. 1974. № 1. С. 43–48.
5. **Соснин О. В.** Энергетический вариант теории ползучести / О. В. Соснин, Б. В. Горев, А. Ф. Никитенко. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1986.
6. **Соснин О. В., Никитенко А. Ф., Горев Б. В.** К обоснованию энергетического варианта теории ползучести и длительной прочности металлов // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 4. С. 188–197.
7. **Горев Б. В., Клопотов И. Д.** К описанию процесса ползучести и длительной прочности по уравнениям с одним скалярным параметром повреждаемости // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 5. С. 92–102.
8. **Gorev B. V., Klopotov I. D., Lyubashevskaya I. V.** Creep and damage behavior of AK4-1T and VT-9 alloys under different stress states // Theor. Appl. Fract. Mech. 1998. V. 29. P. 1–10.
9. **Горев Б. В.** Высокотемпературная ползучесть конструкционных сплавов и ее приложение к формообразованию крупногабаритных деталей: Дис. . . . д-ра техн. наук. Новосибирск, 2003.
10. **Шалашилин В. И.** Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация / В. И. Шалашилин, Е. Б. Кузнецов. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
11. **Арушанян О. Б.** Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране / О. Б. Арушанян, С. Ф. Залеткин. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1990.
12. **Гмурман В. Е.** Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 2003.

*Поступила в редакцию 29/V 2014 г.,
в окончательном варианте — 16/IV 2015 г.*
