

УДК 532.58

## ПРОНИКАНИЕ КРУГОВОЙ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ В НЕСЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

М. Ф. Ионина

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается плоская нестационарная задача об ударе упругой тонкой цилиндрической оболочкой по поверхности идеальной несжимаемой жидкости. Исследуется начальный этап взаимодействия тела с жидкостью, в течение которого напряжения, возникающие в оболочке, достигают своих максимальных значений. Задача рассматривается в линеаризованной постановке и решается численно методом нормальных мод в рамках подхода Вагнера. Полученные численные результаты согласуются с данными эксперимента, проведенного с разными типами круговых оболочек из мягкой стали.

Рассматривается плоская нестационарная задача об ударе упругой круговой цилиндрической оболочкой по поверхности идеальной несжимаемой жидкости. В начальный момент времени ( $t = 0$ ) жидкость занимает полуплоскость  $y < 0$  и покоится, оболочка касается жидкости в точке  $x = 0, y = 0$  и имеет скорость  $V$ , направленную вертикально вниз. Начальное положение свободной границы жидкости совпадает с горизонтальной линией  $y = 0$ , давление на свободной границе считается постоянным и равным нулю. При  $t > 0$  происходит удар оболочки по жидкости. Рассматривается модель оболочки, в которой учитываются окружные изгибающие и окружные нормальные напряжения. Толщина оболочки  $h$  предполагается намного меньшей ее радиуса  $R$ . Требуется определить напряженное состояние оболочки при ее погружении в жидкость.

В настоящей работе используется метод [1], который был разработан для расчета центрального удара волной по пластине. Однако геометрия задачи об ударе оболочкой по поверхности жидкости сложнее, поэтому необходимо использовать цилиндрическую систему координат для описания динамики оболочки и декартову для описания течения жидкости. Кроме того, в отличие от задачи об ударе пластиной, для которой длительность ударной стадии можно оценить из геометрических соображений, в случае удара оболочкой ударная стадия не является четко выраженной. Предполагается, что длительность ударной стадии, на которой гидродинамические нагрузки велики, а изгибающие напряжения достигают своего максимального значения, связана с частотами собственных колебаний оболочки.

**Введение.** Рассматривается тонкая круговая цилиндрическая оболочка. Ее деформированное состояние называется плоским, если прогиб оболочки и напряжения в ней не изменяются вдоль образующей оболочки. При составлении уравнений равновесия плоской круговой цилиндрической оболочки учитывается инерция в окружном и радиальном направлениях ( $r, \theta$  — цилиндрическая система координат). Тогда уравнения динамики круговой оболочки записываются в виде [2]

$$\frac{1}{R} \frac{\partial M}{\partial \theta} - \frac{\partial N}{\partial \theta} - \rho_0 \dot{u} \ddot{v} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{1}{R} \frac{\partial^2 M}{\partial \theta^2} + N + \rho_0 h R \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p_0 R = 0.$$

Работа выполнена в рамках интеграционного проекта № 43 СО РАН при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01767).

Здесь  $w$  — перемещение оболочки в нормальном направлении, положительное по направлению к центру;  $v$  — перемещение оболочки в тангенциальном направлении, положительное в направлении возрастания угла  $\theta$ ;  $\rho_0$  — плотность материала оболочки;  $p_0$  — внешнее давление, действующее на оболочку;  $M$  — удельный окружной изгибающий момент;  $N$  — удельная окружная нормальная сила.

Удельные усилия в сечениях оболочки выражаются через изменение кривизны  $\varkappa$  и окружную деформацию  $\varepsilon$  срединной поверхности:

$$M = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\varkappa, \quad \bar{N} = -\frac{Eh}{1-\nu^2}\varepsilon, \quad (1)$$

где

$$\varkappa = -\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right); \quad \varepsilon = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w\right); \quad (2)$$

$E$  — модуль упругости;  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала оболочки.

Заметим, что ввиду малой толщины оболочки даже незначительные изгибающие моменты вызывают в ней большие напряжения, поэтому важно уметь определить усилия в оболочке при изгибе, чтобы при конструировании обеспечить надежность сооружения.

Деформация произвольной точки нормали, отстоящей на расстоянии  $z$  от срединной линии плоской оболочки, вычисляется через изменение кривизны  $\varkappa$  и деформацию  $\varepsilon$  удлинения срединной линии [2]:  $\varepsilon^z = \varepsilon + z\varkappa$  ( $-h/2 \leq z \leq h/2$ ), причем за положительное направление  $z$  принимается направление к центру кривизны оболочки.

В расчетах динамики оболочек часто используется гипотеза о нерастяжимости срединной линии, согласно которой окружная деформация срединной линии цилиндрической оболочки  $\varepsilon$  равна нулю, следовательно, выполняется равенство  $w = \partial v / \partial \theta$ . Такое предположение значительно упрощает уравнения динамики оболочки, но ведет к некоторым неточностям в решении задачи, которые будут рассмотрены ниже.

Частоты собственных колебаний оболочки при условии нерастяжимости ее срединной линии вычисляются по формуле [3]

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1-\nu^2)} \frac{h^2}{12R^4} \frac{i^2(i^2-1)^2}{i^2+1}}. \quad (3)$$

При  $i = 0$  (чисто радиальные колебания)  $f_0 = 0$ ; при  $i = 1$   $f_1 = 0$  и оболочка движется как твердое недеформируемое тело; при  $i = 2$  оболочка совершает изгибные колебания, соответствующие основной (низшей) нормальной форме с периодом колебаний  $T_2 = 1/f_2$ .

Гидродинамические нагрузки при ударе оболочкой по поверхности жидкости быстро нарастают и затем затухают. Оценивая длительность ударной стадии, заметим, что она может быть определена как стадия проникания тела в жидкость, в течение которой размер смоченной части оболочки  $S(t)$  много больше, чем глубина ее погружения  $H(t)$ , т. е. отношение  $\sigma = H(t)/S(t)$  мало. Важно заметить, что это отношение зависит от решения задачи, и его малость должна проверяться апостериори. При постоянной скорости тела  $H(t) = Vt$ . Пренебрегая деформациями жидкой границы и упругой оболочки при ударе, получим, что в момент времени  $t_1$  ширина области контакта жидкости с телом  $S(t_1)$  равна  $2\sqrt{R^2 - (R - Vt_1)^2}$  и имеет порядок  $O(\sqrt{RVt_1})$  при малом времени  $t_1$ . Величина  $L = \sqrt{RVT}$  принимается за масштаб длины, где  $T$  — масштаб времени, связанный с длительностью ударной стадии. Если в качестве масштаба времени выбрать величину  $R/V$ , то получим грубую оценку продолжительности начального этапа проникания. Из формул (1), (2) следует, что в рамках гипотезы о нерастяжимости срединной линии оболочки основной вклад в изгибные усилия дает вторая мода колебаний оболочки, поэтому за

масштаб времени  $T$  принимается период низшей формы изгибных собственных колебаний оболочки  $T = T_2$ .

Отличительной чертой задачи является то, что изгиб упругой оболочки вызывается гидродинамическими нагрузками, область приложения которых  $-c(t) < x < c(t)$  расширяется со временем, а их амплитуда зависит от упругих деформаций. Задача является связанной: течение жидкости и деформации тела нужно определять одновременно. В то же время необходимо определять и размер смоченной части тела, который является важной характеристикой процесса. Расчет функции  $c(t)$  связан со значительными трудностями и обычно проводится приближенно [4].

Требуется определить деформацию упругой оболочки, ее прогибы, а также положение точек контакта при следующих предположениях: 1) жидкость идеальная и несжимаемая; 2) внешние массовые силы и силы поверхностного натяжения отсутствуют; 3) течение жидкости плоское, потенциальное, симметричное относительно оси  $y$ ; 4) оболочка упругая, тонкостенная, при ударе деформации малы по сравнению с радиусом оболочки  $R$ ; 5) период низшей формы собственных изгибных колебаний оболочки  $T_2$  много меньше отношения  $R/V$ ; 6) размер области контакта оболочки с жидкостью монотонно увеличивается.

Ниже используются безразмерные переменные, которые определяются с помощью следующих масштабов:  $L$  — масштаб длины,  $T$  — масштаб времени,  $V$  — масштаб скорости,  $VL$  — масштаб потенциала скоростей,  $VT$  — масштаб перемещений,  $\rho VL/T$  — масштаб давления, где  $\rho$  — плотность жидкости. Безразмерные переменные обозначаются теми же символами, что и размерные величины.

**Постановка задачи.** При рассмотрении начальной стадии погружения предполагается, что вертикальная скорость жидких частиц имеет порядок скорости оболочки  $V$ , тогда возвышение свободной границы будет иметь порядок глубины погружения оболочки  $O(H)$ . Параметр линеаризации  $\sigma$  (отношение характерной глубины погружения  $VT$  к характерному размеру области контакта  $L$  на ударной стадии) в данном случае равен  $\sqrt{VT/R}$ . На начальном этапе, когда глубина погружения оболочки еще мала, можно линеаризовать уравнения движения и граничные условия с точностью  $O(\sigma)$  и снести их на начальный уровень невозмущенной жидкости  $y = 0$ . Отклонение приближенного решения такой задачи от точного можно оценить как  $O(\sigma)$ . Движение жидкости в линейном приближении описывается уравнением Лапласа для потенциала скоростей  $\varphi(x, y, t)$  в нижней полуплоскости  $y < 0$  с соответствующими краевыми условиями.

Положение точек контакта задается в симметричном случае одной функцией  $c(t)$ . Несмотря на то что уравнения движения и граничные условия линеаризованы, задача остается нелинейной, так как величина  $c(t)$  заранее неизвестна. Последнее обстоятельство в основном и определяет трудности, которые возникают при исследовании соударения упругих тел с жидкостью.

Постановка задачи в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + A \left( w - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + B \left( \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) = G p_0(\theta, t) \quad (-\pi < \theta < \pi); \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + A \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) - B \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right) = 0 \quad (-\pi < \theta < \pi); \quad (5)$$

$$v(\theta, 0) = v_t(\theta, 0) = w(\theta, 0) = w_t(\theta, 0) = 0 \quad (-\pi < \theta < \pi); \quad (6)$$

$$p = -\varphi_t \quad (y \leq 0); \quad (7)$$

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad (y < 0); \quad (8)$$

$$\varphi = 0 \quad (y = 0, |x| > c(t)); \quad (9)$$

$$\varphi_y = -1 + w_t \quad (y = 0, |x| < c(t)); \quad (10)$$

$$\varphi \rightarrow 0 \quad (x^2 + y^2 \rightarrow \infty). \quad (11)$$

Здесь  $p(x, y, t)$  — давление в жидкости;  $p_0(\theta, t)$  — гидродинамическая нагрузка (давление), действующая на оболочку. В области контакта для  $|x| < c(t)$  имеем  $p_0(\theta, t) = p(x(\theta, t), y(\theta, t), t)$ , где  $x(\theta, t)$ ,  $y(\theta, t)$  — горизонтальная и вертикальная компоненты движущейся деформируемой оболочки в декартовой системе координат. Формула (7) для давления следует из линеаризованного интеграла Коши — Лагранжа.

Безразмерные параметры  $A$ ,  $B$ ,  $G$  в уравнениях оболочки (4), (5) равны

$$A = \frac{ET^2}{\rho_0 R^2 (1 - \nu^2)}, \quad B = \frac{ET^2 h^2}{12 \rho_0 R^4 (1 - \nu^2)}, \quad G = \frac{\rho L}{\rho_0 h}. \quad (12)$$

На начальном этапе  $y(\theta, t) = O(\sigma)$  в области контакта, следовательно,

$$p_0(\theta, t) \approx p(x(\theta), 0, t) \quad (|\theta| < \theta_c(t)). \quad (13)$$

В этой же области в главном порядке при  $\sigma \rightarrow 0$  справедливо приближение

$$\theta \approx \gamma x, \quad \theta_c(t) \approx \gamma c(t), \quad \gamma = L/R \quad (t > 0, |x| < c(t)), \quad (14)$$

которое будет использоваться в дальнейшем для замены в уравнениях переменной  $\theta$  на  $x$ .

Постановка задачи (4)–(11) не является полной, поэтому следует добавить условие, которое служит для нахождения функции  $c(t)$  и требует непротекания жидких частиц, лежащих на свободной границе, за движущуюся упругую поверхность. В симметричном случае это условие приводит к трансцендентному уравнению [5]

$$\int_0^{\pi/2} y_b(c(t) \sin \theta, t) d\theta = 0, \quad (15)$$

при выводе которого использовано условие Вагнера [6]. Здесь функция  $y_b(x, t)$  описывает форму движущейся деформируемой упругой оболочки. В безразмерных переменных и главном порядке при  $\sigma \rightarrow 0$  эта функция имеет вид  $y_b(x, t) = x^2/2 - t + w(x, t)$ . Тогда уравнение (15) дает

$$t = \frac{1}{4} c^2 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} w(c(t) \sin \theta, t) d\theta. \quad (16)$$

Начально-краевая задача (4)–(16) решается методом нормальных мод.

**Метод решения задачи.** На участке жидкой границы  $-\pi < x < \pi$ ,  $y = 0$ , который охватывает пятно контакта, потенциал скоростей и распределение давления можно представить в виде

$$\varphi(x(\theta), 0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) \cos(n\theta), \quad p(x(\theta), 0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) \cos(n\theta), \quad (17)$$

причем из условия (7) следует, что  $p_n(t) = -\dot{\varphi}_n(t)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Точка обозначает производную по времени.

Прогибы оболочки определяются в виде

$$w(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \cos(n\theta), \quad v(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(n\theta). \quad (18)$$

Подставляя выражения (17), (18) в уравнения деформации оболочки (4), (5), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для  $n > 0$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_n + a_n(A + Bn^4) - b_n(An + Bn^3) - Gp_n &= 0, \\ \ddot{b}_n - a_n(An + Bn^3) + b_n(An^2 + Bn^2) &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

и аналогично для  $n = 0$

$$\ddot{a}_0 + Aa_0 - Gp_0 = 0. \quad (20)$$

Обобщенные координаты мод  $a_n(t)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) и  $b_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) удобно принять в качестве новых искомым функций и выразить через них остальные величины.

Систему (19), (20) запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{a}_n + G\varphi_n) + a_n(A + Bn^4) - b_n(An + Bn^3) &= 0, \\ \frac{d}{dt}\dot{b}_n - a_n(An + Bn^3) + b_n(An^2 + Bn^2) &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Теперь можно ввести в рассмотрение новые вспомогательные функции  $g_n = \dot{a}_n + G\varphi_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) и  $r_n = \dot{b}_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) и переписать (21) в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{a}_n = g_n - G\varphi_n, \quad \dot{g}_n = -a_n(A + Bn^4) + b_n(An + Bn^3), \\ \dot{b}_n = r_n, \quad \dot{r}_n = a_n(An + Bn^3) - b_n(An^2 + Bn^2). \end{aligned} \quad (22)$$

Собственные функции  $\psi_n(\theta) = \cos(n\theta)$  удовлетворяют условию ортогональности

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(\theta)\psi_m(\theta) d\theta = \delta_{nm},$$

где  $\delta_{nm} = 0$  при  $n \neq m$ ,  $\delta_{nn} = 1$  при  $n > 0$  и  $\delta_{00} = 2$ . Из этого условия и из (9), (14), (17) следуют равенства

$$\varphi_n(t) = \frac{\gamma}{\pi} \int_{-c(t)}^{c(t)} \varphi(x, 0, t)\psi_n(\gamma x) dx \quad (n \neq 0), \quad \varphi_0(t) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-c(t)}^{c(t)} \varphi(x, 0, t) dx.$$

Для того чтобы найти зависимости  $\varphi_m(t)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) от обобщенных координат  $a_n(t)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) и  $b_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), рассмотрим отдельно гидродинамическую часть задачи (4)–(11).

Определим новые, гармонические в нижней полуплоскости  $y \leq 0$  функции  $\phi_n(x, y, c)$  как решения краевой задачи

$$\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial y^2} = 0 \quad (y < 0); \quad (23)$$

$$\phi_n = 0 \quad (y = 0, |x| > c(t)); \quad (24)$$

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial y} = \psi_n(\gamma x) \quad (y = 0, |x| < c(t)); \quad (25)$$

$$\phi_n \rightarrow 0 \quad (x^2 + y^2 \rightarrow \infty) \quad (26)$$

с интегрируемыми особенностями первых производных вблизи точек смены вида граничного условия ( $x = \pm c$ ). Здесь  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $\psi_0(\gamma x) \equiv 1$ . Заметим, что при известной

функции  $c(t)$  задача (8)–(11) является линейной. Сравнивая краевые условия (10) и (25), получаем

$$\varphi(x, 0, t) = -\phi_0(x, 0, c) + \sum_{n=0}^{\infty} \dot{a}_n(t) \phi_n(x, 0, c); \quad (27)$$

$$\varphi_m(t) = -f_m(c) + \sum_{n=0}^{\infty} \dot{a}_n(t) S_{nm}(c). \quad (28)$$

Здесь

$$f_m(c) = \frac{\gamma}{\pi} \int_{-c}^c \phi_0(x, 0, c) \psi_m(\gamma x) dx \quad (m \neq 0); \quad (29)$$

$$f_0(c) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-c}^c \phi_0(x, 0, c) dx; \quad (30)$$

$$S_{nm}(c) = \frac{\gamma}{\pi} \int_{-c}^c \phi_n(x, 0, c) \psi_m(\gamma x) dx \quad (m \neq 0, \quad n \neq 0); \quad (31)$$

$$S_{n0}(c) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-c}^c \phi_n(x, 0, c) dx; \quad (32)$$

$$S_{0m}(c) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-c}^c \phi_0(x, 0, c) \psi_m(\gamma x) dx. \quad (33)$$

Матрица  $S$  с элементами  $S_{nm}(c)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots; m = 0, 1, 2, \dots$ ) является симметричной, что следует из (25), (31)–(33) и второй интегральной теоремы Грина, и зависит только от размера пятна контакта  $c$ . Известно, что  $\phi_0(x, 0, c) = \sqrt{c^2 - x^2}$  при  $|x| < c$ , откуда в нашем случае  $f_m(c) = cJ_1(m\gamma c)/m$  при  $m \neq 0$  и  $f_0(c) = c^2\gamma/4$ , где  $J_1$  — функция Бесселя первого порядка. Элементы  $S_{nm}$  матрицы  $S$  также можно записать через функции Бесселя:

$$S_{nm}(c) = \frac{c}{n^2 - m^2} [nJ_1(nc\gamma)J_0(mc\gamma) - mJ_0(nc\gamma)J_1(mc\gamma)] \quad (n, m > 0, \quad n \neq m),$$

$$S_{n0}(c) = \frac{c}{2n} J_1(nc\gamma) \quad (n > 0), \quad S_{nn} = \frac{c^2\gamma}{2} [J_0^2(nc\gamma) + J_1^2(nc\gamma)] \quad (n > 0), \quad S_{00} = \frac{\gamma c^2}{4},$$

что существенно упрощает их вычисление. Подставляя (28) в систему (22), получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = (I + GS)^{-1}(\mathbf{g} + G\mathbf{f}); \quad (34)$$

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt} = -D_1\mathbf{a} + D_2\mathbf{b}; \quad (35)$$

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \bar{\mathbf{r}}; \quad (36)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = D_2\mathbf{a} - D_3\mathbf{b}. \quad (37)$$

Здесь  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)^T$ ;  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots)^T$ ;  $\mathbf{g} = (g_0, g_1, g_2, \dots)^T$ ;  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots)^T$ ;  $\mathbf{f} = (f_0(c), f_1(c), f_2(c), \dots)^T$ ;  $I$  — единичная матрица;  $D_1, D_2, D_3$  — диагональные матрицы,  $D_1 = \text{diag}\{A + Bn^4\}$ ,  $D_2 = \text{diag}\{An + Bn^3\}$ ,  $D_3 = \text{diag}\{An^2 + Bn^2\}$ ; индекс  $T$  обозначает транспонирование.

В системе (34)–(37) правые части зависят от  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{g}, \mathbf{r}, c$  и не зависят от  $t$ , поэтому удобно выбрать величину  $c$  в качестве новой независимой переменной. Дифференциальное уравнение для  $t = t(c)$  следует из условия (19), если его продифференцировать по  $c$ :

$$\frac{dt}{dc} = Q(c, \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}), \quad (38)$$

где  $Q(c, \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) = (c + (4/\pi)(\mathbf{a}, \Gamma_c(c)))/(2 - (4/\pi)(\dot{\mathbf{a}}, \Gamma(c)))$ . Здесь  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение векторов;  $\Gamma(c) = (\Gamma_0(c), \Gamma_1(c), \Gamma_2(c), \dots)$ ;  $\Gamma_c(c) = (\Gamma_{0c}(c), \Gamma_{1c}(c), \Gamma_{2c}(c), \dots)$ ;

$\Gamma_n(c) = \int_0^{\pi/2} \psi_n(c \sin \theta) d\theta$ ,  $\Gamma_{nc}(c) = \int_0^{\pi/2} \psi'_n(c \sin \theta) \sin \theta d\theta$  или после вычислений выражаются через функции Бесселя нулевого и первого порядков:

$$\Gamma_n(c) = \frac{\pi}{2} J_0(nc\gamma), \quad \Gamma_{nc}(c) = -\frac{\pi}{2} n\gamma J_1(nc\gamma).$$

Умножая каждое уравнение системы (34)–(37) на  $dt/dc$  и учитывая (38), находим

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{a}}{dc} &= \mathbf{F}(c, \mathbf{g})Q(c, \mathbf{a}, \mathbf{F}(c, \mathbf{g})), & \frac{d\mathbf{g}}{dc} &= (-D_1\mathbf{a} + D_2\mathbf{b})Q(c, \mathbf{a}, \mathbf{F}(c, \mathbf{g})), \\ \frac{d\mathbf{b}}{dc} &= \mathbf{r}Q(c, \mathbf{a}, \mathbf{F}(c, \mathbf{g})), & \frac{d\mathbf{r}}{dc} &= (D_2\mathbf{a} - D_3\mathbf{b})Q(c, \mathbf{a}, \mathbf{F}(c, \mathbf{g})). \end{aligned} \quad (39)$$

Здесь  $\mathbf{F}(c, \mathbf{g}) = (I + GS)^{-1}(\mathbf{g} + G\mathbf{f}(c))$ . Система (39) решается численно при нулевых начальных условиях

$$\mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{g} = 0, \quad \mathbf{r} = 0, \quad t = 0 \quad (c = 0). \quad (40)$$

Выбор  $c$  в качестве новой независимой переменной представляется достаточно естественным, так как соответствует структуре системы (39). Введение новых искомым функций  $g_n(t)$ ,  $r_n(t)$  вместо производных  $\dot{a}_n(t)$  и  $\dot{b}_n(t)$  решает проблему с началом численного счета: правые части в системе (38), (39) равны нулю при  $c = 0$ . Если же решать задачу в исходных переменных, то возникают трудности с началом счета, преодолеть которые можно лишь искусственным путем. Причина заключается в том, что при малых временах  $c(t) = O(\sqrt{t})$ ,  $w(x, t) = O(t^{3/2})$ ,  $w_t = O(\sqrt{t})$ ,  $w_{tt} = O(t^{-1/2})$  в начале удара пятно контакта расширяется с очень большой скоростью, а ускорения элементов упругой поверхности неограничены. В то же время искомые величины, рассматриваемые как функции от  $c$ :  $t = O(c^2)$ ,  $w = O(c^3)$ ,  $w_t = O(c)$ , на начальном этапе растут плавно. В ходе решения задачи Коши (39), (40) производные  $\dot{a}_n(t)$  определяются по формуле (34), а производные  $\dot{b}_n$  — по формуле (36).

В задаче Коши (39), (40) удерживается конечное число нормальных мод  $N$ , при  $n \geq N + 1$  полагается  $a_n \equiv 0$ ,  $b_n \equiv 0$ ,  $g_n \equiv 0$ ,  $r_n \equiv 0$ . Задача решается методом Рунге — Кутты четвертого порядка точности с постоянным шагом по переменной  $c$ . Выбор шага подробно обсуждался в [1]. Вычисления проводились при разных значениях  $N$  с целью установить сходимость численного решения с ростом  $N$ . Выяснилось, что для расчетов достаточно взять  $N = 15$ , так как при увеличении числа удерживаемых мод значения искомым величин изменяются незначительно.

**Описание эксперимента.** В работе [7] описываются эксперименты с тонкостенным цилиндром, целью которых является выявление особенностей деформирования цилиндра при его ударе о водную поверхность. В [7] приводятся экспериментальные результаты, на основе которых предлагается численный метод нахождения деформаций цилиндра. Измеренное экспериментально давление разделяется на две части, каждая из которых применяется для оценки максимальных значений деформаций. Давление на оболочку быстро нарастает при ее ударе о воду и резко уменьшается при ее дальнейшем погружении. Эта часть давления с резко выраженным пиком называется ударным давлением. Профиль ударного давления аппроксимируется треугольным импульсом, основание треугольника соответствует длительности, а его высота — амплитуде ударного давления. После понижения ударного давления гидродинамические нагрузки на тело относительно малы, но действуют продолжительное время. Эксперименты [7] показывают, что деформации, полученные численно с учетом только ударного давления, существенно меньше измеренных величин. Следовательно, беспиковая часть давления также должна учитываться в расчетах.

Целью эксперимента являлось исследование эволюции гидродинамического давления на упругом цилиндре и его напряженного состояния в двумерном случае.

Цилиндр длиной 600 мм и диаметром 312 мм сбрасывался на поверхность воды с высоты 0,5; 1,0 и 1,5 м. Для обеспечения двумерного течения при проникании тела в воду по разные стороны от цилиндра устанавливались пара вертикальных плоских пластин. Цилиндр подвешивался к жесткой балке, скользящей по двум вертикальным направляющим, для сохранения горизонтального положения цилиндра во время его падения. С помощью электрического магнита цилиндр поднимался на необходимую высоту, затем магнит отключался и цилиндр падал в воду, причем в момент касания с водой цилиндр отсоединялся от балки и дальше двигался без нее. Чтобы вода не проникала внутрь цилиндра, сверху и снизу на него была натянута резиновая пленка.

Эксперимент проводился с цилиндрическими оболочками толщиной 5,1 и 1,0 мм, в дальнейшем первый цилиндр будем называть толстым, а второй — тонким. Цилиндры сделаны из мягкой стали разных стандартов; толстый (стандарт JIS STRG370) имеет массу 23,8 кг, тонкий (стандарт JIS SPCC) — 5,0 кг.

Датчики деформаций полупроводникового типа и мембранные манометры для измерения давления прикреплялись на внутренней поверхности цилиндров, тонкий цилиндр оборудован только датчиком деформаций. Сигналы этих датчиков регистрировались персональным компьютером. Пороговая частота, регистрируемая датчиками давления, составляла 100 кГц, датчиками деформаций — 5 кГц.

Основные результаты эксперимента приведены для вершины оболочки ( $\theta = 0$ ), т. е. для точки первоначального контакта тела с поверхностью воды; здесь наблюдаются максимальные значения давления и деформаций.

Для толстого цилиндра при  $\theta = 0$  максимальное значение деформаций достигается примерно через 4 мс после удара, максимальное значение давления — примерно через 0,05 мс. Измеренный период колебаний цилиндра составляет около 8 мс, что совпадает с полученной из уравнения (3) оценкой периода изгибных колебаний цилиндра в двумерном случае 7,5 мс. Для тонкого цилиндра максимальное значение деформации наблюдается намного позже, примерно через 22 мс после удара.

**Численные результаты.** При численном решении задачи (39), (40) использовались данные эксперимента [7]. Значения основных параметров:  $R = 0,156$  м,  $h_1 = 5,1$  мм,  $h_2 = 1,0$  мм,  $m_1 = 23,8$  кг,  $m_2 = 5,0$  кг,  $E = 206 \cdot 10^9$  Па,  $\nu = 0,33$ . (Индексами 1 и 2 отмечены величины, относящиеся к толстому и тонкому цилиндрам соответственно.) На основе этих значений вычисляются остальные параметры задачи, а именно плотность материала оболочки  $\rho_{01} = 8067$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_{02} = 8530$  кг/м<sup>3</sup> в предположении равномерной



распределенности массы по объему тела и скорость падения оболочки  $V = 4,1$  м/с в предположении, что ее центр масс падает с высоты 1 м.

Для толстого цилиндра коэффициенты в уравнениях оболочки  $A = 6,17 \cdot 10^4$ ,  $B = 5,5$ ,  $G = 1,65$ . Масштаб длины равен 6,8 см, времени — 7,2 мс, потенциала скоростей —  $0,28$  м<sup>2</sup>/с, перемещений — 2,9 см, давления —  $0,038$  Н/мм<sup>2</sup>, параметр линеаризации  $\sigma = 0,43$ .

Для тонкого цилиндра  $A = 1,61 \cdot 10^6$ ,  $B = 5,5$ ,  $G = 18,14$ . Масштаб длины равен 15,5 см, времени — 38 мс, потенциала скоростей —  $0,63$  м<sup>2</sup>/с, перемещений — 15,4 см, давления —  $0,016$  Н/мм<sup>2</sup>, параметр линеаризации  $\sigma = 0,995$ . К численным результатам, получаемым для тонкого цилиндра, следует относиться критически, так как для него масштабы слишком велики при описании начальной стадии процесса проникания упругого тела в жидкость.

Исследуем подробнее удар о воду толстого цилиндра. Выполнены расчеты деформаций цилиндра в его вершине ( $\theta = 0$ ). Вычисления проводились при различных числах удерживаемых мод  $N$  с целью установить сходимость численного решения с ростом  $N$ . Полученная картина изменения со временем деформаций  $\epsilon$  для толстого цилиндра при  $\theta = 0$ ,  $V = 4,1$  м/с качественно согласуется с экспериментальными данными (кривая 1 на рис. 1 — численный расчет, кривая 2 — эксперимент). Время возникновения максимальных деформаций цилиндра одно и то же, но их численные значения существенно различаются. Предполагалось, что это связано с неправильным выбором скорости цилиндра. Действительно, из экспериментов по удару горизонтальной пластиной по вершине волны [8] следует, что скорость тела при проникании его в жидкость после удара резко уменьшается до некоторого значения и определенное время остается почти постоянной. Так, в эксперименте [8] скорость до удара составляла 3,1 м/с, а после удара — 2,5 м/с, именно это значение скорости авторы [8] рекомендуют использовать для расчета напряжений в пластине при ее взаимодействии с жидкостью.

В работе [7], данные которой нами использованы, не указано, измерялась ли скорость цилиндра при его падении и последующем проникании в жидкость. В связи с этим проведено дальнейшее исследование нашей модели, а именно: численно найдена зависимость максимальных деформаций от скорости удара  $V$  при  $\theta = 0$  (кривая 1 на рис. 2 соответствует квадратичной аппроксимации  $y = 14,386x^2 + 45,139x$  с коэффициентом корреляции 0,998, кривая 2 — линейной аппроксимации  $y = 141,58x - 121,31$  с коэффициентом корреляции 0,992, точки — численный расчет). В эксперименте [7] при  $\theta = 0$  получено максимальное значение деформаций  $\epsilon = 322 \cdot 10^{-6}$ , по которому найдено значение  $V = 3,5$  м/с, соответствующее в нашей модели скорости проникания оболочки в жидкость. Дальнейшие расчеты для толстого цилиндра проводились при  $V = 3,5$  м/с.

Для  $V = 3,5$  м/с масштаб длины равен 6,3 см, потенциала скоростей —  $0,22$  м<sup>2</sup>/с, перемещений — 2,5 см, давления —  $0,03$  Н/мм<sup>2</sup>, параметр линеаризации  $\sigma = 0,40$ .

Представленные на рис. 3, а, б результаты расчетов для  $V = 3,5$  м/с при  $\theta = 0$ ;  $20^\circ$  соответственно (кривые 1) хорошо согласуются с данными эксперимента [7] (кривые 2) для первых 7–8 мс после удара, что можно считать достаточным для достоверной оценки максимальных деформаций.

На рис. 4 приведены результаты расчетов при  $V = 3,5$  м/с по приближенной модели оболочки (кривая 1), т. е. при условии выполнения гипотезы о нерастяжимости срединной линии оболочки. Модель дает близкий к эксперименту (кривая 2) результат только в первые 2,5–3 мс после удара и не дает нужных нам максимальных значений деформаций, что является ее серьезным недостатком.

Для тонкого цилиндра проведены аналогичные расчеты при  $V = 4,1$  м/с. Представленные на рис. 5 численные результаты (кривая 1) не вполне согласуются с экспери-

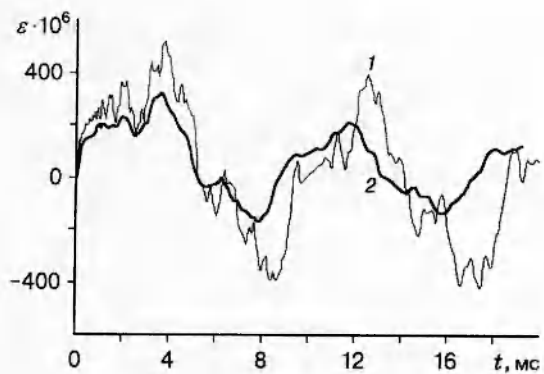


Рис. 1

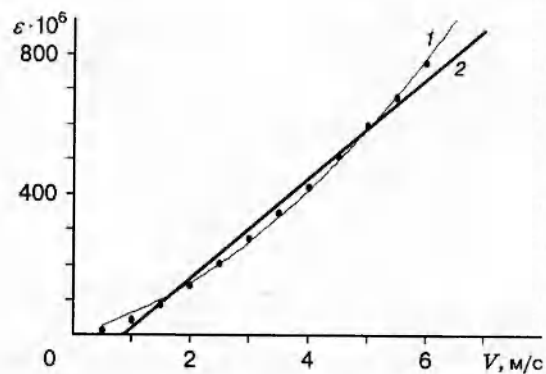


Рис. 2

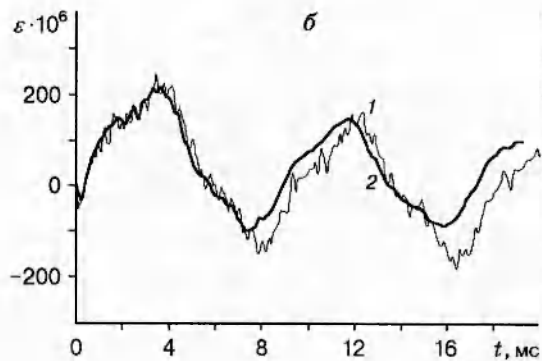
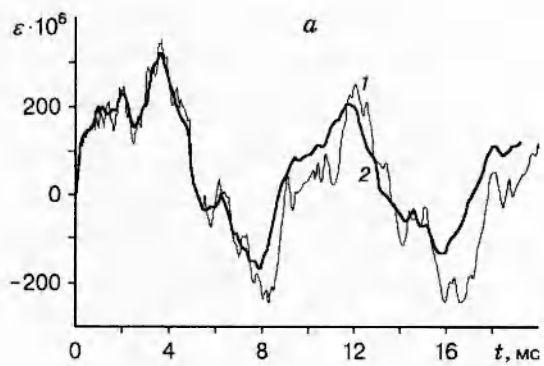


Рис. 3

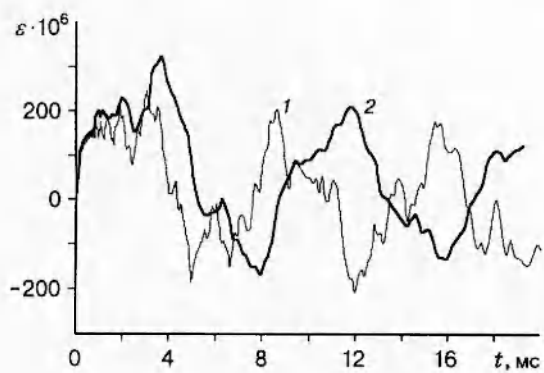


Рис. 4

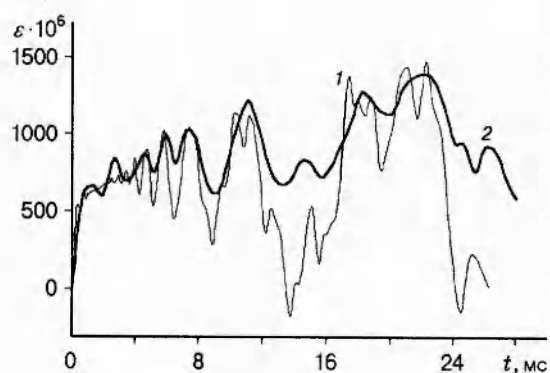


Рис. 5

ментальными (кривая 2), хотя позволяют получить общую картину изменения искомых параметров задачи.

Таким образом, используемая в настоящей работе модель гидроупругого взаимодействия круговой оболочки с жидкостью при ударе достаточно точно описывает процесс и позволяет оценить максимальные деформации оболочки. При этом число мод, которые необходимо удерживать для описания динамики оболочки, относительно невелико.

Автор выражает благодарность А. А. Коробкину за постановку задачи и внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Коробкин А. А.** Плоская задача о симметричном ударе волной по балке Эйлера // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 5. С. 134–147.
2. **Григолюк Э. И., Горшков А. Г.** Нестационарная гидроупругость оболочек. Л.: Судостроение, 1974.
3. **Тимошенко С. П.** Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959.
4. **Григолюк Э. И., Горшков А. Г.** Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. Л.: Судостроение, 1976.
5. **Korobkin A. A.** Water impact problems in ship hydrodynamics // Advances in marine hydrodynamics / Ed. by M. Ohkusu. Southampton: Computational Mech. Publ., 1996. P. 323–371.
6. **Wagner H.** Über Stoss und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten // Z. angew. Math. Mech. 1932. V. 12, h. 4. S. 193–215.
7. **Shibue T., Ito A., Nakayama E.** Structural response analysis of cylinders under water impact // Proc. of the Intern. conf. on hydroelasticity in marine technology, Trondheim, Norway, May 25–27, 1994 / Ed. board: O. Faltinsen, C. M. Larsen, T. Moan, et al. Rotterdam, 1994. P. 221–228.
8. **Faltinsen O. M., Kvålsvold J., Aarsnes J. V.** Wave impact on a horizontal elastic plate // J. Marine Sci. Technol. 1997. V. 2, N 2. P. 87–100.

*Поступила в редакцию 26/VI 1998 г.*

---