

«согласованные» разрывы, что и привело к малому числу разрывов волокон, а также почти не выделялись отдельные сечения ВК с точки зрения возможности большого «всплеска» выделенной упругой энергии. В то же время, как следует из рис. 2, в первом расчете с самого начала процесса накопления повреждений появляются опасные сечения, что, по-видимому, является отражением наличия «согласованных» разрывов волокон.

В заключение отметим, что предлагаемый метод прогноза разрушения ВК может быть использован для обработки экспериментальных данных, полученных, например, из анализа сигналов АЭ при нагружении реальных образцов ВК, поскольку амплитуда сигналов АЭ пропорциональна величине упругой энергии волокон, выделившейся при их разрывах. Локация сигналов АЭ позволяет различать сигналы, испущенные из различных участков образца [1, 2], и расчет эмпирической матрицы ковариации на значениях случайных векторов мощности по АЭ сигналам служит основой для оценки прогноза опасного сечения образца ВК.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лексовский А. М., Усмонов Г. Х., Парзуллаев Г. Х. Микротрещины, повреждаемость и разрушение композиционных материалов // Физика и механика композиционных материалов.— Л.: ЛФТИ, 1986.
2. Кривобродов В. С., Лексовский А. М. Модель динамического механизма разрушения волокнистых композиционных материалов // Там же.
3. Жданова И. П., Карпинский Д. П. Исследование эволюции накопления повреждений в волокнистом композите методом численного эксперимента // ЖТФ.— 1988.— № 11.
4. Севастьянов В. А. Ветвящиеся процессы.— М.: ГРФМЛ, 1971.
5. Баженов С. Л., Михеев П. В., Берлин Ал. Ал., Куерман А. М. О чувствительности волокнистых композиционных материалов к влиянию концентраторов напряжений // Механизмы повреждаемости и прочности гетерогенных материалов.— Л.: ЛФТИ, 1985.
6. Парзуллаев Г. Х., Абдуманов А., Лексовский А. М. К вопросу об эффекте динамической перегрузки при разрыве армирующих волокон в композиционном материале // Там же.
7. Черепанов Г. П. Механика разрушения композиционных материалов.— М.: Наука, 1983.
8. Wu F. H., Freund L. B. Deformation trapping due to thermoplastic instability in one-dimensional wave propagation // J. Mech. Phys. Sol.— 1984.— V. 32, N 2.
9. Венгцель А. Д., Фрейдлин М. И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений.— М.: Наука, 1979.
10. Смирнов П. В., Дунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики.— М.: ГРФМЛ, 1965.

г. Ростов-на-Дону

Поступила 9/XII 1988 г.,  
в окончательном варианте — 7/VII 1989 г.

УДК 539.3 : 678.067

*И. Г. Кржечковский*

### ЭФФЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ МНОГОФАЗНЫХ МАТРИЧНЫХ КОМПОЗИТОВ

Вопросу расчета эффективных характеристик гранулированных матричных композитных материалов посвящена обширная литература [1—3]. Однако приведенные в ней композиты, как правило, двухфазные, т. е. состоящие из матрицы с включениями, обладающими одинаковыми физическими и геометрическими характеристиками. Полидисперсная модель, предложенная Хашином [4], обладает рядом существенных недочетов, делающих ее малоприменимой для расчета реальных композитов: во-первых, она неприменима для многофазных смесей, фракции которых различаются по плотности; во-вторых, в ней не учтена геометрия наполнителя и связанная с ней упаковка его в матрице.

В настоящей работе строится теория расчета эффективных модулей матричных гранулированных композитов, лишенная этих недостатков. В основу ее положены теория композитных сред, предложенная Хиллом [5], и обобщенное сингулярное приближение теории случайных функций Шермергора [1]. В качестве приложения

полученных результатов рассмотрен вопрос об определении упругих модулей сферо-пластиков-композигов, состоящих из полимерной матрицы и внедренных в нее полных сферических включений.

Исследуется среда, состоящая из однородной и изотропной матрицы и внедренных в нее частиц сферической или эллипсоидальной формы, расположенных и ориентированных случайным образом. Предполагается, что наполнитель состоит из  $n - 1$  изотропных фаз, различающихся между собой по плотности, упругим характеристикам, а в случае сфер — по наружным диаметрам. Считается известной при заданном объемном содержании включений в композите  $v_s$  гистограмма распределения фаз по объемным содержаниям в наполнителе  $v_s^{(i)}$ , определяемая вектор-функцией

$$(1) \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}); \quad \sum_{i=1}^{n-1} p_i = 1$$

так, что  $v_s^{(i)} = p_i v_s$ .

Если составляющие наполнителя различаются по плотности, то задается вектор-функция распределения плотностей фаз

$$(2) \quad \rho_s = \rho_s(\rho_s^{(1)}, \rho_s^{(2)}, \dots, \rho_s^{(n-1)}).$$

В случае когда наполнитель сферический, дополнительно должна быть известна гистограмма распределения фракций по наружным диаметрам

$$(3) \quad \mathbf{d} = \mathbf{d}(d_1, d_2, \dots, d_{n-1}).$$

Выражения (1)–(3) описывают структуру и геометрию наполнителя матричного гранулированного композита.

Тензор эффективных модулей многофазной нематричной смеси, согласно обобщенному сингулярному приближению [1], находится при помощи одного из эквивалентных выражений

$$(4) \quad (L_* + L_0)^{-1} = \sum_{i=1}^n v_s^{(i)} (L_s^{(i)} + L_0)^{-1}; \quad \sum_{i=1}^n v_s^{(i)} = 1$$

или

$$\bar{L}_* = \left( \sum_{i=1}^n v_s^{(i)} (\bar{L}_s^{(i)} + L_0)^{-1} \right)^{-1} - L_0,$$

где  $L_0$  — изотропный тензор, зависящий от упругих модулей тела сравнения (тензор Хилла [5]). Для матричных композитов его свойства определяются упругими характеристиками матрицы ( $L_0 = L_0^{(m)}$  в смысле равенства объемных и девиаторных составляющих тензоров).

Умножим левую и правую части (4) на изотропный тензор  $(L_m + L_0^{(m)})^{-1}$  ( $L_m$  — тензор упругих модулей матрицы). Получим

$$(5) \quad L_* = L_m + \left( \sum_{i=1}^{n-1} (L_s^{(i)} - L_m) v_s^{(i)} \alpha_s^{(i)} \right) \left( v_m I + \sum_{i=1}^{n-1} v_s^{(i)} \alpha_s^{(i)} \right)^{-1},$$

где  $I$  — единичный тензор четвертого ранга;  $\alpha_s^{(i)} = (L_0^{(m)} + L_m) \times (L_s^{(i)} + L_0^{(m)})^{-1}$  — тензорный коэффициент концентрации деформаций на единичном включении из  $i$ -й фракции, помещенной в бесконечный массив матрицы;  $L_s^{(i)}$  — тензор упругих модулей  $i$ -й фазы наполнителя. Здесь и далее под произведением тензоров понимается их свертка по внутренним индексам.

Если ввести в рассмотрение тензорный коэффициент концентрации напряжений на единичном включении в бесконечном массиве матрицы  $\beta_s^{(i)}$ , связанный с  $\alpha_s^{(i)}$  зависимостью [6]  $\beta_s^{(i)} = L_s^{(i)} \alpha_s^{(i)} L_m^{-1}$ , то (5) может быть приведено к виду

$$(6) \quad L_* = L_m \left( v_m I + \sum_{i=1}^{n-1} v_s^{(i)} \beta_s^{(i)} \right) \left( v_m I + \sum_{i=1}^{n-1} v_s^{(i)} \alpha_s^{(i)} \right)^{-1}.$$

Формулами (5), (6) дается решение задачи об определении эффективных модулей упругости многофазного матричного композита без учета геометрии фаз.

Из теории композитных сред, разработанной Хиллом [5],

$$(7) \quad L_* = \sum_{i=1}^n v_s^{(i)} A_s^{(i)} L_s^{(i)}, \quad \sum_{i=1}^n A_s^{(i)} v_s^{(i)} = I.$$

где  $A_s^{(i)}$  — тензор концентрации деформаций на включении из  $i$ -й фракции в композите. Придавая одной из фаз свойства матрицы, с учетом второй зависимости в (7) запишем

$$(8) \quad L_* = L_m + \sum_{i=1}^{n-1} v_s^{(i)} (L_s^{(i)} - L_m) A_s^{(i)}.$$

Сравнивая (5), (8), находим

$$(9) \quad A_s^{(i)} = \alpha_s^{(i)} \left( v_m I + \sum_{i=1}^{n-1} v_s^{(i)} \alpha_s^{(i)} \right)^{-1}.$$

Из (9) следует, что тензор концентрации деформаций на включении из  $i$ -й фракции может быть представлен в виде свертки двух тензоров, один из которых характеризует поле деформаций единичного включения в бесконечной матрице, а другой — искажение этого поля, вызванное другими включениями.

Если учесть зависимость, полученную в [7],

$$(10) \quad A_s^{(i)} L_s^{(i)} = B_s^{(i)} L_*,$$

где  $B_s^{(i)}$  — тензор концентрации напряжений на включении в композите, значение которого с учетом (6), (10) будет

$$B_s^{(i)} = \beta_s^{(i)} \left( v_m I + \sum_{i=1}^{n-1} v_s^{(i)} \beta_s^{(i)} \right)^{-1},$$

т. е. структуры тензоров  $B_s^{(i)}$  и  $A_s^{(i)}$  совпадают.

Выражения для модулей объемного сжатия композита  $K_*$  и сдвига  $G_*$  находим из (6), разделяя входящие в него тензоры на объемные и девиаторные составляющие:

$$(11) \quad \frac{K_*}{K_m} = \frac{v_m + v_s \langle \beta_s^{(v)} \rangle}{v_m + v_s \langle \alpha_s^{(v)} \rangle}, \quad \frac{G_*}{G_m} = \frac{v_m + v_s \langle \beta_s^{(d)} \rangle}{v_m + v_s \langle \alpha_s^{(d)} \rangle};$$

$$(12) \quad \langle \beta_s^{(v)} \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_i \xi_i (1 + \rho)}{\xi_i \rho + 1}; \quad \langle \alpha_s^{(v)} \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_i (1 + \rho)}{\xi_i \rho + 1};$$

$$\langle \beta_s^{(d)} \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_i \xi_{1i} (1 + \rho_1)}{\xi_{1i} \rho_1 + 1}; \quad \langle \alpha_s^{(d)} \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_i (1 + \rho_1)}{\xi_{1i} \rho_1 + 1};$$

$$\rho = \frac{3K_m}{4G_m}; \quad \rho_1 = \frac{2\rho + 3}{3\rho + 2}; \quad \xi_i = \frac{K_s^{(i)}}{K_m}; \quad \xi_{1i} = \frac{G_s^{(i)}}{G_m};$$

$K_m, G_m$  — модули объемной упругости и сдвига матрицы;  $K_s^{(i)}, G_s^{(i)}$  — соответствующие упругие модули  $i$ -й фракции.

Если наполнитель — полые стеклянные микросферы, то в (12) следует принять [8]

$$K_s^{(i)} = \frac{K_c \psi^{(i)}}{1 + \rho_0 (1 - \psi^{(i)})}; \quad G_s^{(i)} = \frac{3(1 - \nu_s)}{2(1 + \nu_s)} \frac{K_s^{(i)}}{K_m}.$$

где  $K_c$  — модуль объемной упругости материала микросфер;  $\psi^{(i)} = \rho_s^{(i)} / \rho_c$ ;  $\rho_c$  — плотность материала микросфер;  $\rho_0 = (1 + \nu_c) / (2(1 - 2\nu_c))$ ;

$\nu_c$  — коэффициент Пуассона стекла;  $\nu_s$  — приведенный коэффициент поперечной деформации поллой сферы. Для тонких сферических оболочек его приближенное значение [8]  $\nu_s = (3 + 5\nu_c)/(11 + 5\nu_c)$ . Точное значение  $\nu_s$  для поллой сферы произвольной толщины дано также в [8].

Дальнейшее уточнение расчета эффективных модулей композита, содержащего сферические включения различных диаметров и плотностей, может быть построено на основании модели, учитывающей геометрию упаковки наполнителя в матрице.

Предлагаемая ниже модель вытекает из особенностей технологии производства высоконаполненных полимерных композитов методом пропитки [9].

Допустим, что наполнитель, состоящий из сферических включений разных диаметров и плотностей, для которого известны вектор-функции распределений  $\mathbf{d}$  и  $\mathbf{p}$ , плотно упакован, как изображено на рис. 1, а. При введении в пространство между включениями матрицы происходит их взаимное раздвижение и образуется структура, показанная на рис. 1, б.

Окружим каждое включение сферическим слоем матрицы таким образом, что вновь образованные составные двухслойные ячейки имеют распределение наружных диаметров  $\mathbf{d}^{(*)} = \mathbf{d}^{(*)}(d_1^{(*)}, d_2^{(*)}, \dots, d_{n-1}^{(*)})$ , которое подобно  $\mathbf{d}$  так, что  $d_i/d_i^{(*)} = \lambda$ , где  $\lambda$  — параметр подобия, подлежащий определению.

В силу принятого предположения о подобии  $\mathbf{d}$  и  $\mathbf{d}^{(*)}$  коэффициент упаковки составных сферических ячеек  $D$  будет равен коэффициенту упаковки наполнителя в уплотненном состоянии. Его значение, зависящее от  $\mathbf{d}$  и  $\mathbf{p}$ , может быть найдено из экспериментальных работ [10, 11] или рассчитано приближенно теоретически для многофазных смесей [12].

Далее необходимо построить вектор-функцию распределения составных ячеек по объемным содержаниям в смеси

$$(13) \quad \mathbf{v}_c = \mathbf{v}_c(v_c^{(1)}, v_c^{(2)}, \dots, v_c^{(n-1)}), \quad \sum_{i=1}^{n-1} v_c^{(i)} = D.$$

Составляющие векторов  $\mathbf{v}_c$  и  $\mathbf{p}$  связаны зависимостью

$$(14) \quad v_c^{(i)} = p_i v_s / \lambda^3.$$

Подстановка (14) в (13) приводит к значению параметра  $\lambda$  подобия

$$(15) \quad \lambda = \sqrt[3]{v_s / D}.$$

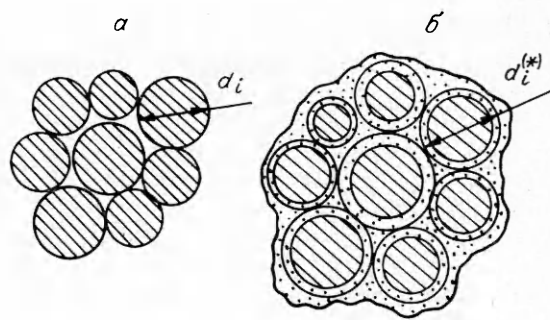
Примечательно, что выражение для  $\lambda$ , справедливое для правильных упаковок сфер одинакового размера, в принятой модели сохраняет свой вид для случайной упаковки сферических частиц с произвольными диаметрами. Остается доказать, что при найденном  $\lambda$  плотности композита и модели равны.

Плотность многофазного матричного композита

$$(16) \quad \rho_* = \sum_{i=1}^{n-1} \rho_s^{(i)} v_s^{(i)} + \rho_m v_m,$$

где  $\rho_m$  — плотность матрицы. Плотность модели

$$(17) \quad \rho_{\text{мод}} = \sum_{i=1}^{n-1} \rho_0^{(i)} v_c^{(i)} + \rho_m (1 - D)$$



Р и с. 1

$(\rho_0^{(i)} = \rho_s^{(i)} \lambda^3 + \rho_m (1 - \lambda^3))$  — кажущаяся плотность составной ячейки). Подставляя  $\rho_0^{(i)}$  в (17), после несложных преобразований приходим к выражению (16) для плотности композита.

Порядок вычисления эффективных модулей матричной смеси, имитируемой второй моделью, следующий. Вначале находятся приведенные упругие характеристики составных сферических ячеек, для чего можно воспользоваться концентрически-сферической моделью [4].

В результате исходный  $n$ -фазный композит заменяется также  $n$ -фазным, но с объемным содержанием составных ячеек  $D$ , а матрицы — 1 —  $D$ . Для вычисления искомых модулей такого композита удобно воспользоваться методом самосогласования [13]. Правомерность вышеприведенного подхода для двухфазной матричной смеси показана в [14].

С учетом (5) и результатов [13], окончательные выражения для эффективных модулей  $n$ -фазной матричной смеси найдены путем совместного применения метода самосогласования и концентрически-сферической модели в виде

$$(18) \quad \begin{aligned} \bar{K}_* &= 1 + \frac{D \sum_{i=1}^{n-1} p_i \alpha_{*(v)}^{(i)} (\xi_i^{(*)} - 1)}{1 - D + D \sum_{i=1}^{n-1} p_i \alpha_{*(v)}^{(i)}}; \\ \bar{G}_* &= 1 + \frac{D \sum_{i=1}^{n-1} p_i \alpha_{*(d)}^{(i)} (\xi_{1i}^{(*)} - 1)}{1 - D + D \sum_{i=1}^{n-1} p_i \alpha_{*(d)}^{(i)}}, \end{aligned}$$

где  $\xi_i^{(*)} = \bar{K}_s^{(i)} / K_m$ ;  $\xi_{1i}^{(*)} = \bar{G}_s^{(i)} / G_m$ ;  $\alpha_{*(v)}^{(i)} = (\bar{K}_* + \varphi) / (\bar{K}_* + \xi_i^{(*)} \varphi)$ ;

$$\alpha_{*(d)}^{(i)} = \frac{\bar{G}_* + \varphi_1}{\bar{G}_* + \xi_{1i}^{(*)} \varphi_1}; \quad \bar{K}_* = \frac{K_*}{K_m}; \quad \bar{G}_* = \frac{G_*}{G_m}; \quad \varphi = \frac{3K_*}{4G_*}; \quad \varphi_1 = \frac{2\varphi + 3}{3\varphi + 2};$$

$\bar{K}_s^{(i)}$ ,  $\bar{G}_s^{(i)}$  — модули объемной упругости и сдвига составной сферической ячейки из  $i$ -й фракции наполнителя;

$$\begin{aligned} \frac{\bar{K}_s^{(i)}}{K_m} &= 1 + \frac{\lambda^3 (\xi_i - 1) (1 + \rho)}{(1 - \lambda^3) (\xi_i - 1) \rho + 1 + \rho}; \\ \frac{\bar{G}_s^{(i)}}{G_m} &= 1 + \frac{\lambda^3 (\xi_{1i} - 1) (1 + \rho_1)}{(1 - \lambda^3) (\xi_{1i} - 1) \rho_1 + 1 + \rho_1}. \end{aligned}$$

Искомые значения  $K_*$  и  $G_*$  легко определяются из системы нелинейных алгебраических уравнений (18) методом последовательных приближений.

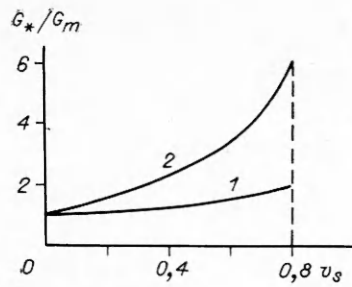
В заключение рассмотрим два примера применения полученных решений.

1. Найдем модуль сдвига смеси жестких сферических включений в несжимаемой матрице при наличии пор. Особенностью такой смеси является неопределенность как верхней, так и нижней оценок вилок Хилла и Хашина — Штрикмана. Состав наполнителя: относительный объем включений  $p_1 = 0,7$ , пор —  $p_2 = 0,3$ . Отношение диаметра включений к диаметру пор равно 7. Для него коэффициент упаковки  $D = 0,8$ , согласно [11].

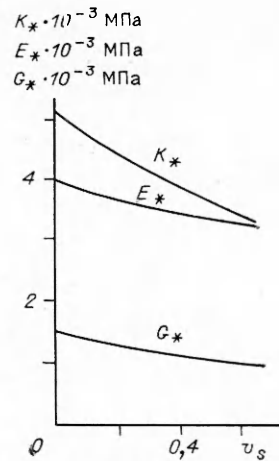
В случае неучета геометрии упаковки по (11)

$$(19) \quad \frac{G_*}{G_m} = \frac{v_m + (5/2) p_1 v_s}{v_m + (5/3) p_2 v_s}.$$

Результаты расчета приведены на рис. 2. Кривая 1 построена по зависимости (19), а 2 — по формулам (18). Как видно, учет упаковки включений в матрице для высоконаполненных смесей при больших флуктуациях упругих модулей компонентов обязателен.



Р и с. 2



Р и с. 3

2. Рассчитаем эффективные модули сферопластика, имеющего следующие исходные данные. Матрица — эпоксидное связующее:  $K_m = 5,12 \cdot 10^3$  МПа,  $\nu_m = 0,37$ . Наполнитель — полые стеклянные микросферы, состав которых характеризуется распределениями:  $p = 0,015; 0,060; 0,176; 0,178; 0,251; 0,276; 0,046$ ,  $\rho_s = 0,44; 0,35; 0,24; 0,19; 0,18; 0,18; 0,16$  (г/см<sup>3</sup>),  $d = 15, 25, 33, 40, 48, 58, 68$  (мкм),  $K_c = 4,2 \cdot 10^3$  МПа,  $\nu_c = 0,21$ ,  $D = 0,72$ ,  $\rho_m = 1,2$  г/см<sup>3</sup>,  $\rho_c = 2,4$  г/см<sup>3</sup>.

Значения модулей объемного сжатия  $\bar{K}_*$ , сдвига  $\bar{G}_*$  и продольной упругости  $\bar{E}_*$  композита представлены на рис. 3.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред.— М.: Наука, 1977.
2. Сендецкий Дж. Упругие свойства композитов // Композиционные материалы: В 8 т.— М.: Мир, 1978.— Т. 2.
3. Кристенсен Р. Введение в механику композитов.— М.: Мир, 1982.
4. Хашина Ц. Упругие модули неоднородных материалов // Прикл. механика (США).— 1962.— № 1.
5. Хилл Р. Упругие свойства составных сред: некоторые теоретические принципы // Механика.— 1964.— № 5(87).
6. Кржечковский П. Г., Бурдун Е. Т. К расчету упругих модулей неоднородных материалов // Строительная механика корабля.— Николаев: НКИ, 1983.
7. Laws N. On the thermostatics of composite materials // J. Mech. Phys. Solids.— 1973.— V. 21, N 1.
8. Кржечковский П. Г., Павлицев В. И. Приведенные упругие характеристики полых сферических наполнителей // Строительная механика корабля.— Николаев: НКИ, 1986.
9. Берлин А. А., Шутов Ф. А. Упрочненные газонаполненные пластмассы.— М.: Химия, 1980.
10. McGeary R. K. Mechanical packing of spherical particles // J. Amer. Soc.— 1931.— V. 44, N 10.
11. Jagazunis, Cornell, Winter. Dence random packing of binary mixtures of spheres // Nature.— 1965.— N 8.
12. Wienckowski A., Strek F. Porowatosti rial sypkich mieznaniny dwuskładnikowe // Chemia stosowana.— 1966.— V. 18, N 43.
13. Кржечковский П. Г. О методе самосогласования и его связи с граничными оценками Хашина — Штрикмана вычисления эффективных модулей неоднородных материалов // Динамика и прочность судовых машин.— Николаев: НКИ, 1985.
14. Кржечковский П. Г. Применение метода самосогласования для расчета упругих модулей материалов, содержащих поры или жесткие включения // Строительная механика корабля.— Николаев: НКИ, 1986.

г. Николаев

Поступила 13/III 1989 г.,  
в окончательном варианте — 20/VII 1989 г.