

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ПРОВОДЯЩЕГО ВЯЗКОГО  
ГАЗА ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО  
И ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЕЙ

В. П. Шидловский

(Москва)

Рассматриваются задачи об установившемся ламинарном течении газа между двумя бесконечно длинными соосными цилиндрами, равномерно вращающимися с различными угловыми скоростями  $\omega_0$  и  $\omega_1$ . Исследование такого течения без учета электромагнитных воздействий проводилось в работах [1,2]. Если газ обладает отличной от нуля электропроводностью, а на течение накладываются электрическое и магнитное поля, то картина движения может существенно измениться. Здесь рассматриваются два варианта расположения векторов электрического и магнитного полей,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . В первом варианте электрическое поле является радиальным, а магнитное поле осевым; во втором варианте имеются осевое электрическое поле и кольцевое магнитное поле, вектор которого повсюду параллелен вектору скорости течения. В обоих случаях предполагается, что все характерные параметры поля и потока зависят только от радиальной координаты  $r$ . Кроме того, предполагается, что вязкость газа  $\mu$  и его электропроводность  $\sigma$  являются степенными функциями теплосодержания  $i$ , а уравнение состояния газа записывается в форме  $p/\rho = f(i)$ . Как будет показано, в процессе решения поставленных задач могут быть получены первые интегралы основных уравнений, а для получения окончательного точного решения нужно численно проинтегрировать несложную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. При определенных условиях данные задачи допускают также аналитические решения, на основе которых рассчитано несколько примеров.

1. Исходными дифференциальными уравнениями обеих задач будут составленные с учетом влияния полей уравнения движения и энергии, уравнения Максвелла, а также уравнения неразрывности и состояния. Приводим эти уравнения, записанные в векторной форме, в системе единиц MKS, при дополнительном предположении о малости скорости течения по сравнению со скоростью света

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu_e (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} = -\nabla \left( p + \frac{1}{2} \mu_e H^2 \right) + \Delta \tau_{jk}$$

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) i = (\mathbf{u} \cdot \nabla) p + \frac{1}{\rho} \nabla (\mu \nabla i) + \tau_{jk} \nabla \mathbf{u} + (\nabla \times \mathbf{H}) \left( \frac{\Delta \times \mathbf{H}}{\sigma} - \mu_e \mathbf{u} \times \mathbf{H} \right) \quad (1.1)$$

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H}) - \nabla \times \left[ \frac{1}{\mu_e \sigma} (\nabla \times \mathbf{H}) \right] = 0, \quad \nabla (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad p = \rho f(i)$$

$$(\mu_e = \text{const}, \quad P = \text{const})$$

Здесь  $\mathbf{u}$  — вектор скорости течения,  $\mu_e$  — коэффициент магнитной проницаемости,  $\tau_{jk}$  — тензор вязких напряжений,  $P$  — число Прандтля. Вектор электрического поля  $\mathbf{E}$  из этих уравнений исключен. Граничные условия будут сформулированы при решении конкретных задач.

Приступая к решению уравнений (1.1), целесообразно использовать цилиндрическую систему координат  $(r, z, \theta)$ ; в силу симметрии движения все производные по  $\theta$  полагаются равными нулю. В случае бесконечно длинных цилиндров производные по  $z$  также можно приравнять нулю, и единственной независимой переменной остается радиальная координата  $r$ .

Введем безразмерные переменные, обозначаемые звездочкой (индексом 0 будем обозначать размерные параметры при  $r = R$ , т. е. на поверхности внутреннего цилиндра)

$$p = p_* \rho_0 U^2, \quad r = r_* R, \quad u = \omega_* r_* U \quad (U = \omega_0 R)$$

$$H = H_* H_0, \quad \mu = \mu_* \mu_0, \quad i = i_* i_0, \quad \sigma = \sigma_* \sigma_0, \quad \rho = \rho_* \rho_0$$

Введем также  $N = U / \sqrt{i_0}$  — число, связанное с числом Маха,  $R_h = UR / \nu_0$  — гидродинамическое число Рейнольдса,  $R_m = \mu_e \sigma UR$  — магнитное число Рейнольдса,  $M_m = (U / H_0) \sqrt{\rho_0 / \mu_e}$  — магнитное число Маха.

2. Рассмотрим случай осевого магнитного поля. Очевидно, что в обоих случаях можно пренебречь всеми составляющими скорости, кроме окружной, и уравнение неразрывности удовлетворяется автоматически. Остальные уравнения, получаемые из системы (1.1) в случае осевого магнитного поля ( $H \equiv H_z$ ), приводятся ниже, причем звездочки у обозначений безразмерных величин опускаются

$$\frac{dp}{dr} + M_m^{-2} H \frac{dH}{dr} - \frac{p}{j(i)} \omega^2 r = 0, \quad \frac{d}{dr} \left( \mu r^3 \frac{d\omega}{dr} \right) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dr} \left( r \mu \frac{di}{dr} \right) + P N^2 r^3 \mu \left( \frac{d\omega}{dr} \right)^2 + P \frac{N^2}{M_m^2} \frac{R_h}{R_m} \frac{r}{\sigma} \left( \frac{dH}{dr} \right)^2 = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{r}{\sigma} \frac{dH}{dr} \right) = 0 \quad (2.3)$$

Второе и четвертое уравнения этой системы немедленно дают первые интегралы

$$\mu r^3 \frac{d\omega}{dr} = a, \quad \frac{r}{\sigma} \frac{dH}{dr} = b \quad (a, b - \text{const}), \quad (2.4)$$

При учете соотношений (2.4) уравнение (2.2) также дает первый интеграл

$$r \mu \frac{di}{dr} + a P N^2 \omega + b P \frac{N^2}{M_m^2} \frac{R_h}{R_m} H = d \quad (2.5)$$

Полученные первые интегралы еще не дают полного решения исследуемой задачи, так как согласно сделанному предположению величины  $\mu$  и  $\sigma$  будут известными функциями теплосодержания  $i$ . Однако эти интегралы позволяют сделать ряд приближенных количественных оценок и определить качественно тенденции изменения основных параметров течения и теплопередачи в зависимости от характеристик магнитного поля. Для точного решения задачи необходимо конкретизировать форму зависимости вязкости и электропроводности газа от его теплосодержания.

Пусть эта зависимость дается формулами

$$\mu = i^n, \quad \sigma = i^m \quad (2.6)$$

при постоянных значениях  $n$  и  $m$ . Введем новые переменные

$$t = \ln r, \quad y = i^{n+1}$$

Тогда, используя соотношения (2.4) и (2.6), можем преобразовать уравнение (2.2) к виду

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + A^2 y^{-\frac{n}{n+1}} e^{-2t} + B^2 y^{\frac{m}{n+1}} = 0 \quad (2.7)$$

$$A^2 = a^2 P (n+1) N^2, \quad B^2 = b^2 P (n+1) \frac{N^2}{M_m^2} \frac{R_h}{R_m}$$

Если теплосодержание каждого из цилиндров поддерживается на постоянном уровне, то постановка граничных условий для уравнения (2.7) не вызывает затруднений. То же самое относится и к случаю, когда на поверхности цилиндра задается коэффициент теплопередачи.

Определив зависимость  $y(t)$ , можно проинтегрировать соотношения (2.4), найдя при их помощи  $\omega(t)$  и  $H(t)$ . Решение задачи заканчивается определением давления  $p(t)$ , для чего используется первое уравнение (2.1).

В большинстве случаев граничные условия не дают возможности определить постоянные  $a$  и  $b$  до интегрирования основных уравнений. Однако нужные значения довольно быстро определяются методом последовательных приближений.

3. Рассмотрим случай кольцевого магнитного поля ( $H \equiv H_0$ ). В этом случае получим из системы (1.1) следующую безразмерную форму уравнений:

$$\frac{dp}{dr} + M_m^{-2} \frac{H}{r} \frac{d(rH)}{dr} - \frac{p}{f(i)} \omega^2 r = 0, \quad \frac{d}{dr} \left( \mu r^3 \frac{d\omega}{dr} \right) = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{d}{dr} \left( r\mu \frac{di}{dr} \right) + PN^2 r^3 \mu \left( \frac{d\omega}{dr} \right)^2 + P \frac{N^2}{M_m^2} \frac{R_h}{R_m} \frac{1}{r\sigma} \left[ \frac{d(rH)}{dr} \right]^2 = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r\sigma} \frac{d(rH)}{dr} \right] = 0 \quad (3.3)$$

Как и в предыдущем случае, здесь легко получаются первые интегралы

$$\mu r^3 \frac{d\omega}{dr} = a', \quad \frac{1}{r\sigma} \frac{d(rH)}{dr} = b' \quad (3.4)$$

$$r\mu \frac{di}{dr} + a' PN^2 \omega + b' P \frac{N^2}{M_m^2} \frac{R_h}{R_m} rH = d' \quad (3.5)$$

Учитывая формулы (2.6) и используя переменные  $y$  и  $t$ , вместо уравнения (2.7) для этого случая получим

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + A'^2 y^{-\frac{n}{n+1}} e^{-2t} + B'^2 y^{\frac{m}{n+1}} e^{2t} = 0 \quad (3.6)$$

$$A'^2 = a'^2 P (n+1) N^2, \quad B'^2 = b'^2 P (n+1) \frac{N^2}{M_m^2} \frac{R_h}{R_m}$$

Процесс решения задачи в этом случае проводится совершенно аналогично предыдущему случаю.

4. Если величина  $\varepsilon = M_m^2 R_m / R_h$  будет малой, то решение рассматриваемых задач существенно упрощается. При этом условии можно пренебречь вязкими диссипативными членами в уравнениях (2.2) и (3.2), а в уравнениях (2.7) и (3.6) положить, соответственно,  $A = 0$  и  $A' = 0$ . Если, кроме того,  $m = n + 1$  (что может быть, например, при  $n = 1/2$  и  $m = 3/2$ ), упомянутые уравнения становятся линейными и общее решение уравнения (2.7) записывается в виде

$$y = C_1 \sin Bt + C_2 \cos Bt \quad (4.1)$$

【После этого, интегрируя второе уравнение (2.4), получим

$$H = \frac{b}{B} (C_2 \sin Bt - C_1 \cos Bt) + C_3 \quad (4.2)$$

Пусть поверхность наружного цилиндра характеризуется значением  $t = t_1$ . Тогда граничные условия для функций  $y$  и  $H$  могут быть представлены в форме

$$y(0) = 1, \quad y(t_1) = y_1, \quad H(0) = 1, \quad H(t_1) = H_1 \quad (4.3)$$

Эти условия дают возможность определить постоянные  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  и  $b$ . После этого угловая скорость  $\omega$  находится из уравнения (2.4) путем квадратуры

$$\omega = a \int_0^t (C_1 \sin Bt + C_2 \cos Bt) - \frac{n}{n+1} e^{-2t} dt + 1 \quad (4.4)$$

где постоянная  $a$  определяется из условия  $\omega(t_1) = \omega_1$ .

Переходя к случаю кольцевого магнитного поля, из уравнения (3.2) в этих условиях получим

$$r \frac{d}{dr} \left( r \frac{dy}{dr} \right) + r^2 B'^2 y = 0 \quad (4.5)$$

Это — уравнение Бесселя нулевого порядка, общее решение которого имеет вид

$$y = C_1' J_0(B'r) + C_2' Y_0(B'r) \quad (4.6)$$

Вслед за этим интегрирование второго уравнения (3.4) дает

$$H = \frac{b'}{B'} [C_1' J_1(B'r) + C_2' Y_1(B'r)] + \frac{C_3'}{r} \quad (4.7)$$

Для определения постоянных  $C_1'$ ,  $C_2'$ ,  $C_3'$  и  $b'$  в этом случае служат граничные условия

$$y(1) = 1, \quad y(r_1) = y_1, \quad H(1) = 1, \quad H(r_1) = H_1 \quad (4.8)$$

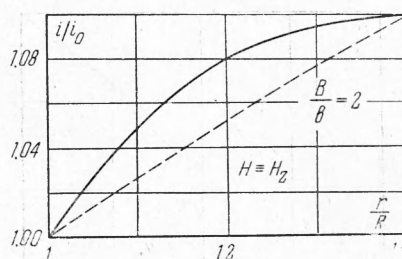
Угловая скорость  $\omega$  определяется затем при помощи квадратуры

$$\omega = a' \int_1^{r_1} [C_1' J_0(B'r) + C_2' Y_0(B'r)] - \frac{n}{n+1} r^{-2} dr + 1 \quad (4.9)$$

причем для определения  $a'$  служит условие  $\omega(r_1) = \omega_1$ .

5. На основе приведенных выше приближенных формул были проведены некоторые расчеты, позволяющие установить характер влияния магнитного и электрического полей на течение газа. Расчеты проводились при отношении радиусов цилиндров  $R_1 / R = 1.4$  и при показателях степени  $n = 1/2$ ,  $m = 3/2$ . Кроме того, во всех случаях было принято  $\omega_1 / \omega_0 = 1.5$ ,  $i_1 / i_0 = 1.4$ ,  $H_1 / H_0 = 1.3$ . Первый пример относился к варианту осевого магнитного поля, причем величина

$$\frac{B}{b} = \frac{3}{2} P \frac{N^2}{M_m^2} \frac{R_h}{R_m}$$



Фиг. 1

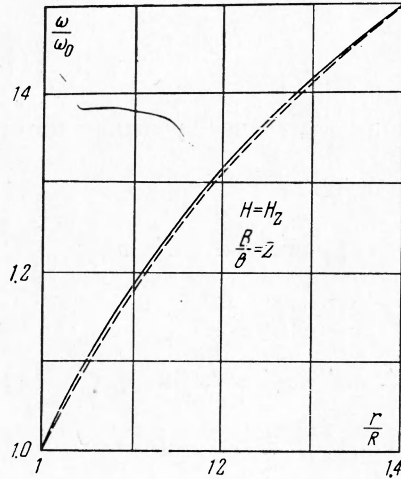
принималась равной двум. Графики, характеризующие профили теплосодержания и угловой скорости, даются на фиг. 1 и 2. Пунктирные линии здесь и в дальнейшем соответствуют случаю отсутствия магнитного поля. Второй и третий примеры относятся к варианту кольцевого магнитного поля при значениях  $B' / b' = 2$  и  $B' / b' = 4$ . Соответствующие графики даются на фиг. 3 и 4.

Интересно получить также профили давления, что связано с численным интегрированием первых уравнений (2.1) и (3.1). Однако нетрудно показать, что, если скорость течения невелика по сравнению как со скоростью звука, так и со скоростью распространения альфвеновских волн

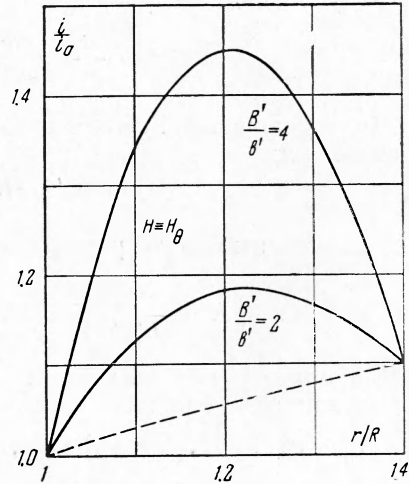
(т. е., если  $N < 1$ ,  $M_m < 1$ ), то последние члены упомянутых уравнений будут малы и для приближенных оценок ими можно пренебречь. Чтобы проверить это положение, можно взять случай совершенного газа, когда

$$f(i) = \frac{\kappa - 1}{\kappa} N^{-2} i$$

и последние члены уравнений (2.1) и (3.1) содержат множитель  $N^2$ .



Фиг. 2

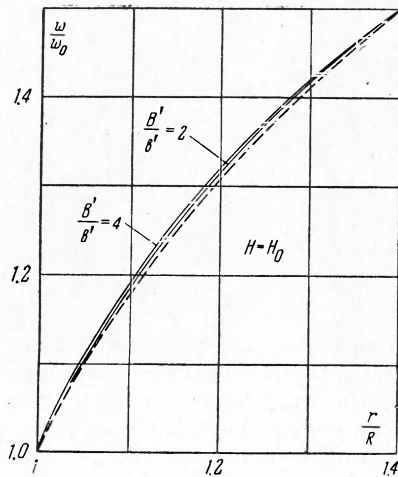


Фиг. 3

Таким образом, полагая  $N^2 \rightarrow 0$ , получим в случае осевого магнитного поля

$$M_m^2 p = C + \frac{1}{2} H^2 \quad (5.1)$$

Здесь  $C$  — произвольная постоянная. Аналогично этому в случае кольцевого магнитного поля получим



Фиг. 4

$$M_m^2 p = C + \frac{1}{2} \left(\frac{b'}{B'}\right)^2 y^2 - b' C_3' [C_1' J_0(B'r) + C_2' Y_0(B'r)] \quad (5.2)$$

где  $J_0$  и  $Y_0$  — интегральные функции Бесселя нулевого порядка. Рассчитанные таким способом профили давления

$$p^* = \frac{p - p_0}{\rho_0 C_A^2}$$

где  $C_A$  — скорость распространения альфвеновских волн, показаны на фиг. 5. Цифрой 1 обозначена кривая для  $H \equiv H_z$ ,  $B/b = 2$ ; цифрой 2 — для  $H \equiv H_\theta$ ,  $B'/b' = 2$ ; цифрой 3 — для  $H \equiv H_\theta$ ,  $B'/b' = 4$ . Напомним, что при отсутствии магнитного поля такая приближенная оценка дала бы  $\Delta p = 0$ .

Не представляет труда расчет момента сил трения, действующих, например на единицу осевой длины внутреннего цилиндра.

В общем случае он выражается, как

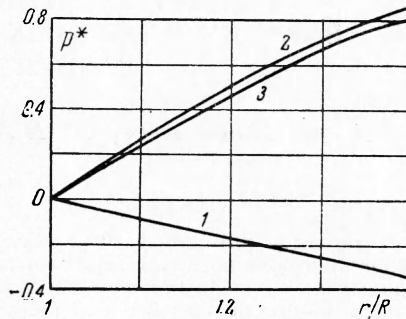
$$M_{\text{тр}} = 2\pi R^2 \mu_0 \omega_0 \left( \frac{d\omega}{dr} \right)_0 \quad (5.3)$$

Значение  $(d\omega/dr)_0 = a$  (или  $a'$ ) изменяется в зависимости от величины и характера магнитного поля. Так в отсутствие магнитного поля  $a = 2.086$ , при  $H \equiv H_z$ ,  $B/b = 2$  имеем  $a = 2.112$ ; при  $H \equiv H_0$  случаю  $B'/b' = 2$  соответствует значение  $a' = 2.169$ , а случаю  $B'/b' = 4$  — значение  $a' = 2.321$ .

Для проверки пригодности примененных здесь приближенных формул были проведены также численные расчеты на основе точных уравнений (с иными граничными условиями).

При этой проверке значения показателей степени были взяты равными:  $n = 0.25$ ,  $m = 4.0$ . Проверка показала, что при сравнительно небольших перепадах теплосодержания ( $i_1/i_0 \leq 1.5$ ) приближенные формулы дают правильную общую картину явления, а количественная ошибка при расчете разобранных примеров не должна превышать 10%.

Проведенные расчеты показывают, что наличие магнитного и электрического полей приводит к изменению профиля угловой скорости и к повышению теплосодержания внутри газового слоя. Особенно заметен этот эффект в случае кольцевого магнитного поля, причем эффект усиливается вместе с повышением напряженности магнитного поля (что соответствует увеличению отношения  $B'/b'$ ). Как видно из фиг. 5, профиль давления под влиянием электромагнитных воздействий также подвергается существенным изменениям.



Фиг. 5

Поступила 16 V 1961

#### ЛИТЕРАТУРА

1. I l l i n g w o r t h C. R. Some solutions of the equations of flow of a viscous compressible fluid. Proceedings of the Cambridge Phil. Soc., 1950, vol. 46, стр. 469—478.
2. Г р о з д о в с к и й Г. Л. Течение вязкого газа между двумя движущимися параллельными плоскими стенками и между двумя вращающимися цилиндрами. ПММ, 1955, т. XIX, вып. 1, стр. 99—102.