

КОНВЕКТИВНАЯ ДИФФУЗИЯ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

В. С. Кутляров (Москва)

Процесс перемешивания динамически нейтральной примеси, добавленной в поток, движущийся в однородной пористой среде, описывается уравнением диффузионного типа с некоторым эффективным коэффициентом диффузии, линейно зависящим от скорости фильтрации в области течений, подчиняющихся закону Дарси [1]. Согласно представлениям, развитым в целом ряде работ [2-4], это процесс, называемый также конвективной диффузией, возникает вследствие неупорядоченности поровых каналов, по которым движется жидкость. Определенную роль в механизме перемешивания играют также молекулярные эффекты, причем их относительный вклад тем больше, чем меньше скорость фильтрации.

В работе предлагаются уравнения конвективной диффузии в трещиновато-пористых средах, учитывающие специфику процесса перемешивания в этих средах. Приводятся решения некоторых задач.

§ 1. Уравнения конвективной диффузии в трещиновато-пористых средах. Согласно [5], трещиновато-пористая порода представляется как некоторая сплошная среда, состоящая из двух систем — системы трещин и системы блоков, вложенных одна в другую. Между этими системами происходит обмен жидкостью.

Как известно из фактических данных о трещиноватых пластах, проницаемость трещин k_1 на несколько порядков больше проницаемости блоков k_2 , однако пористость системы трещин m_1 существенно меньше пористости блоков m_2 . Для трещиноватых пород характерно, что течение жидкости осуществляется в основном по трещинам, так что скорость фильтрации по блокам пренебрежимо мала сравнительно со скоростью фильтрации по трещинам.

В работе [3] эффективный коэффициент конвективной диффузии в обычной пористой среде представлен в виде $D = \lambda u + D_0$ (для плоского одномерного случая), где D_0 — коэффициент молекулярной диффузии ($D_0 \sim 10^{-5}$ см²/сек), u — средняя скорость течения, λ — коэффициент продольного рассеивания ($\lambda \sim 0.1$ см).

Как показывают оценки, при средних значениях параметров фильтрации в блоках ($k_2 \sim 1-10$ мд, $m_2 \sim 0.1$, вязкость жидкости $\mu \sim 1-10$ сантипуаз, перепад давления $\Delta p / \Delta x \sim 0.1-1$ атм/м) величина D в блоках имеет порядок коэффициента молекулярной диффузии D_0 . В то же время в системе трещин, рассматриваемых как отдельная пористая среда, выполняется неравенство $\lambda u \gg D_0$, т. е. эффектом молекулярного переноса по трещинам можно пренебречь.

Таким образом, основная особенность процесса перемешивания динамически нейтральной примеси в породах с развитой трещиноватостью состоит в том, что эффект конвективного перемешивания, возникающий вследствие неупорядоченности системы трещин и поровых каналов блоков и определяемый средней скоростью течения, играет существенную роль только в системе трещин. В малопроницаемых блоках диффузия будет определяться механизмом молекулярной природы.

Ввиду существенно различных условий перемешивания в трещинах и блоках естественно ввести в каждой точке пространства две концентрации диффундирующего вещества: C_1 и C_2 . Концентрации C_1 и C_2 представляют собой соответственно средние концентрации примеси в трещинах и порах блоков в окрестности данной точки.

Характерная особенность процесса перемешивания в рассматриваемой среде — наличие перетока диффундирующего вещества между трещинами и блоками, возникающего вследствие различия концентраций в системах трещин и блоков. Обозначая через q количество диффундирующего вещества, перешедшее из блоков в трещины за единицу времени на единицу объема породы, запишем уравнение материального баланса в системе трещин

$$m_1 \frac{\partial C_1}{\partial t} - \operatorname{div} (\bar{D}_{ij} \operatorname{grad} C_1 - \mathbf{V} C_1) - q = 0 \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{V} и \bar{D}_{ij} — соответственно скорость фильтрации и коэффициент конвективной диффузии в системе трещин. Пренебрегая эффектом молекулярной диффузии, представим, следуя [3], \bar{D}_{ij} в виде

$$\bar{D}_{ij} = (\lambda_1 - \lambda_2) |\mathbf{V}| \delta_{ij} + \lambda_2 v_i v_j / |\mathbf{V}|$$

Здесь λ_1, λ_2 — коэффициенты продольного и поперечного рассеивания в системе трещин; v_i, v_j — компоненты скорости фильтрации потока; δ_{ij} — символ Кронекера.

Пренебрегая переносом примеси по блокам вследствие диффузии и конвекции, получим уравнение материального баланса в системе блоков

$$m_2 \partial C_2 / \partial t + q = 0 \quad (1.2)$$

В дальнейшем ограничимся случаем стационарного фильтрационного потока, причем, в соответствии со сделанными выше оценками, будем полагать, что процесс обмена систем трещин и блоков определяется механизмом молекулярной диффузии.

Выражение для удельного перетока q существенным образом зависит от соотношения характерного времени процесса T и характерного времени установления квазистационарного распределения концентрации в отдельном блоке $\tau_0 \sim L^2 / D_0$, где L — средний размер блока.

Рассмотрим два предельных случая, когда $\tau_0 \ll T$ и $\tau_0 \gg T$. Если $\tau_0 \ll T$, то распределение концентрации внутри блоков в каждый момент времени близко к равновесному, и для интенсивности перетока q может быть принято выражение

$$q = \alpha (C_2 - C_1) \quad (1.3)$$

вполне аналогичное выражениям, принятым в работах [5, 6] для перетоков тепла и массы при описании процессов теплопередачи в гетерогенных средах и фильтрации в трещиноватых породах.

Коэффициент α имеет размерность обратного времени и зависит от: 1) коэффициента молекулярной диффузии D_0 , 2) геометрических параметров среды, характеризующих величину поверхности контакта жидких частиц, находящихся в блоках и трещинах (в единице объема породы). В качестве таких параметров можно взять просветность (пористость) блоков m_2 и удельную поверхность трещин σ , т. е. поверхность трещин, приходящуюся на единицу объема породы. Величина D_0 пропорциональна коэффициенту «свободной» молекулярной диффузии D^0 и зависит, вообще говоря, от характеристик микроструктуры породы. Принимая, что величины D_0 и D^0 одного порядка и используя анализ размерностей, получаем оценку

$$\alpha \sim m_2 \sigma^2 D^0$$

Заметим, что в том случае, когда конвективный механизм обмена дает вклад, сравнимый с диффузионным, коэффициент α может быть представлен в виде

$$\alpha \sim m_2 \sigma^2 D^0 + \frac{k_2 \sigma}{i_2} |\text{grad } p| \quad (1.4)$$

причем второе слагаемое в (1.4) учитывает конвективную составляющую перетока при стационарном поле давлений.

Как показывают оценки, для обычных значений коэффициента диффузии в капельных жидкостях при умеренных температурах ($D_0 \sim 10^{-5} - 4 \cdot 10^{-5}$ см²/сек) рассмотренный случай диффузии с квазистационарной формой перетока (1.3) может иметь место только для достаточно малых блоков ($L \sim 10$ см), однако (для больших значений D_0 , которые могут встретиться при высоких температурах или при диффузии газов, границы применимости соотношения (1.3), естественно, шире).

Рассмотрим теперь второй случай ($\tau_0 \gg T$), который реализуется при размерах блоков $L \gtrsim 50 - 100$ см и является более интересным с практической точки зрения. Процесс обмена в этом случае имеет существенно нестационарный характер, и выражение для q естественно получить из рассмотрения задачи о диффузии в отдельном блоке, в некоторой степени аналогично тому, как сделано при описании явления капиллярной пропитки блоков в трещиновато-пористой среде [1, 7].

Ограничимся вначале значениями времени, когда влиянием конечных размеров блока можно пренебречь и рассмотрим в качестве модели молекулярную диффузию в линейном элементе блока, на поверхности которого концентрация примеси равна величине концентрации в системе трещин C_1 . Заметим, что это предположение, позволяющее существенно упростить выражение для q , не является слишком стеснительным для случая достаточно больших блоков, так как влияние границ блока начинает заметно сказываться при значениях времени, сравнимых с характерным временем процесса.

Исходя из известного решения одномерного уравнения теплопроводности при условии первого рода на границе полубесконечного стержня [8] и вычисляя поток на этой границе, получаем выражение для q в виде

$$q = -a \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{(C_1 - C_0) d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \quad (1.5)$$

где C_0 — начальное распределение концентрации, а для коэффициента a , используя анализ размерностей, получаем оценку

$$a \sim m_2 \sigma \sqrt{D^0}$$

Отметим, что аналогичное выражение для интенсивности перетока массы жидкости было принято в работе [9], где рассматривался начальный момент переходных процессов перераспределения давления в однородной жидкости в трещиновато-пористой среде.

Для приближенного учета влияния границ блока будем моделировать блок стержнем длины $2l$ или сферой радиуса l .

В этих случаях для величины q получаем выражение в виде:

$$q = -a \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{(C_1 - C_0) \varphi(t - \tau)}{\sqrt{\pi(t - \tau)}} d\tau \quad (1.6)$$

где для случая стержня

$$\varphi(t) = \theta_4(0, \kappa) \quad (1.7)$$

а для случая сферы

$$\varphi(t) = \theta_3(0, \kappa) - \kappa^{-1/2} \quad (1.8)$$

причем $\kappa = l^2 / \pi D_0 t$, θ_3 , θ_4 — символы тэта-функций. Нетрудно показать, что при $\kappa \gg 1$, что соответствует начальной стадии процесса, из (1.7) и (1.8) получаем соответственно $\varphi(t) \sim 1 - 2 \exp(-\pi \kappa) \sim 1$ и $\varphi(t) \sim 1 - \kappa^{-1/2} \sim 1$, т. е. формула (1.6) совпадает с (1.5), а при $\kappa \sim 0$ для обоих случаев $\varphi(t) \sim 2 \kappa^{-1/2} \exp(-\pi / 4\kappa) \sim 0$.

Исходя из соотношений (1.5) — (1.8) можно полагать, что для реальных сред выражение для интенсивности диффузионного перетока между блоками и трещинами представляется в виде (1.6)¹, где коэффициент a и безразмерная функция $\varphi(t)$, не зависящая от закона изменения C_1 и монотонно убывающая от единицы до нуля, должны определяться из опытов по «диффузионной пропитке» блоков согласно методике, аналогичной той, которая применялась авторами работы [10] при исследовании капиллярной пропитки в трещиновато-пористой среде.

Остановимся кратко на особенностях постановки и решения задач в рассмотренных случаях. Система уравнений (1.1), (1.2), (1.3) в значительной мере аналогична уравнениям упругого режима фильтрации в трещиновато-пористой среде [5].

Решение задач для этой системы удобно проводить, исключая одну из неизвестных функций и формулируя начальные и граничные условия в терминах искомой величины. В частности, следуя методу, примененному в работе [3], нетрудно получить, что в этом случае скачки концентрации C_1 и ее нормальной производной $\partial C_1 / \partial n$ затухают мгновенно, а для скачков величин C_2 и $\partial C_2 / \partial n$ имеют место соотношения

$$[C_2] = [C_2]_{t=0} \exp\left(-\frac{\alpha}{m_2} t\right), \quad \left[\frac{\partial C_2}{\partial n}\right] = \left[\frac{\partial C_2}{\partial n}\right]_{t=0} \exp\left(-\frac{\alpha}{m_2} t\right) \quad (1.9)$$

где n — нормаль к поверхности разрыва, а знаком [] обозначается скачок некоторой величины.

При использовании системы уравнений (1.1), (1.2), (1.5) — (1.8) естественно вначале определить C_1 , а затем квадратурой найти C_2 из (1.2). При этом распределение C_1 непрерывно, а закон затухания скачка концентрации в блоках следует из явного вида решения для C_2 .

§ 2. Некоторые задачи конвективной диффузии в трещиновато-пористой среде.

1. Рассмотрим решение одномерной задачи о перемешивании прослойки окрашенной жидкости с остальной жидкостью при движении в трещиновато-пористой среде. При этом будем исходить из системы уравнений (1.1) — (1.4), полагая для простоты $m_1 = 0$.

Пусть в начальный момент времени окрашенная жидкость с концентрацией C_0 занимала участок прямолинейного трещиновато-пористого пласта $x_1 \leq x \leq x_2$. Вне этой прослойки концентрация примеси при $t = 0$ равна нулю.

Задача сводится к решению уравнения

$$b \frac{\partial^3 C_2}{\partial \xi^2 \partial \tau} + \frac{\partial^2 C_2}{\partial \xi^2} - 2b \frac{\partial^2 C_2}{\partial \xi \partial \tau} - 2 \frac{\partial C_2}{\partial \xi} - \frac{\partial C_2}{\partial \tau} = 0 \quad (2.1)$$

$$\left(\xi = \frac{vx}{2D}, \tau = \frac{v^2 t}{4m_2 D}, b = \frac{v^2}{4\alpha D}, D = \lambda v \right)$$

с разрывным начальным условием

$$C_2(\xi, 0) = C_0 f(\xi), \quad f(\xi) = \eta(\xi - \xi_1) - \eta(\xi - \xi_2) \quad (2.2)$$

Здесь v — скорость фильтрации, $\eta(\xi)$ — функция Хевисайда.

Как показано выше, начальные разрывы функции $C_2(\xi, \tau)$ не исчезают мгновенно, а убывают по закону (1.9). Таким образом, искомое решение, понимаемое как обобщенное в смысле С. Л. Соболева, принадлежит к классу кусочно-непрерывных функций с разрывами первого рода. Решение задачи (2.1), (2.2) удобно искать в виде

$$C_2(\xi, \tau) / C_0 = u(\xi, \tau) + \exp(-\tau/b) f(\xi)$$

где $u(\xi, \tau)$ — достаточно гладкая функция, удовлетворяющая, как нетрудно убедиться

¹ Формула (1.6) предложена в результате совместного обсуждения с Б. В. Шалимовым.

ся, уравнению

$$b \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^2 \partial \tau} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2b \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \tau} - 2 \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{b} \exp(-\tau/b) = 0 \quad (2.3)$$

и нулевому начальному условию ($u(\xi, 0) \equiv 0$). Применяя к (2.3) преобразование Фурье по переменной ξ , получим для трансформанты $U(v, \tau)$ уравнение

$$(bv^2 + 2bvi + 1) dU/d\tau + v(v + 2i)U = F(v, \tau) \quad (2.4)$$

$$U(v, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, \tau) e^{-iv\xi} d\xi, \quad F(v, \tau) = \frac{i \exp(-\tau/b)}{\sqrt{2\pi} bv} (e^{-iv\xi_2} - e^{-iv\xi_1})$$

с начальным условием $U(v, 0) = 0$. Определив $U(v, \tau)$ и воспользовавшись формулой обращения Фурье, получим решение в виде

$$C_2(\xi, \tau) = [\eta(\xi - \xi_1) - \eta(\xi - \xi_2)] e^{-\tau/b} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ e^{-\tau/b} \cos \frac{2\xi - \xi_1 - \xi_2}{2} v - \exp \left[-\frac{bv^4 + (1 + 4b)v^2}{(1 + bv^2)^2 + 4b^2v^2} \tau \right] \cos \left[\frac{2\xi - \xi_1 - \xi_2}{2} v - \frac{2\tau v}{(1 + bv^2)^2 + 4b^2v^2} \right] \right\} \times \sin \frac{v(\xi_1 - \xi_2)}{2} \frac{dv}{v} \quad (2.5)$$

Распределение для концентрации в трещинах будет непрерывной функцией и находится из уравнения (1.2).

Разлагая экспоненциальные функции, входящие в формулы для C_1 и C_2 в ряд, и удерживая члены порядка τ , получим представление концентрации в трещинах и блоков при малых τ . Не выписывая получающихся выражений, приведем результаты расчетов.

На фиг. 1 представлены графики функций $C_1(\xi, \tau)$ (сплошные линии), $C_2(\xi, \tau)$ (пунктир) для случая $b = 1, \xi_1 = -1, \xi_2 = +1$, при $\tau = 0.1$ (кривые 1) и $\tau = 0.2$ (кривые 2). Там же нанесены кривые (штрих-пунктир), рассчитанные по известному [3] решению аналогичной задачи в обычной пористой среде.

2. Рассмотрим теперь задачу о распространении примеси в плоскорадиальном установившемся потоке, когда на скважине радиуса r_0 , вскрывающей первоначально «чистый» бесконечный пласт, поддерживается постоянная концентрация примеси C^0 .

Используя систему уравнений (1.1), (1.2), (1.5), и полагая $m_1 = 0$, получаем для определения C_1 краевую задачу

$$\lambda \frac{\partial^2 C_1}{\partial r^2} - \frac{\partial C_1}{\partial r} - \beta r \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{C_1 d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} = 0 \quad \left(\beta = \frac{2\pi h a}{Q} \right) \quad (2.6)$$

$$C_1(r_0, t) = C^0, \quad C_1(t, \infty) = 0$$

Здесь Q — дебит скважины, h — мощность пласта. Применяя к (2.6) преобразование Лапласа, для изображения $U(y, s)$ получим уравнение

$$\frac{d^2 U}{dy^2} - \frac{dU}{dy} - \gamma y U = 0, \quad U(y, s) = \int_0^{\infty} C_1(y, t) e^{-st} dt \quad (2.7)$$

$$U(y_0, s) = C^0/s, \quad U(\infty, s) = 0, \quad y = r/\lambda, \quad y_0 = r_0/\lambda, \quad \gamma = \beta \lambda^2 \sqrt{s}$$

Полагая $U = \exp(0.5 y) V, z = 0.25(1 + 4\gamma y)$, приводим (2.7) к виду

$$\frac{d^2 V}{dz^2} - \frac{z}{\gamma^2} V = 0 \quad (2.8)$$



Фиг. 1

Общее решение (2.8) имеет вид

$$V(z, s) = \sqrt{z} \left[AJ_{1/2} \left(\frac{2i}{3\gamma} z^{3/2} \right) + BY_{1/2} \left(\frac{2i}{3\gamma} z^{3/2} \right) \right]$$

Здесь $J_{1/2}$, $Y_{1/2}$ — стандартные обозначения функций Бесселя, A , B — произвольные константы. Возвращаясь к исходным переменным и используя граничные условия, получаем после некоторых преобразований решение задачи (2.7), (2.8) в виде

$$U(y, s) = \frac{C^0}{s} \exp \left(\frac{y - y_0}{2} \right) \frac{(1 + 4\gamma y)^{1/2} K_{1/2}(\theta(y))}{(1 + 4\gamma y_0)^{1/2} K_{1/2}(\theta(y_0))} \quad \left(\theta(y) = \frac{(1 + 4\gamma y)^{3/2}}{12\gamma} \right) \quad (2.9)$$

Здесь $K_{1/2}$ — символ функции Макдональда.

В общем случае обращение (2.9) приводит к достаточно сложному выражению. Однако оценки показывают, что в диапазоне реальных значений параметров ($Q \approx 50$ м³/сут, $m_2 \sim 0.2$, $h \sim 10$ м, $L \sim 100$ см) при $r \leq 500$ м и для не очень малых значений времени аргумент функций $K_{1/2}$ велик и в этом случае, полагая также для простоты $y_0 = 0$, получаем выражение для U в виде

$$U(y, s) = C^0 s^{-1} (1 - \gamma y) \exp(-0.5 \gamma y^2) \quad (2.10)$$

Обращая (2.10), находим решение для C_1 в виде

$$\frac{C_1(\xi, \eta)}{C^0} = \operatorname{erfc} \eta - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \xi \sqrt{\eta} \exp(-\eta^2)$$

$$\left(\xi = \frac{\lambda \sqrt{\beta}}{4\sqrt{t}}, \quad \eta = \frac{\beta r^2}{4\sqrt{t}} \right) \quad (2.11)$$

Используя (1.2), получаем

$$\frac{C_2(\xi, \eta)}{C^0} = \frac{\psi}{\xi^2} [\exp(-\eta^2) - \sqrt{\pi} \eta (\xi + \sqrt{\eta}) \operatorname{erfc} \eta] \quad \left(\psi = \frac{2a\beta\lambda^2}{\sqrt{\pi} m_2} \right) \quad (2.12)$$

На фиг. 2 представлены результаты расчетов по формулам (2.11) и (2.12) для случая $\psi = 10^{-7}$ и $\xi = 10^{-3}$ (кривые 1), $\xi = 5 \cdot 10^{-4}$ (кривые 2).

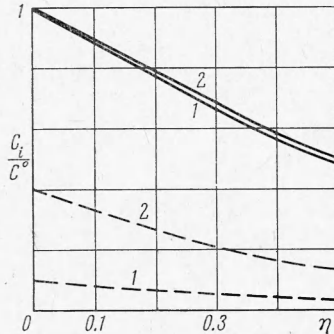
Как видно из рассмотренных задач, характерной особенностью механизма конвективной диффузии в трещиновато-пористой среде является сравнительно быстрое распространение примеси по трещинам и весьма заметное запаздывание этого процесса в малопроницаемых блоках.

В заключение автор благодарит Ю. П. Желтова за предложение темы и руководство работой, Г. И. Баренблатта и В. М. Ентова — за ценные замечания.

Поступила 25 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Бан А. и др. Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости. Гостоптехиздат, 1962.
2. Scheidegger A. E. Statistical hydrodynamic in porous media. J. Appl. Phys., 1954, vol. 25, No. 8.
3. Николаевский В. Н. Конвективная диффузия в пористых средах. ПММ, 1959, т. 23, вып. 6.
4. Saffman P. G. A theory of dispersion in a porous medium. J. Fluid Mech., 1959, vol. 6, No. 3.
5. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
6. Рубинштейн Л. И. К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах. Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., 1948, № 1.
7. Боксерман А. А., Желтов Ю. П., Кочешков А. А. О движении несмешивающихся жидкостей в трещиновато-пористой среде. Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 6.
8. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. Изд-во «Наука», 1964.
9. Волков И. А. К вопросу об упругом режиме фильтрации в трещиновато-пористой среде. Сб. «Исследования по матем. и эксперим. физ. и механ.», Л., 1965.
10. Везилов Д. Ш., Кочешков А. А. Экспериментальное исследование механизма нефтеотдачи трещиновато-пористых коллекторов при заводнении. Изв. АН СССР. Сер. Механика и машиностроение, 1963, № 6.



Фиг. 2