

УДК 539.3

## СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОЛОЧЕК С ЖИДКОСТЬЮ

Е. П. Клигман, И. Е. Клигман, В. П. Матвеев

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь  
E-mails: kligman@icmm.ru,.mvp@icmm.ru

Получены вариационные уравнения на собственные значения, описывающие колебания ортотропных оболочек, содержащих идеальную несжимаемую жидкость. Сделано предположение о малости амплитуд колебаний, что дает возможность использовать линейные уравнения и считать границу смачиваемой поверхности оболочки неизменной. Уравнения модели анизотропных оболочек основаны на линейных соотношениях мультиполевой теории, которая позволяет получить более точную модель анизотропных оболочек, удовлетворяющую требованиям метода конечных элементов. Движение жидкости принято безвихревым и описано с помощью уравнения Лапласа. Разработана схема метода конечных элементов для определения частот и форм собственных колебаний произвольной многослойной ортотропной оболочки вращения, частично заполненной идеальной несжимаемой жидкостью.

Ключевые слова: теория оболочек, идеальная жидкость, теория колебаний.

**Введение.** Наличие емкостей, частично заполненных жидкостью, является неотъемлемой частью большого количества конструкций самого разного назначения. Это могут быть всевозможные цистерны, топливные баки и пр. В последнее время для изготовления подобных изделий все чаще применяются композиционные материалы с явно выраженной анизотропией механических свойств. Наполнение конструкции жидкостью существенно изменяет ее динамические свойства. Поэтому изучение колебания оболочек, содержащих жидкость во внутренних полостях, весьма актуально.

**Уравнение движения оболочки вращения.** Для изготовления оболочек широко применяются анизотропные композиционные материалы, имеющие низкую сдвиговую жесткость. Наиболее адекватной моделью, описывающей поведение таких оболочек, является шестимодальная теория, основанная на мультиполевых гипотезах, где в дополнение к предположениям о распределении смещений формулируются независимые гипотезы о поперечных деформациях [1].

Рассмотрим ортотропную оболочку вращения, отнесенную к системе координат, связанных с поверхностью  $\Omega$  (рис. 1). В соответствии с принятой моделью компоненты вектора перемещений точек оболочки в глобальных цилиндрических координатах  $r, x, \varphi$  запишутся в виде

$$U_x(s, \varphi, z) = u_x(s, \varphi) + z(\psi_1(s, \varphi) \sin \theta - \chi(s, \varphi) \cos \theta), \quad (1)$$

$$U_r(s, \varphi, z) = u_r(s, \varphi) + z(\psi_1(s, \varphi) \cos \theta + \chi(s, \varphi) \sin \theta), \quad U_\varphi(s, \varphi, z) = u_\varphi(s, \varphi) + z\psi_2(s, \varphi).$$

Здесь  $s, \varphi$  — гауссовы координаты поверхности приведения;  $z$  — нормальная координата;  $\theta$  — угол наклона нормали координатной поверхности к оси вращения оболочки;  $u_r, u_x,$

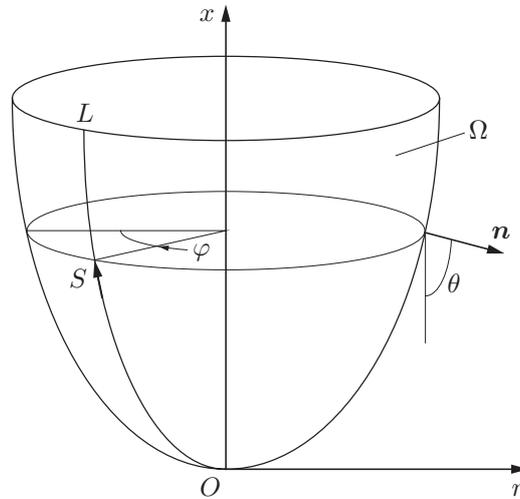


Рис. 1. Геометрия оболочки

$u_\varphi$  — перемещения точек координатной поверхности;  $\psi_1, \psi_2$  и  $\chi$  — углы поворота и удлинение нормального к поверхности элемента. На основе разложения (1) с помощью кинематических соотношений Коши получаем компоненты тензора деформаций  $2e_{ij} = (U_{i,j} + U_{j,i})$ . Вычисленные по этим формулам компоненты  $e_{13}$  и  $e_{23}$  не обеспечивают выполнения крайних условий по напряжениям на граничных поверхностях оболочки и вносят определенную погрешность в результаты расчета.

Поэтому в соответствии с принятой в [1] концепцией дополнительно к кинематическим гипотезам (1) формулируются независимые гипотезы о поперечных деформациях. Будем искать деформации поперечного сдвига в следующей форме:

$$2e_{\alpha 3}(s, \varphi, z) = 4(z/h)(1 - z/h)\gamma_{\alpha 3}(s, \varphi) \quad (\alpha = 1, 2), \quad (2)$$

где  $h$  — толщина оболочки. Здесь в качестве поверхности приведения выбрана внутренняя поверхность оболочки. В нашем случае эта форма удовлетворяет условию нулевых деформаций и напряжений сдвига на граничных поверхностях оболочки, т. е.

$$e_{\alpha 3}(s, \varphi, 0) = e_{\alpha 3}(s, \varphi, h) = 0, \quad \tau_{\alpha 3}(s, \varphi, 0) = \tau_{\alpha 3}(s, \varphi, h) = 0 \quad (\alpha = 1, 2).$$

Компоненты тензора напряжений  $\tau_{ij}$  подчиняются закону Гука для ортотропных сред. Коэффициент деформации  $\gamma_{\alpha 3}$  определяется из условия наименьшего среднеквадратичного отклонения значений деформаций поперечного сдвига по толщине оболочки, полученных по кинематическим гипотезам (1) и гипотезе о поперечных деформациях (2):

$$\min \int_0^h \left\{ 4 \frac{z}{h} \left( 1 - \frac{z}{h} \right) \gamma_{\alpha 3}(s, \varphi) - (U_{i,j} + U_{j,i}) \right\}^2 dz \quad (\alpha = 1, 2).$$

Для получения уравнения движения оболочки воспользуемся принципом возможных перемещений, дополнив его, согласно принципу Даламбера, работой сил инерции

$$\delta(E - A - T) = 0. \quad (3)$$

Здесь  $E$  — потенциальная энергия деформации;  $A$  — работа внешних сил;  $T$  — работа сил инерции. Рассмотрим вариацию потенциальной энергии деформации системы

$$\delta E = \int_V \tau_{ij} \delta e_{ij} dV = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^h \tau_{ij} \delta e_{ij} dz r d\varphi ds, \quad (4)$$

где  $V$  — объем тела оболочки;  $L$  — длина меридиана оболочки. Здесь компоненты тензоров напряжения и деформации в силу принятых гипотез имеют известную зависимость от координаты  $z$ . Выполнив в (4) интегрирование по толщине, получим

$$\delta E = \int_0^L \int_0^{2\pi} \{T\}^T \delta\{\varepsilon\} r d\varphi ds, \quad (5)$$

где  $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}, \varkappa_{11}, \varkappa_{22}, \varkappa_{12}, \varkappa_{21}, \varkappa_{13}, \varkappa_{23}\}^T$  и  $\{T\} = \{T_{11}, T_{12}, T_{22}, T_{13}, T_{23}, T_{33}, M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21}, M_{13}, M_{23}\}^T$  — векторы обобщенных деформаций и напряжений;  $\varepsilon_{ij}$  — растяжение и сдвиг;  $\varkappa_{ij}$  — изгиб и кручение координатной поверхности;  $T_{ij}$  — усилия растяжения и сдвига;  $M_{ij}$  — изгибающие и крутящие моменты, приведенные к координатной поверхности. Вектор обобщенных напряжений связан с вектором обобщенных деформаций законом Гука в следующей форме:

$$\{T\} = [D]\{\varepsilon\},$$

где  $[D]$  — симметричная матрица жесткости [2].

Запишем вариацию работы сил инерции:

$$\delta T = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^h \{U\}^T \rho \delta\{\ddot{U}\} dz r d\varphi ds.$$

Здесь вектор перемещений  $\{U\}$  дан компонентами в глобальных координатах разложением (1);  $\rho$  — плотность материала оболочки. Выполнив интегрирование по толщине, получим:

$$\delta T = \int_0^L \int_0^{2\pi} \{u\}^T [\rho] \delta\{\ddot{u}\} r d\varphi ds, \quad (6)$$

где  $\{u\} = \{u_r, u_x, u_\varphi, \psi_1, \chi, \psi_2\}^T$  — вектор обобщенных перемещений;  $[\rho]$  — матрица плотности.

Пусть рассматриваемая оболочка нагружена находящейся в ней идеальной жидкостью. Поэтому из внешних сил будем учитывать только нормальное давление  $p_n$ . В этом случае работа внешних сил в (3) определяется работой давления на нормальном перемещении внутренней поверхности оболочки  $w_n$ :

$$\delta A = \int_0^L \int_0^{2\pi} p_n \delta w_n r d\varphi ds = \int_0^L \int_0^{2\pi} p_n \delta(u_r \sin \theta - u_x \cos \theta) r d\varphi ds. \quad (7)$$

В случае гармонического возбуждения для оболочек вращения нагрузку и искомые перемещения можно представить в следующем виде:

$$p_n(s, \varphi, t) = e^{i\omega t} \sum_k p_n^k(s) \cos k\varphi,$$

$$U_r = e^{i\omega t} \sum_k U_r^k \cos k\varphi, \quad U_x = e^{i\omega t} \sum_k U_x^k \cos k\varphi, \quad U_\varphi = e^{i\omega t} \sum_k U_\varphi^k \sin k\varphi$$

или для вектора обобщенных перемещений

$$\{u(s, \varphi, t)\} = e^{i\omega t} \sum_k \{u_r^k(s) \cos k\varphi, u_x^k(s) \cos k\varphi, u_\varphi^k(s) \sin k\varphi, \psi_1^k(s) \cos k\varphi, \chi^k(s) \cos k\varphi, \psi_2^k(s) \sin k\varphi\}^T. \quad (8)$$

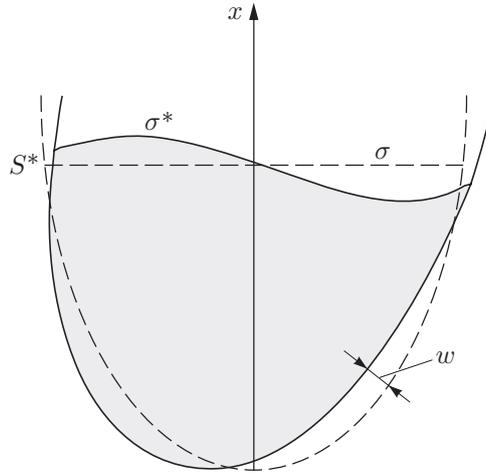


Рис. 2. Оболочка с жидкостью

Подставив (8) в (3) с учетом (5)–(7) и выполнив интегрирование по окружной координате, получим вариационное уравнение для  $k$ -й гармоники:

$$\int_0^L \delta\{\varepsilon\}_k^T [D] \{\varepsilon\}_k r ds - \omega^2 \int_0^L \delta\{u\}_k^T [\rho] \{u\}_k r ds - \int_0^L \delta(u_r^k \sin \theta - u_x^k \cos \theta) p_n^k r ds =$$

$$= \int_0^L \delta\{\varepsilon\}_k^T [D] \{\varepsilon\}_k r ds - \omega^2 \int_0^L \delta\{u\}_k^T [\rho] \{u\}_k r ds - \int_0^L \delta\{u\}_k^T \{L\} p_n^k r ds = 0, \quad (9)$$

где  $\{u\}_k$  —  $k$ -я гармоника вектора обобщенных перемещений;  $\{L\} = \{\sin \theta, -\cos \theta, 0, 0, 0, 0\}^T$  — расширенный вектор направляющих косинусов нормали к поверхности оболочки.

Уравнение (9) является, по сути, вариационным уравнением вынужденных установившихся колебаний оболочки вращения, нагруженной давлением, изменяющимся по гармоническому закону.

**Уравнение движения идеальной жидкости.** Рассмотрим случай, когда оболочка вращения частично заполнена идеальной несжимаемой жидкостью. Колебания, совершаемые оболочкой, считаются малыми, а движение жидкости в неподвижной системе координат — безвихревым. Пусть ось вращения  $x$  направлена вертикально вверх (рис. 2). Тогда свободная поверхность жидкости  $\sigma$  описывается уравнением  $x = \text{const}$ , а боковая поверхность  $S$  определяется смачиваемой частью внутренней поверхности оболочки  $\Omega$ . В процессе движения системы точки, принадлежащие внутренней поверхности оболочки, получают перемещения  $u_x, u_r, u_\varphi$ , а граница свободной поверхности займет положение  $\sigma^*$ . Давление в жидкости при этом будет иметь динамическую составляющую  $p(x, r, \varphi, t)$ .

Сделанное предположение о малости амплитуды колебаний позволяет считать неизменной границу смачиваемой поверхности оболочки в процессе ее движения. Обозначим внутреннюю поверхность оболочки, занимаемую жидкостью в процессе движения, через  $S^*$ . В случае малых колебаний граничные условия могут быть перенесены с поверхностей  $S^*$  и  $\sigma^*$  на близкие им поверхности  $S$  и  $\sigma$ . Тогда давление  $p$  должно удовлетворять уравнению Лапласа [3]

$$\nabla^2 p = 0 \quad (10)$$

с краевыми условиями

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = -\rho^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{на } S, \quad \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad \text{на } \sigma. \quad (11)$$

Здесь  $\rho^*$  — плотность жидкости;  $\mathbf{n}$  — вектор единичной нормали к поверхности жидкости;  $w$  — нормальная составляющая вектора перемещений;  $g$  — ускорение свободного падения.

Уравнение (10) с граничными условиями (11) описывает динамическое равновесие жидкости при возмущении ее боковой поверхности  $S$ . Рассмотрим случай, когда нормальное смещение боковой поверхности  $w$  является гармонической функцией времени:

$$w(s, \varphi, t) = \tilde{w}(s, \varphi) e^{i\omega t}.$$

Будем искать стационарное решение уравнения (10)

$$p(x, r, \varphi, t) = \tilde{p}(x, r, \varphi) e^{i\omega t}.$$

Тогда амплитудные значения давления должны удовлетворять уравнению

$$\nabla^2 \tilde{p} = 0 \quad (12)$$

и граничным условиям

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{n}} - \rho^* \omega^2 \tilde{w} = 0 \quad \text{на } S, \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\omega^2}{g} \tilde{p} = 0 \quad \text{на } \sigma. \quad (13)$$

Вариационная формулировка задачи связана с рассмотрением функционала

$$J = \frac{1}{2} \iiint_V (\nabla \tilde{p})^2 dV - \omega^2 \rho^* \iint_S \tilde{w} \tilde{p} dS - \frac{\omega^2}{2g} \iint_\sigma \tilde{p}^2 d\sigma,$$

который принимает стационарное значение для давления  $\tilde{p}$ , являющегося решением задачи (12), (13) [4]. Необходимым условием стационарности функционала  $J$  является обращение в нуль его первой вариации

$$\delta J = \iiint_V \nabla \tilde{p} \delta(\nabla \tilde{p}) dV - \omega^2 \rho^* \iint_S \tilde{w} \delta \tilde{p} dS - \frac{\omega^2}{g} \iint_\sigma \tilde{p} \delta \tilde{p} d\sigma = 0. \quad (14)$$

Рассмотрим случай, когда нормальное смещение границы  $\tilde{w}$  можно представить рядом Фурье по окружной координате:

$$\tilde{w}(s, \varphi) = \sum_k \{L\}^T \{u\}_k \cos k\varphi. \quad (15)$$

Здесь  $\{u\}_k$  и  $\{L\}$  — векторы перемещений и направляющих косинусов нормали (формулы (8), (9)). Решение вариационного уравнения (14) будем искать в виде

$$\tilde{p}(x, r, \varphi) = \sum_k p_k(x, r) \cos k\varphi. \quad (16)$$

С учетом (15) и (16) запишем вариационное уравнение (14) в цилиндрической системе координат и проинтегрируем его по  $\varphi$ . При этом система распадется на независимые уравнения для каждого номера окружной гармоники  $k$

$$\int_x \int_r \left( \frac{\partial p_k}{\partial r} \delta \frac{\partial p_k}{\partial r} + \frac{\partial p_k}{\partial x} \delta \frac{\partial p_k}{\partial x} + k^2 p_k \delta p_k \right) r dr dx - \omega^2 \rho^* \int_0^{s_l} (u_r^k \sin \theta - u_x^k \cos \theta) \delta p_k r ds - \frac{\omega^2}{g} \int_0^R p_k \delta p_k r dr = 0. \quad (17)$$

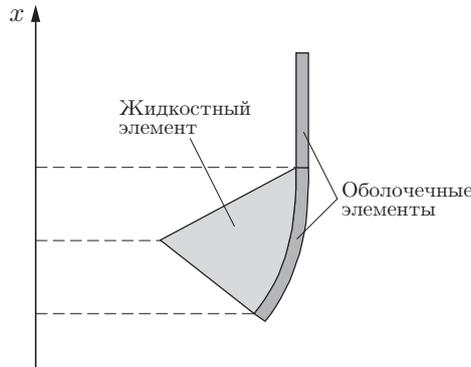


Рис. 3. Конечные элементы оболочки и жидкости

Здесь  $s_l$  — граница участка оболочки, смачиваемой жидкостью (см. рис. 2);  $R$  — радиус свободной поверхности жидкости. Запишем уравнение (17) в матричной форме:

$$\int_x \int_r \delta\{\gamma\}_k^T \{\gamma\}_k r dr dx - \frac{\omega^2}{g} \int_0^R \delta p_k p_k r dr - \omega^2 \rho^* \int_0^{s_l} \delta p_k \{L\}^T \{u\}_k r ds = 0, \quad (18)$$

где  $\{\gamma\} = \{\partial p_k / \partial x, \partial p_k / \partial r, k p_k / r\}^T$  — градиент давления.

Таким образом, мы получили вариационную задачу об установившихся вынужденных колебаниях жидкости при малом гармоническом изменении формы сосуда.

**Собственные колебания сосуда, частично заполненного жидкостью.** Уравнения (9) и (18) представляют собой вариационные уравнения вынужденных колебаний оболочки и жидкости соответственно для  $k$ -й окружной гармоники разложения решения в ряд Фурье по окружной координате. В зоне контакта этих тел нормальные перемещения точек оболочки и действующее на нее давление совпадают с нормальным смещением границы жидкости и возникающим в ней давлением, т. е.  $w_n = w$ ,  $p_n = p$ . Объединив эти два уравнения, получим однородную систему, которая может быть интерпретирована как спектральная задача о собственных колебаниях оболочки, частично заполненной идеальной жидкостью. Данная задача была решена с помощью метода конечных элементов. Для этого область, занятая жидкостью, разбивалась на треугольные, а оболочка представлялась в виде одномерных криволинейных кольцевых конечных элементов [2] с квадратичной аппроксимацией. Элементы на границе контакта оболочки и жидкости были согласованы между собой (рис. 3).

Перемещения  $u_r, u_x, u_\varphi$  и давление  $p$  будем аппроксимировать квадратичными полиномами, а  $\psi_1, \psi_2, \chi$  — полиномами первой степени (здесь и далее индекс  $k$  опущен). Положим, что  $\{V\}$  и  $\{q\}$  — векторы узловых параметров оболочки и жидкости,  $[N]$  и  $[n]$  — матрицы функций формы оболочки и жидкости соответственно,  $[b]$  — матрица градиента давления. Тогда можно записать:  $\{u\} = [N]\{V\}$ ,  $p = [n]\{q\}$  и  $\{\gamma\} = [b]\{q\}$ . Формально объединив уравнения оболочки и жидкости, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$([K_*] + [K] - [T] - \omega^2([M] + g^{-1}[R]))\{W\} = 0. \quad (19)$$

В этом уравнении приняты следующие обозначения:  $\{W\} = \{V, q\}^T$  — объединенный вектор узловых параметров;  $[T] = \begin{bmatrix} 0 & \omega^2 \rho^* [P]^T \\ [P] & 0 \end{bmatrix}$  — матрица взаимовлияния жидкости и

оболочки;  $[K]$  и  $[M]$  — матрицы жесткости и масс оболочки;  $[P] = \sum_{e=1}^{NE_c} \int_S [N]^T [L]^T [n] r ds$  —

матрица влияния жидкости на оболочку;  $[K_*] = \sum_{e=1}^{NE_l} \int_x \int_r [b]^T [b] r dr dx$  — матрица “гравитационной жесткости” жидкости;  $[R] = \sum_{e=1}^{NE_{surf}} \int_r [n]^T [n] r dr$  — матрица “инерции” свобод-

ной поверхности жидкости;  $NE_c$  — количество оболочечных элементов, соприкасающихся с жидкостью;  $NE_l$  — количество жидкостных элементов;  $NE_{surf}$  — количество элементов, принадлежащих свободной поверхности жидкости. Матрицы, входящие в (19), согласованы со структурой объединенного вектора узловых параметров  $\{W\}$ .

Уравнение (19) рассматривается как обобщенная задача на собственные значения, где  $\omega$  — собственная частота, а  $\{W\}$  — собственная форма колебаний.

На основе этой схемы была разработана программа расчета частот и форм собственных колебаний произвольной ортотропной оболочки вращения с низкой сдвиговой жесткостью, частично заполненной идеальной жидкостью.

#### Исследование собственных колебаний оболочки, заполненной жидкостью.

С целью тестирования предложенного подхода и разработанной программы были проведе-

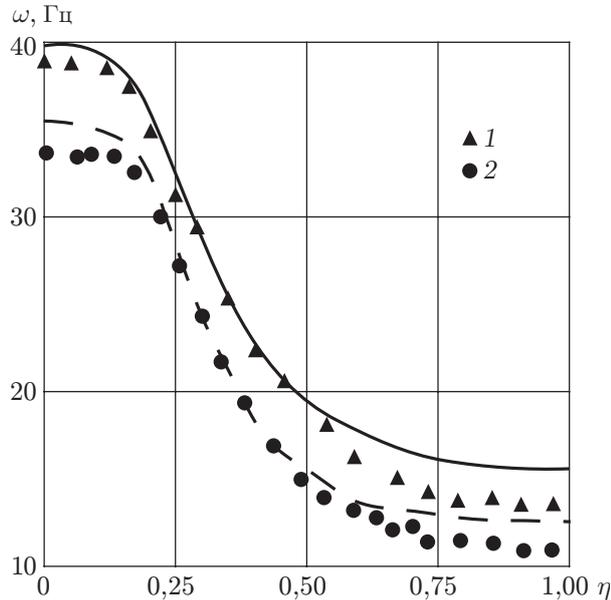


Рис. 4

Рис. 4. Зависимости собственных частот колебаний оболочки от уровня заполнения ее жидкостью для 3-й и 4-й окружных гармоник:

точки — эксперимент [5] (1 — 3-я гарм., 2 — 4-я гарм.); линии — расчет (сплошная — 3-я гарм., штриховая — 4-я гарм.)

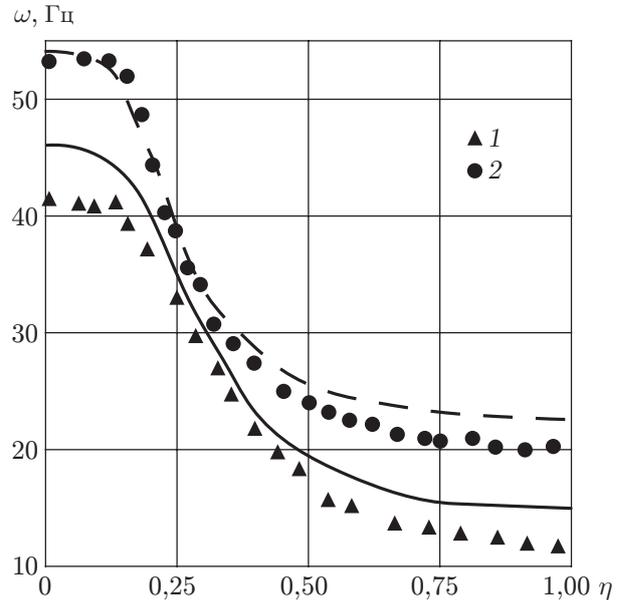


Рис. 5

Рис. 5. Зависимости собственных частот колебаний оболочки от уровня заполнения ее жидкостью для 5-й и 6-й окружных гармоник:

точки — эксперимент [5] (1 — 5-я гарм., 2 — 6-я гарм.); линии — расчет (сплошная — 5-я гарм., штриховая — 6-я гарм.)

ны расчеты колебаний натурной оболочки с жидкостью. Определялась зависимость значения низших собственных частот колебаний оболочки  $\omega$  от уровня ее заполнения жидкостью. Первые собственные частоты колебаний соответствуют модам с образованием четырех, трех, пяти и шести волн в окружном и одной полуволны в продольном направлениях (первые формы 4-й, 3-й, 5-й и 6-й окружных гармоник). Результаты расчета оболочки с жидкостью сравнивались с имеющимися результатами эксперимента, проведенного авторами работы [5], в котором определялись частоты и формы малых собственных колебаний вертикально установленной и жестко заземленной на обоих торцах цилиндрической оболочки радиуса 0,1 м, длины 0,58 м и постоянной толщины  $h = 0,0006$  м. Оболочка была изготовлена из титанового сплава ОТ4 с модулем упругости  $E = 0,98 \cdot 10^5$  МПа, плотностью  $\rho = 4550$  кг/м<sup>3</sup> и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,3$ . В ходе эксперимента уровень заполнения оболочки технической водой изменялся от 0 до 100 %.

На рис. 4 и 5 приведены графики зависимости собственных частот колебаний оболочки от относительного уровня  $\eta$  заполнения ее жидкостью для различных окружных гармоник. Как можно видеть из приведенных графиков, результаты расчета показывают хорошую качественную и удовлетворительную количественную согласованность с экспериментальными данными. Некоторое превышение расчетных значений частот над экспериментальными данными, вероятно, можно объяснить тем, что на практике сложно обеспечить условия полного жесткого заземления оболочки по торцам.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Tessler A., Saether E.** A computationally viable higher-order theory for laminated composite plates // Intern. J. Numer. Method Engng. 1991. V. 31. P. 1069–1086.
2. **Клигман Е. П.** Собственные колебания оболочек вращения с конечной сдвиговой жесткостью // Краевые задачи упругих и неупругих систем: Сб. науч. тр. / Урал. науч. центр АН СССР. Свердловск, 1985. С. 91–97.
3. **Рапопорт И. М.** Колебания упругой оболочки, частично заполненной жидкостью. М.: Машиностроение, 1967.
4. **Норри Д., де Фриз Ж.** Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981.
5. **Сивак В. Ф., Телалов Ф. И.** Экспериментальное исследование колебаний цилиндрической оболочки, контактирующей с жидкостью // Прикл. механика. 1991. Т. 27, № 5. С. 63–68.

*Поступила в редакцию 11/X 2004 г.,  
в окончательном варианте — 4/IV 2005 г.*