

УДК 539.3

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ПОВЕДЕНИЯ СЖИМАЕМЫХ ТЕЛ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ПРИ КРУЧЕНИИ

Т. В. Гавриляченко, М. И. Карякин*

Ростовский государственный строительный университет, 344022 Ростов-на-Дону

* Ростовский государственный университет, 344090 Ростов-на-Дону

Для различных моделей нелинейно-упругих сжимаемых сред рассматривается задача о скручивании цилиндра с кольцевым поперечным сечением равными по величине и противоположными по направлению торцевыми моментами. Решение проводится при помощи полуобратного метода теории упругости. Дается качественное и количественное описание эффекта Пойнтинга, состоящего в изменении длины вала при его кручении. Приводится сравнение результатов численного и асимптотического (с сохранением лишь квадратичных относительно градиента перемещения слагаемых) решений для различных моделей нелинейно-упругого поведения материалов. Анализ полученных результатов показал, что в ряде случаев квазилинейная модель неприменима для изучения поведения нелинейно-упругих сжимаемых сред.

Явление изменения длины упругого цилиндра при его кручении экспериментально обнаружено и описано Пойнтингом в начале XX в. Количественное выражение этого эффекта невелико: при углах закручивания порядка $15 \div 20^\circ$ на единицу длины относительное удлинение образца не превышает 0,01. Однако при изготовлении прецизионной измерительной аппаратуры и экспериментальном определении упругих постоянных материалов учет влияния эффекта Пойнтинга необходим.

Открытое Пойнтингом явление можно объяснить с помощью нелинейной задачи кручения.

Проблема кручения сжимаемого (изменяющего свой объем при деформировании) цилиндра с учетом осевого удлинения рассматривалась как в известных монографиях по механике сплошной среды [1, 2], так и в исследованиях последних лет. Так, в [3] проведен анализ данной задачи на основе методов асимптотического исследования, в [4] она решена методом конечных элементов, численный анализ задачи о кручении круговых цилиндров проведен в [5, 6]. Однако в большинстве перечисленных работ рассматривались конкретные модели упругого материала.

Целью настоящей работы является качественная и количественная оценка эффекта Пойнтинга при использовании различных определяющих соотношений для изотропных сжимаемых материалов, сравнение поведения различных их моделей.

Основные соотношения. Вводятся отсчетная (недеформированная) и актуальная (деформированная) конфигурации среды. Обозначим через \mathbf{R} радиус-вектор материальной точки в актуальной конфигурации. Тензор второго ранга C , называемый градиентом деформации, задается соотношением $C = \text{grad } \mathbf{R}$, где grad — оператор градиента в базисе отсчетной конфигурации.

Тензор напряжений Пиола, определенный в отсчетной конфигурации, выражается через «истинный» тензор напряжений T следующим образом [1]:

$$D = (C^T)^{-1} T \det C,$$

где индекс t обозначает транспонирование.

Модель упругого материала характеризуется видом функции удельной потенциальной энергии деформации W . Для изотропного материала последняя может быть задана [1] как функция главных инвариантов I_k меры деформации Коши — Грина $G = CC^T$.

Определяющее соотношение для изотропного сжимаемого материала, обладающего потенциалом W , имеет вид

$$D = \frac{\partial W}{\partial C} = 2 \frac{\partial W}{\partial G} C, \quad W = W(I_1, I_2, I_3). \quad (1)$$

Постановка и метод решения задачи. Пусть упругий цилиндр (вал) с кольцевым поперечным сечением скручивается равными по величине и противоположными по направлению торцевыми моментами M_0 . Его длина до деформации l предполагается достаточно большой, а боковая поверхность — свободной от нагружения. Обозначим внешний радиус вала r_1 , а радиус полости r_0 .

Будем считать, что после деформации цилиндр переходит в цилиндр, а значит, отсчетную и актуальную конфигурации удобно рассматривать в цилиндрической системе координат. Цилиндрические координаты материальной частицы в отсчетной и актуальной конфигурациях обозначаются соответственно через r, φ, z и R, Φ, Z , а отвечающие им векторы ортонормированных базисов — $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ и $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{e}_Z$.

Процесс кручения цилиндрического вала описывается следующим преобразованием отсчетной конфигурации в актуальную:

$$R = P(r), \quad \Phi = \varphi + \psi z, \quad Z = \gamma z, \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad 0 \leq z \leq l, \quad (2)$$

где $P(r)$ — неизвестная функция, требующая определения; ψ — угол закручивания, отнесенный к единице длины; γ — удлинение вала при кручении. По этому преобразованию определяются градиент деформации, мера деформации Коши — Грина и ее главные инварианты. Затем из уравнения состояния (1) выражается тензор напряжений Пиола.

Будем считать, что напряженное состояние создается поверхностными силами, а влияние массовых несущественно. Тогда уравнение равновесия, записанное с использованием тензора напряжений Пиола, принимает вид

$$\operatorname{div} D = 0. \quad (3)$$

Здесь div — оператор дивергенции в координатах отсчетной конфигурации.

В отсчетной конфигурации в отсутствие нагружения на части поверхности тела с нормалью \mathbf{n} справедливо соотношение $\mathbf{n} \cdot D = 0$. С учетом этого граничное условие на боковой поверхности с единичной нормалью \mathbf{e}_r записывается в виде

$$\mathbf{e}_r \cdot D = 0. \quad (4)$$

Выражения для осевой силы Q и крутящего момента M , действующих в поперечном сечении скручиваемого вала, имеют вид

$$Q = \int_{S^*} \sigma_Z dS^* = \int_S D_{zZ} dS, \quad M_k = \int_{S^*} R \tau_{\Phi Z} dS^* = \int_S R D_{\varphi Z} dS, \quad (5)$$

где S^* и S — площади поперечного сечения в актуальной и отсчетной конфигурациях соответственно; $\sigma_Z = \mathbf{e}_Z \cdot T \cdot \mathbf{e}_Z$, $\tau_{\Phi Z} = \mathbf{e}_\Phi \cdot T \cdot \mathbf{e}_Z$ — компоненты тензора напряжений Коши; $D_{\varphi Z} = \mathbf{e}_\varphi \cdot D \cdot \mathbf{e}_Z$, $D_{zZ} = \mathbf{e}_z \cdot D \cdot \mathbf{e}_Z$ — компоненты тензора напряжений Пиола.

Поскольку торцы рассматриваемого вала не закреплены, то при кручении не возникает осевого усилия, и с учетом (5) краевые условия на торцах записываются в виде

$$\int_{S^*} \sigma_Z dS^* = \int_S D_{zZ} dS = 0, \quad \int_{S^*} R \tau_{\Phi Z} dS^* = \int_S R D_{\varphi Z} dS = M_0. \quad (6)$$

Решение нелинейной краевой задачи равновесия второго порядка (3), (4) относительно функции $P(r)$ проводится численно или аналитически.

После определения функции $P(r)$ строится выражение для осевой силы, которое в данном случае зависит от двух параметров: относительного удлинения вала γ и угла закручивания на единицу длины ψ .

Для оценки эффекта Пойнтинга достаточно по первому из условий (6) подобрать такие значения γ , которые при заданных значениях ψ обращают величину осевой силы в нуль.

Описанная схема построения решения носит название полуобратного [1] метода теории упругости. Этот метод достаточно эффективен, но применим к узкому классу задач, ограниченному набором простых геометрических преобразований тел канонической формы.

Полуобратный метод подробно освещен в литературе. Детальное его изложение в данной работе предложено с целью показать высокую степень его «алгоритмируемости». Вывод краевой задачи для реальной функции энергии W представляет собой цепочку достаточно громоздких преобразований. Однако отмеченная выше алгоритмируемость делает эффективным использование в подобных задачах средств компьютерной алгебры. Автоматическое генерирование и численный анализ приводимых ниже краевых задач для конкретных моделей нелинейно-упругих сред проводились с помощью программы, разработанной авторами в среде Maple V for Windows [6].

Ниже рассматривается ряд моделей нелинейно-упругих сжимаемых сред.

Двухконстантная физически линейная модель. Функция удельной потенциальной энергии деформации для этой модели задается выражением

$$W = \left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right) j_1^2 - 2\mu j_2 = \frac{\lambda + 2\mu}{8} I_1^2 - \frac{3\lambda + 2\mu}{4} I_1 + \frac{3}{8} (3\lambda + 2\mu),$$

где j_k — главные инварианты тензора деформации Коши — Грина $K = (1/2)(G - E)$; E — единичный тензор; λ и μ — постоянные Ламе. Здесь и далее $I_k = I_k(G)$. Краевая задача равновесия имеет вид

$$\begin{aligned} P'' &= \frac{1}{\eta} \left(P^3 \left(\frac{(\psi^2 r^2 + 1)^2}{r^2} + \nu \psi^2 (r^2 \psi^2 - 2) - \frac{\nu}{r^2} \right) - P'^3 r (1 - \nu) - P'^2 P \nu (\psi^2 r^2 - 1) - \right. \\ &- P^2 P' \nu \left(r \psi^2 - \frac{1}{r} \right) - P' r (\nu \gamma^2 - \nu - 1) - P \left(\psi^2 \gamma^2 (\nu - 1) + \psi^2 r^2 (\nu + 1) + \nu (1 - \gamma^2) + \frac{1}{r} \right) \left. \right), \\ \eta &= P^2 \nu (r^2 \psi^2 - 1) + 3P'^2 r^2 (1 - \nu) + r^2 (\nu \gamma^2 - \nu - 1), \\ P' r^2 (\nu \gamma^2 - \nu - 1) + P'^3 r^2 (1 - \nu) + P' P^2 \nu (1 + r^2 \psi^2) &= 0, \quad r = r_0, r_1. \end{aligned}$$

Здесь $\nu = \lambda / (2(\lambda + \mu))$.

Пятиконстантная модель Мурнагана [1]. Для этой модели функция удельной потенциальной энергии деформации задается в виде

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{4} \left(-3\lambda - 2\mu + \frac{9}{2} l + \frac{n}{2} \right) I_1 + \frac{1}{8} (\lambda + 2\mu - 3l - 2m) I_1^2 + \frac{1}{4} \left(-2\mu + 3m - \frac{n}{2} \right) I_2 - \\ &- \frac{m}{4} I_1 I_2 + \frac{1}{24} (l + 2m) I_1^3 + \frac{n}{2} (I_3 - 1) + \frac{3}{8} (3\lambda + 2\mu) - \frac{9}{8} l, \end{aligned}$$

где l , m , n — константы Мурнагана. При $l = m = n = 0$ эта модель переходит в модель физически линейного материала. Значения постоянных Ламе и Мурнагана для большого количества материалов приведены в [1].

Краевая задача равновесия для данной модели не приводится из-за ее громоздкости.

Трехконстантная модель Блейтца и Ко [1]. Для этой модели функция удельной потенциальной энергии деформации задается выражением

$$W = \frac{\mu}{2} (1 - \beta) \left(\frac{I_2}{I_3} + \frac{1}{\alpha} (I_3^\alpha - 1) - 3 \right) + \frac{\mu}{2} \beta \left(I_1 + \frac{1}{\alpha} (I_3^{-\alpha} - 1) - 3 \right).$$

Здесь α, β, μ — константы материала. При малых деформациях данная модель переходит в модель линейно-упругого материала с постоянными Ламе $\lambda = 2\mu\alpha$ и μ .

Упрощенный вариант этой модели получается при $\alpha = 1/2, \beta = 0$:

$$W = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{I_2}{I_3} + 2\sqrt{I_3} - 5 \right). \quad (7)$$

Краевую задачу равновесия для потенциала (7) можно записать в виде

$$P'' = \frac{1}{3} \left(\frac{P'}{r} - \frac{r^2 P'^4}{P'^3} \right), \quad P = \frac{r}{P'^3 \gamma}, \quad r = r_0, r_1.$$

Она имеет аналитическое решение

$$P(r) = \gamma^{-1/4} r, \quad \gamma = \left(1 + \frac{J_p}{S} \psi^2 \right)^{2/5}.$$

Здесь и далее S — площадь поперечного сечения вала до деформации; J_p — полярный момент этого сечения.

Для варианта модели Блейтца и Ко, названного в [1] гипотетическим ($\alpha = 1/2, \beta = 1$), функция удельной потенциальной энергии принимает вид

$$W = \frac{1}{2} \mu \left(I_1 + 2 \frac{1}{\sqrt{I_3}} - 5 \right),$$

а краевая задача равновесия представляется в виде

$$P'' = \frac{\psi^2 P^3 P'^3 r^2 \gamma + 2 P P' r^2 + P^3 P'^3 \gamma - 2 P'^2 r^3 - P'^4 P^2 r \gamma}{r^2 P (2r + P'^3 P \gamma)}, \quad P = \frac{r}{P'^3 \gamma}, \quad r = r_0, r_1.$$

Можно построить и приближенное (с сохранением в определяющих соотношениях лишь квадратичных относительно градиента перемещения слагаемых) решение рассматриваемой задачи, позволяющее обнаружить эффект Пойнтинга. При этом общее выражение для относительного удлинения цилиндра при небольших углах закручивания будет иметь вид

$$\frac{\Delta l}{l} = \gamma - 1 \approx \frac{-2W_{,11}W_{,2} + W_{,3}W_{,11} + W_{,3}W_{,2} + W_{,12}W_{,2}}{W_{,2}(3W_{,11} + 2W_{,2})} \frac{J_p}{4S} \psi^2, \quad (8)$$

где $W = W(j_1, j_2, j_3)$; $W_{,k} = \partial W / \partial j_k$; $W_{,ks} = \partial^2 W / \partial j_k \partial j_s$.

На рис. 1 представлены зависимости $\gamma(\psi r_1)$ для каждой из перечисленных моделей. Все расчеты проводились для отношения внутреннего и наружного радиусов цилиндра $r_0/r_1 = 0,01$. Сплошными линиями показаны результаты численного решения, штриховыми — результаты расчетов по приближенной формуле (8). Рис. 1,а соответствует двухконстантной модели при $\nu = 0,25$ (кривые 1) и $\nu = 0,49$ (кривые 2). Рис. 1,б отвечает трехконстантной модели Блейтца и Ко (кривые 1 — упрощенный вариант, кривые 2 — гипотетический). Рис. 1,в соответствует пятиконстантной модели Мурнагана (кривые 1 — медь, кривые 2 — сталь 35ХГСА). Значения постоянных Ламе и Мурнагана взяты из [1].

На рис. 2 изображены зависимости крутящего момента от величины угла закручивания в отсутствие удлинения, полученные численно. Кривая 1 соответствует гипотетическому варианту модели Блейтца и Ко, кривая 2 — модели Мурнагана для стали 35ХГСА.

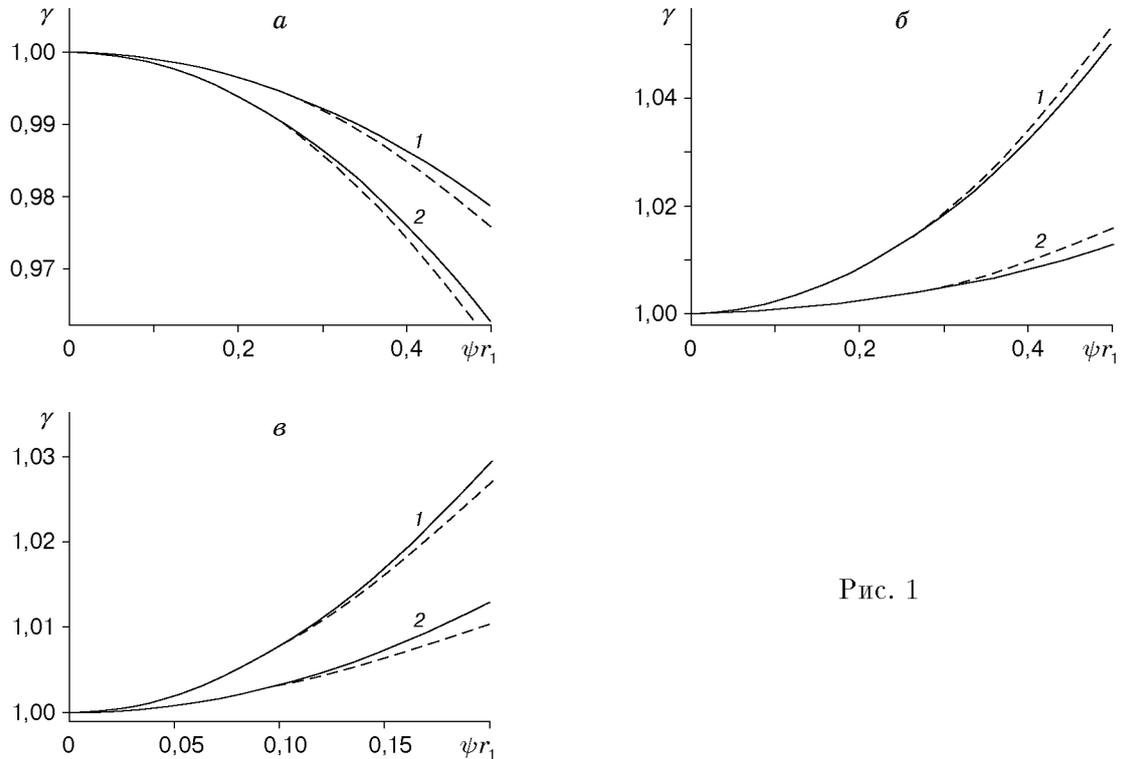


Рис. 1

Значения постоянных Ламе и Мурнагана для последней взяты из [1]. Отклонение данной зависимости от линейной пренебрежимо мало при не очень больших величинах ψr_1 для всех рассмотренных моделей, кроме пятиконстантной. Так, для цилиндра из стали 35ХГСА диаметром 2 см и длиной 10 см это отклонение составляет около 10% при развороте торцов относительно друг друга на угол 90° .

Асимптотика (8) согласуется с результатами численных расчетов и показывает, что физически линейная модель позволяет учесть некоторые особенности нелинейной теории (эффект Пойнтинга), однако ограничиваться ее рассмотрением при изучении деформирования упругих сжимаемых сред нельзя. Действительно, для модели Мурнагана выражение (8) зависит от четырех, а не от двух постоянных:

$$\frac{\Delta l}{l} = \gamma - 1 \approx -\frac{4\mu(2\mu + \lambda) + n\lambda + 4m\mu}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{J_p}{4S} \psi^2.$$

Этим объясняется качественное различие в поведении пятиконстантной модели (см. рис. 1, в) и ее двухконстантного приближения (см. рис. 1, а).

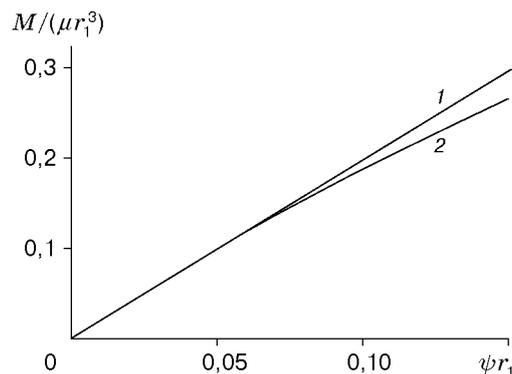


Рис. 2

Авторы выражают благодарность профессору Л. М. Зубову за плодотворное обсуждение данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
2. **Rivlin R. S.** The solution of problems in second order elasticity theory // J. Rational Mech. Anal. 1953. V. 2, N 9. P. 53–81.
3. **Chen M., Chen Z.** Second-order effect of an elastic circular shaft during torsion // Appl. Math. Mech. 1991. V. 12. P. 769–776.
4. **Koczyk S., Weese W.** FEM-Lösung des Problems der St.-Venantschen Torsion mit Hilfe der Wölbfunktion // Tech. Mech. 1991. V. 12. S. 125–130.
5. **Зубов Л. М., Овсеенко С. Ю.** Большие деформации кручения цилиндров из сжимаемых материалов // Вопр. динамики и прочности. Рига: Зинатне, 1982. Вып. 40. С. 109–117.
6. **Гавриляченко Т. В., Карякин М. И.** Методы компьютерной алгебры в задачах нелинейной теории упругости // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. II Междунар. конф., Ростов-на-Дону, 19–20 сент. 1996 г. Ростов н/Д: МП «Книга», 1997. Т. 1. С. 30–34.

*Поступила в редакцию 29/IX 1998 г.,
в окончательном варианте — 11/I 1999 г.*
