ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКИХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН ОТ ПРОИЗВОЛЬНОГО НЕОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА. АКУСТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Э. В. Никольский

(Новосибирск)

Показано, что задача распространения плоских волн в акустике, «падающих» под фиксированным углом к неоднородному полупространству («двумерная» задача), эквивалентна случаю нормального падения к некоторому «фиктивному» полупространству с соответствующей скоростью $v_2(z) = v_1(z) / \cos\alpha(z)$ («одномерная» задача).

Приведены алгоритмы, при помощи которых можно проводить приближенные (учитывающие только определенное число «вторичных» волн) и точные (с учетом всевозможных «вторичных» волн) вычисления волновых полей.

Рассматривается задача о распространении плоской нестационарной волны, падающей под некоторым фиксированным углом α_0 к полупространству, параметры которого суть произвольные функции только одной пространственной координаты z.

Показано, что такая задача в принципиальном смысле ничем не отличается от случая нормального падения плоских волн к полупространству. Иначе говоря, «двумерная» задача распространения плоских волн в акустике сводится к «одномерной», решение которой приведено в работе [1].

Пусть ось x является границей раздела двух полупространств *1* и *2*, волновые процессы в которых описываются одним волновым уравнением (акустический случай), причем верхнее полупространство *1* — однородное, нижнее *2* — неоднородное (фигура).

Как и в [1], будем предполагать, что скорость распространения возмущения v и плотность среды ρ есть произвольные функции глубины такие, что

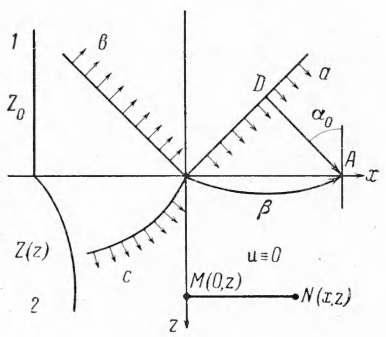
(а) волновое сопротивление

$$Z = v(z)\rho(z) \tag{1}$$

остается непрерывным;

(б) производная волнового сопротивления по координате z остается ограниченной во всем неоднородном полупространстве

$$\left|\frac{dZ(z)}{dz}\right| < N \tag{2}$$



Фиг. 1

В дальнейшем ограничения (а) и (б) отпадают, так как построенное решение допускает обобщение на случай разрывных сред.

Пусть в среде *1* находится генератор плоских волн, распространяющихся под некоторым фиксированным углом α_0 к неоднородному полупространству. Под процессом распространения плоских нестационарных волн в такой среде будем понимать решение уравнений акустики, удовлетворяющее следующим условиям. В любой фиксированный момент времени t_0 в среде имеются три фронта волн: (a) плоский фронт падающей волны; (b) плоский фронт отраженной волны; (c) криволинейный фронт преломленной волны, причем в области (a) — (c), зависящей от t_0, смещение точек $U(x, z, t) = 0$.

В окрестности фронта падающей волны задана произвольная функция $f(t)$, описывающая «начальное» смещение точек однородного полупространства во времени.

Требуется по заданной $f(t)$ определить смещение любой точки среды так, чтобы выполнялись условия (a), (b) и (c).

Введение такой идеализации процесса распространения плоских волн основывается на следующих предпосылках.

1) Каждый луч плоской падающей волны удовлетворяет принципу Ферма, иначе говоря, вдоль всякого луча выполняется соотношение

$$\sin\alpha(z) / v(z) = \text{const} = \sin\alpha_0 / v_0 \tag{3}$$

2) Легко показать, что время пробега по лучу βA, удовлетворяющему (3), неменьше времени пробега по прямому лучу DA. Другими словами, возмущения, распространяющиеся вдоль лучей, удовлетворяющих (3), не могут «обогнать» возмущения, распространяющиеся по лучам прямых волн, для любой точки неоднородной среды и для любого закона изменения скорости $v(z)$.

3) В силу того что параметры среды суть функции только z, можно утверждать, что процесс распространения «плоских волн» в такой среде является «автомодельным», распространяющимся со скоростью $v^* = v_0 \csc\alpha_0$ вдоль оси x, т. е. если рассмотреть смещение $\mathbf{U}(t, x, z)$ в двух точках $M(0, z)$ и $N(x, z)$, лежащих на одной горизонтали, то

они тождественны, если не учитывать время запаздывания

$$t(x) = (x / v_0) \sin \alpha_0 \tag{4}$$

начала колебаний одной точки относительно другой. Иначе говоря, смещение точек среды $\mathbf{U}(x, z, t)$ является функцией не трех, а двух независимых переменных, т. е.

$$\mathbf{U}(t, x, z) = \mathbf{U}(\xi, z) \qquad (\xi = t - (x / v_0) \sin \alpha_0) \tag{5}$$

Условия (5) фактически означают, что «двумерная» задача акустики вырождается в «одномерную» в случае падения плоских нестационарных волн.

Для построения такого решения необходимо решать систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно смещения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left\{\rho(z) v^2(z)\left[\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\right]\right\} &= \rho(z)\frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial z}\left\{\rho(z) v^2(z)\left[\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\right]\right\} &= \rho(z)\frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{6}$$

Задачу Коши для (6) в случае падающих плоских волн сформулировать затруднительно, поскольку в момент времени $t = 0$ предполагается известным не все волновое поле, а только часть его (на фронте падающей плоской волны a). Чтобы избежать этой трудности, перейдем к новым переменным ξ и τ. Переменная ξ (аналог времени) определена в (5), переменную τ (аналог глубины z) определим формулой

$$\tau = \int_0^z \frac{\cos \alpha(z)}{v(z)} dz \tag{7}$$

где $\alpha(z)$ имеет смысл угла падения и подчиняется соотношению (3). В силу (5) и (7), можно записать

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial}{\partial z} \to \frac{\cos \alpha(\tau)}{v(\tau)}\frac{\partial}{\partial \tau}, \qquad \frac{\partial}{\partial x} \to -\frac{\sin \alpha_0}{v_0}\frac{\partial}{\partial \xi} = -\frac{\sin \alpha(\tau)}{v(\tau)}\frac{\partial}{\partial \xi} \tag{8}$$

и система (6) примет вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial \xi}\Phi(\xi, \tau) = 0 \\ \frac{\partial^2 U_z(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} + 2p'(\tau)\frac{\partial U_z(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U_z(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \\ + \sin \alpha(\tau)\left[\frac{v'(\tau)}{v(\tau)} + \frac{\rho'(\tau)}{\rho(\tau)}\right]\Phi(\xi, \tau) + \cos \alpha(\tau) \sin \alpha(\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\Phi(\xi, \tau)}{\cos \alpha(\tau)} = 0 \end{gathered} \tag{9}$$

где

$$\begin{gathered} \Phi(\tau, \xi) \equiv \sin \alpha(\tau)\frac{U_z(\xi, \tau)}{\partial \tau} + \cos \alpha(\tau)\frac{\partial U_x(\xi, \tau)}{\partial \xi} \\ p(\tau) \equiv \frac{1}{2}\ln\frac{v(\tau)\rho(\tau)}{\cos \alpha(\tau)}\frac{\cos \alpha_0}{v_0 \rho_0}, \quad p(\tau) \equiv 0 \text{ при } \tau < 0 \end{gathered} \tag{10}$$

а штрих означает производную по τ.

Для системы (9) уже возможна постановка задачи Коши: найти решение системы (9) с начальными данными

$$U_z(\xi, \tau)|_{\xi \leqslant 0} = \delta(\xi - \tau), \qquad U_x(\xi, \tau)|_{\xi \leqslant 0} = \operatorname{tg} \alpha_0 \delta(\xi - \tau) \tag{11}$$

Здесь δ — символ дельта-функции Дирака.

Таким образом, система (6) в классе плоских волн отвечает системе (9) с начальными данными типа (11), которая, в свою очередь, допускает понижение порядка.

Покажем, что система (9) с начальными данными (11) эквивалентна системе

$$\begin{gathered} \sin \alpha(\tau)\frac{\partial U_z(\xi, \tau)}{\partial \tau} + \cos \alpha(\tau)\frac{\partial U_x(\xi, \tau)}{\partial \xi} = 0 \\ \sin \alpha(\tau)\frac{\partial U_z(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \cos \alpha(\tau)\frac{\partial U_x(\xi, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\rho'(\tau)}{\rho(\tau)}\cos \alpha(\tau)\, U_x(\xi, \tau) = 0 \end{gathered} \tag{12}$$

с теми же самыми начальными условиями (11).

Действительно, левая часть первого уравнения системы (12) совпадает с первым уравнением (10). Следовательно, первое уравнение (9) удовлетворяется автоматически, а второе преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 U_z(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} + 2p'(\tau)\frac{\partial U_z(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U_z(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} \tag{13}$$

Если второе уравнение (12) продифференцировать по ξ и воспользоваться первым уравнением (12), то придем к соотношению

$$\sin\alpha(\tau)\left[\frac{\partial^2 U_z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 U_z}{\partial \tau^2} - 2p'(\tau)\frac{\partial U_z}{\partial \tau}\right] = 0 \tag{14}$$

Поскольку $\sin\alpha(\tau) \neq 0$, так как рассматривается «косое» падение, то (14) совпадает с (13). Таким образом, любое решение $U(\xi, \tau)$ системы (12), содержится среди решений $W(\xi, \tau)$ системы (9). Составим разность $\varepsilon(\xi, \tau) = W(\xi, \tau) - U(\xi, \tau)$, которая, очевидно, также будет являться решением системы (9), но уже с нулевыми начальными данными, поскольку начальные данные для W и U одни и те же. Следовательно, $\varepsilon(\xi, \tau) \equiv 0$, из чего следует утверждение об эквивалентности систем (9) и (12) для плоских волн, т. е. для одних и тех же начальных условий типа (11).

Проводя аналогичные рассуждения, можно показать, что система (12) с начальными данными (11) эквивалентна уравнению (13) (для определения вертикальной компоненты смещения) с начальными данными

$$U_z(\xi, \tau)|_{\xi \leqslant 0} = \delta(\xi - \tau) \tag{15}$$

которое в точности совпадает с (8) из [1].

Если в уравнении (13) перейти от τ к координате z, согласно (7) и (8), то получим

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\rho(z)\frac{v^2(z)}{\cos^2\alpha(z)}\frac{\partial U_z(\xi, z)}{\partial z}\right] = \rho(z)\frac{\partial^2 U_z(\xi, z)}{\partial \xi^2} \tag{16}$$

Сравнивая (16) с (15) из [1], видим, что «двумерная» задача в акустике для плоских волн эквивалентна «одномерной» задаче, роль скорости в которой играет выражение $v(z) / \cos\alpha(z)$, а роль времени — переменная ξ, определенная в (5).

В [1] было показано, что для одних и тех же начальных данных (15) уравнение (13) эквивалентно или системе интегральных соотношений вида

$$\begin{aligned} \Psi_1(\xi_0, \tau) &= -\int_{\tau}^{\xi_0} \Psi_2(\xi_0, x)\, dp(x) \\ \Psi_2(\xi_0, \tau) &= \delta(2\xi_0 - 2\tau) + \int_0^{\tau} \Psi_1(\xi_0 - \tau + x, x)\, dp(x) \end{aligned} \tag{17}$$

или системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_1(\xi_0, \tau)}{\partial \xi} &= \frac{\partial \Psi_1(\xi_0, \tau)}{\partial \tau} - p'(\tau)\,\Psi_2(\xi_0, \tau) \\ \frac{\partial \Psi_2(\xi_0, \tau)}{\partial \xi} &= -\frac{\partial \Psi_2(\xi_0, \tau)}{\partial \tau} + p'(\tau)\,\Psi_1(\xi_0, \tau) \end{aligned} \tag{18}$$

где $p(\tau)$ определено в (10), величина же ξ_0 имеет вид

$$\xi_0 = {}^1/_2(\xi + \tau) \tag{19}$$

Вертикальная компонента смещения определяется в этом случае формулой

$$U_z(\xi, \tau) = [\Psi_1(\xi_0, \tau) + \Psi_2(\xi_0, \tau)]\, e^{-p(\tau)} \tag{20}$$

Горизонтальную же, как легко показать, можно определить по формуле

$$U_x(\xi, \tau) = [\Psi_2(\xi_0, \tau) - \Psi_1(\xi_0, \tau)]\, e^{-p(\tau)} \operatorname{tg}\alpha(\tau) \tag{21}$$

Из системы интегральных соотношений (17) следует, что если $|p'(x)| < \infty$, то решение существует всегда [1]. Кроме того, решение удовлетворяет перечисленным в начале статьи условиям (a) — (c) и при $\xi_0 < \tau$ тождественно обращается в ноль. Другими словами, условие $\xi_0 < \tau$, которое, используя (19), (5) и (7), можно записать в виде

$$t - \frac{x}{v_0}\sin\alpha_0 - \int_0^z \frac{\cos\alpha(z)}{v(z)}\, dz < 0 \tag{22}$$

[1] Доказательство этого положения имеется в [1].

определяет фронт преломленной волны. В однородной среде, как легко видеть, неравенство (22) есть условие для определения фронта обычной плоской волны.

Итак, чтобы найти решение системы (6) в классе плоских волн, необходимо решить:

а) либо систему дифференциальных уравнений (12) или (18);

б) либо систему интегральных соотношений (17);

в) либо дифференциальное уравнение (13) или (16) с соответствующими начальными условиями типа (11), (15) и воспользоваться соотношениями (20), (21).

Отметим, что система, аналогичная (18), получена в работе [2] для более широкой задачи — падения плоской нестационарной волны на упругом полупространстве. Однако в этой работе отсутствует система интегральных соотношений типа (17), что не позволило автору [2] провести оценки в методе последовательных приближений. В ней нет также обобщения на случай разрывных сред и не дано алгоритмов вычисления полного волнового поля с учетом «вторичных» волн. Остановимся на этих вопросах.

Особыми точками интегральных соотношений (17) будут точки, в которых функция $|p'(x)|$ не ограничена. Эта неограниченность может быть вызвана двумя факторами:

а) разрывом волнового сопротивления [1] $Z = \rho(x)v(x)$, если отказаться от условия (2),

б) наличием точки «заворота» луча, в которой $\cos\alpha(x) = 0$. С формальной точки зрения эти оба случая одинаковы.

Чтобы обобщить решение на случай неограниченных $|p'(x)|$, рассмотрим неоднородный слой между двумя однородными полупространствами, вырождающийся в резкую границу раздела (т. е. мощность слоя $H \to 0$ с сохранением волновых сопротивлений вне слоя, следовательно, $|p'(x)| \to \infty$).

В этом случае все «вторичные» волны в слое как бы «собираются» в одну точку в один и тот же момент времени. Поэтому от решения $U_z(\xi, \tau)$ надо перейти к полной интегральной амплитуде, определенной выражением

$$S_z = \int_0^\infty U_z(\xi, \tau)\, d\xi \tag{23}$$

причем из фактических соображений S_z должна быть конечна [1]. Аналогично [1], формальное доопределение решения в случае $|p'(x)| = \infty$ можно провести, положив для верхнего полупространства

$$U_z(\xi_1) = -\frac{\chi(\tau_2) - \chi(\tau_1)}{\chi(\tau_2) + \chi(\tau_1)}\,\delta(\xi - \tau_1) \tag{24}$$

для нижнего полупространства

$$U_z(\xi_2) = \frac{2\chi(\tau_1)}{\chi(\tau_2) + \chi(\tau_1)}\,\delta(\xi - \tau_2) \tag{25}$$

если начальные условия были заданы в виде (15).

В выражениях (24), (25) нормальный импеданс среды определяется так [3]:

$$\chi(\tau_i) = \rho(\tau_i)\, v(\tau_i) / \cos\alpha(\tau_i) \qquad (i = 1, 2) \tag{26}$$

а τ_1 и τ_2 — некоторые точки соответственно верхнего и нижнего однородных полупространств. Определенные таким образом функции $U_z(\xi_1)$ и $U_z(\xi_2)$ можно рассматривать как новые начальные импульсы для однородных полупространств.

Отметим, что формулы (24), (25) можно обобщить, как это делается в [3], и на случай комплексных импедансов среды, т. е. использовать их в области геометрической тени, где $\chi(\xi_i)$ — чисто мнимая величина.

Обратимся теперь к вопросу приближенного и точного вычисления волнового поля. Будем для определенности говорить об отраженной волне, т. е. положим $\tau = 0$.

Во многих практически интересных случаях часто оказывается достаточно рассмотреть не все волновое поле, а ограничиться волнами, испытавшими одно отражение в слое [1]. Это объясняется следующим образом.

Как известно, отраженная волна $\varphi(t)$, отвечающая некоторой произвольной непрерывной функции $f(t)$ на фронте «падающей» волны, определяется как

$$\varphi(t) = \int_0^t U_\delta(\xi) f(t - \xi)\, d\xi \tag{27}$$

Здесь $U_\delta(\xi)$ — решение в случае начальных данных (11), (15).

[1] К этому же относятся случаи, когда волновое сопротивление непрерывно, а производная его не ограничена.

Если функция $|p'(x)|$ — кусочно-непрерывна, то всегда $U_\delta(\xi)$ можно разбить на две части: разрывную $U_1(\xi)$, отвечающую волнам, испытавшим одно отражение в слое, и непрерывную $U_2(\xi)$, отвечающую всем прочим «вторичным» волнам [1]. Тогда

$$\varphi(t) = \int_0^t U_1(\xi) f(t-\xi)\, d\xi + \int_0^t U_2(\xi) f(t-\xi)\, d\xi \tag{28}$$

Если $f(t)$ — сильно осциллирующая функция, по сравнению с $U_2(\xi)$, то второй член правой части (28) дает некоторый фон, который во многих случаях можно не учитывать, и волновое поле вычислять по формуле

$$U(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t p'\left(\frac{\xi}{2}\right) f(t-\xi)\, d\xi \tag{29}$$

Для каждого конкретного случая задания параметров среды и начального импульса $f(t)$ можно провести, используя формулы [1], оценки, позволяющие точно оценить влияние второго члена. Однако, это, вероятно, нецелесообразно делать, поскольку для системы (18) можно написать разностную схему, в результате решения которой будем иметь все волновое поле с учетом всевозможных вторичных волн, и после этого сравнивать точное вычисление с приближенным по формуле (29). Такое сравнение проводилось и для многих практических задач оказалось вполне хорошим.

Разностная схема для (18) получается такой же, как и в [1]. Положим $\xi = k\Delta\xi$, $\tau = n\Delta\tau$, счет будем вести по характеристикам, т. е. считаем $\Delta\xi = \Delta\tau$. Разностную схему с учетом обобщения на случай разрывных сред (24), (25) можно записать в виде

$$U_1(k+1, n) = (1+q_n)\, U_1(k, n+1) - q_n U_2(k, n)$$

$$U_2(k+1, n) = (1-q_{n-1})\, U_2(k, n-1) + q_{n-1} U_1(k, n) \tag{30}$$

$$\left(q_n = \frac{\rho_{n+1}v_{n+1} / \cos\alpha(n+1) - \rho_n v_n / \cos\alpha(n)}{\rho_{n+1}v_{n+1} / \cos\alpha(n+1) + \rho_n v_n / \cos\alpha(n)} = \frac{\chi(n+1) - \chi(n)}{\chi(n+1) + \chi(n)}\right)$$

Компоненты смещения U_z и U_x определяются по формулам

$$U_z(k, n) = U_1(k, n) + U_2(k, n), \qquad U_x(k, n) = \operatorname{tg}\alpha(n)\,[U_2(k, n) - U_1(k, n)] \tag{31}$$

Легко показать, что разностная схема (30) аппроксимирует (18) с точностью $O(\Delta\tau)$, сходится и устойчива.

Отметим, что (30) допускает обобщение на случай комплексных значений q_n, $\Delta\tau$, U_1 и U_2, иначе говоря, по ней можно считать и в области геометрической тени.

В заключение, как нам кажется, имеет смысл остановиться на решении волнового уравнения в такой среде. Задача ставится так: найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} = \frac{1}{v^2(z)}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{32}$$

если на неоднородное полупространство «падает» плоская нестационарная волна под некоторым углом α_0. Рассуждая аналогично тому, как это делалось в начале статьи, и используя (5), (7) и (8), приходим к следующей задаче Коши:
найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 U(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} + 2p'(\tau)\frac{\partial U(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} \quad \left(p(\tau) \equiv \frac{1}{2}\ln\frac{v(\tau)}{\cos\alpha(\tau)}\frac{\cos\alpha_0}{v_0}\right) \tag{33}$$

с начальными данными

$$U(\xi, \tau)\big|_{\xi\leqslant 0} = \delta(\xi - \tau) \tag{34}$$

Сравнивая задачи (33), (34) и (13), (15), видим, что они фактически одинаковы. Отличие состоит в том, что в задаче (33), (34) параметр $p(\tau)$ несколько другой, отличается от (10) знаком и тем, что $\rho(\tau) = \mathrm{const}$.

Иначе говоря, все, что относилось к $U_z(\xi, \tau)$, в одинаковой степени относится к $U(\xi, \tau)$ с той поправкой в $p(\tau)$, о которой говорилось выше.

Поступила 2 VIII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский Э. В. Отражение плоских упругих волн от произвольного неоднородного слоя в случае нормального падения. ПМТФ, 1964, № 4.
2. Scholte J. G. J. Obligue Propagation of Waves in Inhomogeneus Media. Geiophys. J. Roy. Astronom. Soc., 1962, vol. 7, No. 2, December.
3. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. Изд-во АН СССР, 1957