РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
2008, том 44, № 4

УДК 004.922

О МОДЕЛИ БИНОКУЛЯРНОГО ВИЗУАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА

А. М. Ковалев

Институт автоматики и электрометрии СО РАН, г. Новосибирск
Конструкторско-технологический институт научного приборостроения СО РАН, г. Новосибирск
E-mail: amkov@ngs.ru

Предлагается дробно-квадратичная функция отображения евклидова пространства на внутренность шара модели Клейна пространства Лобачевского. Отображение учитывает горизонтальный эмпирический гороптер как особенность бинокулярного зрения. Приведены сравнения теоретических и экспериментальных данных. Показаны эффекты обратной перспективы и сверхконстантности размеров предметов.

Введение. В [1, 2] рассмотрена дробно-линейная функция (ДЛФ), которая преобразует пространство, окружающее наблюдателя, в пространство сенсорной модели. Показано, что сенсорная модель совпадает с моделью Клейна гиперболического визуального пространства (ВП) в определении плоскости, прямой и движений. ДЛФ соответствует монокулярному зрению, учитывает редуцированную модель аккомодирующего глаза, а также принимает во внимание вращательные движения глаза и головы наблюдателя. В сенсорной модели соблюдается психофизический закон Эммерта, а в ВП – закон Вебера – Фехнера для радиальных расстояний. При больших удалениях предметов модель ограниченно пригодна для бинокулярного зрения. На малых расстояниях при больших углах конвергенции глаз модель не состоятельна по двум причинам:

1) не учитывается эмпирический гороптер*, описанный в [3];

2) игнорируется аномальное поведение так называемых параллельных аллей (P-аллеи), эквидистантных аллей (D-аллеи) и фронтопараллельных кривых (H-кривые), описанных в [4].

С геометрической точки зрения ДЛФ является идеальным проективным отображением, сохраняющим двойное отношение четырех точек прямой. Феномен эмпирического гороптера искажает проективное пространство, и поэтому требуется другая функция, которая могла бы компенсировать эти искажения. Предлагается дробно-квадратичное отображение, которое решает проблемы бинокулярного зрения и открывает эффекты обратной перспективы и увеличения константности размеров предметов.

---

* В теории бинокулярного зрения гороптер – это локус пространственных точек, которые проецируются на соответственные точки сетчаток глаз.

Циклопический глаз. Стереоскопическое бинокулярное зрительное восприятие можно свести к монокулярному – циклопическому. Для решения этой задачи нужно определить:

1) направление бинокулярного взгляда,
2) расположение эгоцентра,
3) геометрическое место точек, равноудаленных от эгоцентра,
4) функцию отображения пространства.

Первые два определения могут быть найдены в [3], третье – в [4] и четвертым будет результат исследований, проведенных в данной работе.

Эпиполярная система координат Гельмгольца для задания положения глаз (L – левого, R – правого) показана на рис. 1. Ось X проходит через неподвижные точки обоих глаз – центры вращения. Ось Z совпадает с носозатылочной осью, лежит в медиальной плоскости головы и представляет главную зрительную ось циклопического глаза C. Направление бинокулярного взгляда совпадает со зрительной осью глаза C, которая проходит через центр вращения O, точки фиксации F', F и составляет угол ϕ с осью Z. Барбейто и Оно [3, p. 599] «контролировали фиксацию и нашли, что эгоцентр расположен вблизи плоскости роговиц посередине между глазами». По-видимому, можно считать, что эгоцентр совпадает с центром O глаза C и является началом эпиполярной системы координат XYZ. Как следует из экспериментов Фоли [4, p. 164], в эпиполярной плоскости геометрическим местом точек, равноудаленных от эгоцентра, является окружность с радиусом r, а не круг Вит-Мюллера (или изовергентный круг) с постоянным углом конвергенции γ. Таким образом, можно отказаться от биполярной системы координат и проводить исследования бинокулярного зрения в декартовой системе (x, y, z) или в полярной системе координат (r, ϕ, θ), где r – расстояние до точки фиксации, ϕ – широта-азимут, θ – долгота-возвышение. Если учитывать вращательные движения глаза и головы наблюдателя [1], то циклопический глаз ничем не отличается от обыкновенного. Основное отличие состоит в функциях отображения евклидова пространства.

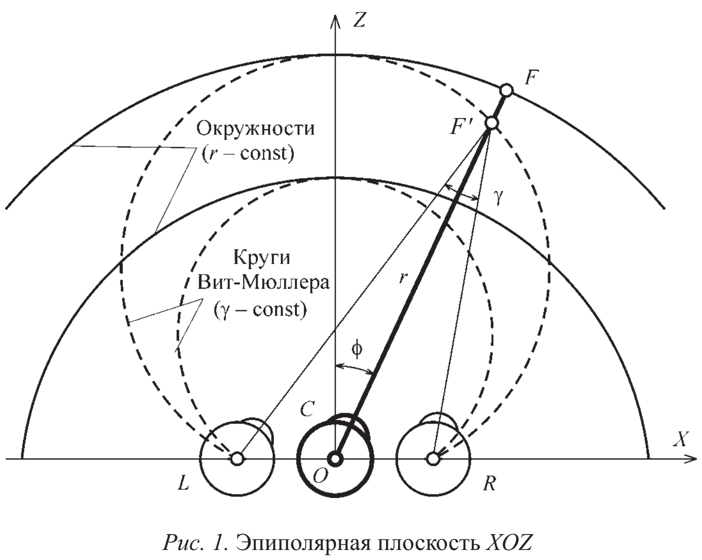


Рис. 1. Эпиполярная плоскость *XOZ*

Функции отображения. Пусть окружающее наблюдателя пространство задано в полярной системе (r, ϕ, θ), пространство модели Клейна – в системе (q, ϕ_q, θ_q), ВП – в системе $(\rho, \varphi, \vartheta)$, а центр проекции расположен в начале систем координат. Тогда пространственный образ окружающей среды, проективную сенсорную модель, или модель Клейна для монокулярного зрения [2], можно получить с помощью ДЛФ отображения вида

$$r \mapsto \frac{rc}{r+d} = rf_m(r) = q_m, \quad \phi_q = \phi, \quad \theta_q = \theta, \tag{1}$$

где $c = kd$ – радиус кривизны пространства, k – масштабный коэффициент, d – личностная константа, равная гиперфокальному расстоянию, или «началу» бесконечности; $f_m(r)$ – функция проективного преобразования. Конечная величина масштабного коэффициента не влияет на качественные характеристики отображения. Поэтому в данной работе положим $k = 1$, $c = d$, а все расстояния будем измерять в метрах.

От модели Клейна легко перейти к гиперболическому ВП – пространству Лобачевского [2]:

$$\rho_m = c\,\mathrm{arth}(q_m/c) = \frac{c}{2}\ln\left(1 + 2\frac{r}{d}\right), \quad \varphi = \phi_q, \quad \vartheta = \theta_q. \tag{2}$$

Получено уравнение для субъективного ощущения физического расстояния. На больших расстояниях при $r \gg d/2$ – это закон Вебера – Фехнера. На малых расстояниях при $r \to 0$ – это закон Стивенса, поскольку $\rho_m \to r$. Таким образом, только в малой окрестности наблюдателя ВП изоморфно и изометрично евклидову пространству, что подтверждает выводы Индоу [4]. В то же время эта особенность подчеркивает отсутствие у монокулярного зрения феномена эмпирического гороптера. На рис. 2, *a* в горизонтальной плоскости $\theta = \theta_q = 0$ показано изображение геодезических линий, перпендикулярных оси Z (Н-кривые) и оси X (Р-аллеи), полученных путем обратного отображения $q_m \mapsto r$, $\phi = \phi_q$. Это – гиперболы, центры которых расположены на осях X

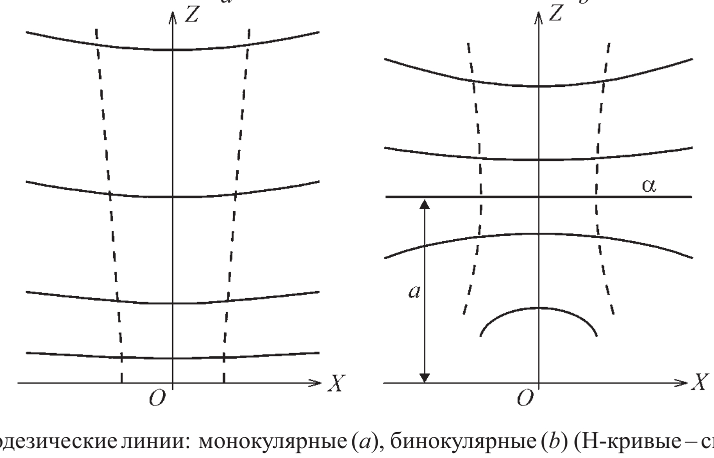


Рис. 2. Геодезические линии: монокулярные (*a*), бинокулярные (*b*) (Н-кривые – сплошные линии, Р-аллеи – штриховые линии)

и Z [1]. Фронтопараллельные Н-кривые горизонтального эмпирического гороптера и характерный вид Р-аллей, расширяющихся «книзу», показаны на рис. 2, b. Семейство Н-кривых содержит линию α, которая практически прямолинейная. Она расположена на расстоянии $z = a$, которое называют "abathic distance". При $z > a$ Н-кривые выпуклые, при $z < a$ Н-кривые вогнутые.

Найдем отображение $r \mapsto q_c = rf_c(r)$ в виде (1) для циклопического глаза. Сначала определим требования к функции проективного преобразования $f_c(r)$ из условий: $0f_c(0) = 0$, $af_c(a) = a$, $rf_c(r)_{r \to \infty} = c$. Первые два условия означают, что вдоль радиальной линии отображение имеет две неподвижные точки: $r = 0$ и $r = a$. При вращении циклопического глаза должен появиться круг или сфера α_c «абатического» радиуса a. Третье условие свидетельствует о том, что циклопический глаз не может сфокусироваться на оптическую бесконечность лучше, чем обыкновенный глаз. Итак, проективная функция $f_c(0)$ не определена, $f_c(a) = 1$ и $f_c(r)_{r \to \infty} \to c/r$. Если сравнить ход Н-кривых на рис. 2, a, b, то легко определить требования к производной $f_c'(r)$. Из (1) $f_m(r) = c/(r + d)$, а производная $f_m'(r) = -c/(r + d)^2$ отрицательна и монотонно убывает с увеличением расстояния r. В отличие от $f_m'(r)$ производная $f_c'(r)$ должна изменять знак при переходе через границу $r = a$ и становиться равной нулю на границе: $f_c'(a) = 0$. Таким образом, при $0 < r < a$ должен возникнуть эффект обратной перспективы. Условия $f_c(a) = 1$ и $f_c'(a) = 0$ означают, что при $r = a$ отображение должно сохранять не только значение отображаемой функции, но и величину ее первой производной.

Всем поставленным требованиям удовлетворяет дробно-квадратичная функция (ДКФ) следующего вида:

$$r \mapsto \frac{rc}{(r-a)^2/(r+b)+d} = rf_c(r) = q_c, \quad \phi_q = \varphi, \quad \theta_q = \theta. \tag{3}$$

Параметр b определяет степень константности размеров предметов и силу обратной перспективы. Чем больше b, тем выше константность и слабее обратная перспектива. Между параметрами ДКФ существует предельное соотношение: $2a + b \le c$. Оно появляется из следующего условия: все точки q_c должны быть действительными и лежать внутри фундаментального круга $q_c \le c$. Ясно, что значение абатического радиуса $a \le c/2$. И последнее, при $\theta_q \ne 0$ возникает изотропная пространственная модель бинокулярного ВП.

Гороптерные кривые. В модели Клейна прямые являются хордами фундаментального круга радиуса c. Если хорды параллельны осям X или Z декартовой системы, то возникают прообразы Н-кривых и Р-аллей. Эквидистантные линии – эллипсы – прообразы D-аллей. Большая ось эллипсов равна $2c$ и совпадает с одной из координатных осей. Образы Н-кривых, Р- и D-аллей в евклидовом пространстве можно получить с помощью обратного дробно-квадратичного отображения, которое является решением обыкновенного квадратного уравнения:

$$q_c \mapsto r = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A}, \tag{4}$$

$$A = c - q_c, \quad B = q_c(c - 2a) - bc, \quad C = q_c(a^2 + bc).$$

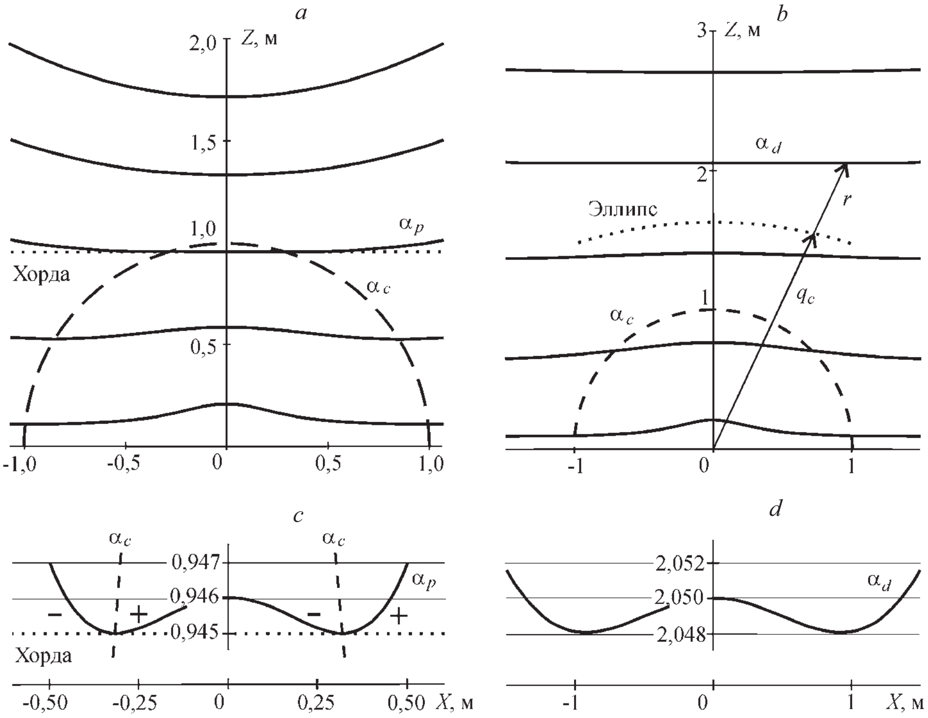


Рис. 3. Н-кривые в евклидовой плоскости: геодезические (*a*), эквидистантные (*b*), увеличенные геодезическая α_p (*c*) и эквидистантная α_d (*d*). Параметры функции преобразования: $a = 1{,}0$, $b = 0{,}1$, $c = 2{,}2$

Н-кривые в виде геодезических и эквидистантных линий, построенных с помощью (4) для наблюдателя с легкой миопией $\simeq 0{,}45$ дптр ($c = 2{,}2$ м), показаны на рис. 3.

На рис. 3, *a* изображены фронтопараллельные геодезические линии и круг α_c с радиусом $a = 1$ м. Круг делит плоскость *XOZ* на две области. Во внешней области все Н-кривые выпуклые, во внутренней – вогнутые. Рассмотрим геодезическую α_p, пересекающую круг α_c. Прообразом кривой является хорда в модели Клейна, изображенная точечной прямой.

На рис. 3, *c* дано увеличенное изображение этой выпукло-вогнутой геодезической. Символы «–» и «+» – знаки производной функции $\alpha_p = z(x)$. По мере приближения к хорде производная $z'(x)$ приближается к нулю. На границах круга α_c происходит смена знака производной, и геодезическая становится вогнутой кривой. Максимальная вогнутость достигается на оси *Z*. Такие же процессы происходят со всеми геодезическими, пересекающими круг α_c на разных расстояниях по координате z. Кривая α_p выбрана только потому, что является практически прямолинейной при большом поле зрения: $\phi = \pm 25°$. Нелинейность $\simeq 0{,}1$ %.

На рис. 3, *b* изображены фронтоэквидистантные линии, которые в евклидовой плоскости более фронтопараллельны, нежели геодезические. Причина в том, что прообразами этих линий являются эллипсы, которые изначально вогнуты. На малых расстояниях по координате z при больших эксцентриситетах эллипсов вогнутость геодезических и эквидистант практически совпадает, а на больших расстояниях по z увеличивается вогнутость эллипсов, которая компенсирует выпуклость эквидистантных кривых.

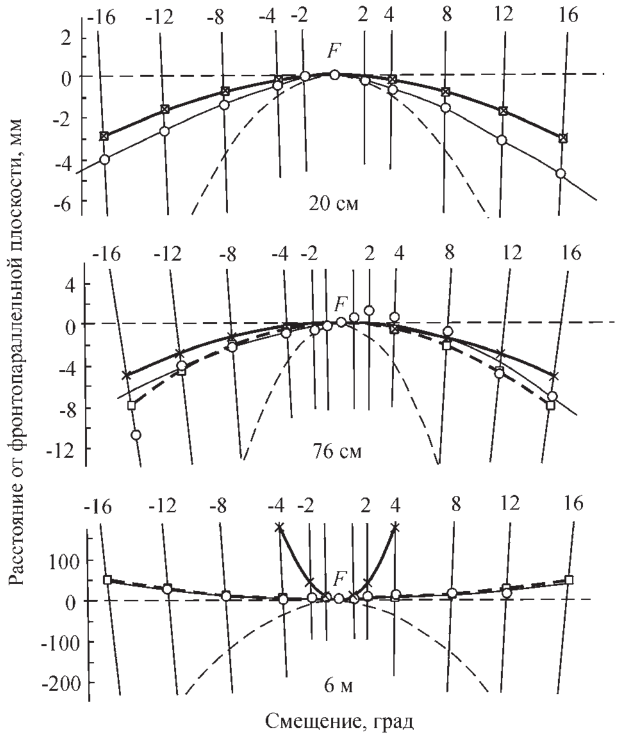


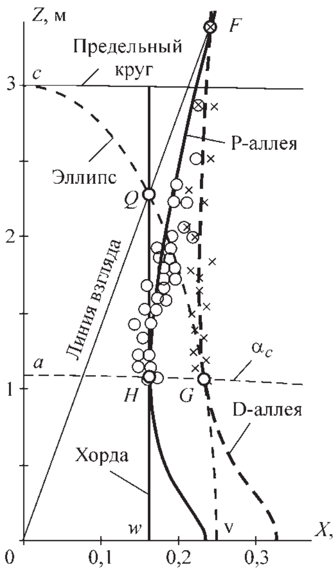
Рис. 4. Эксперимент Огли (× – геодезическая, □ – эквидистанта, ○ – данные Огли, штриховые кривые – круги Вит-Мюллера). Параметры функции преобразования: $a = 1{,}0$, $b = 0{,}1$, $c = 2{,}2$

На рис. 3, d в увеличенном масштабе показана выпукло-вогнутая эквидистанта α_d с «линейным» участком на расстоянии $z \simeq 2$ м. В поле зрения $\phi = \pm 30°$ нелинейность $\simeq 0{,}1$ %.

Сравним полученные результаты с известными экспериментальными данными Огли. Гороптер, видимый относительно фронтопараллельных плоскостей, в поле зрения $\phi = \pm 16°$ [3, p. 58, Fig. 2.22] изображен на рис. 4. Графики геодезических и эквидистантных Н-кривых, рассчитанные по формуле (4) для расстояний 20 см, 76 см и 6 м, наложены на соответствующие экспериментальные данные. На расстоянии 20 см геодезическая и эквидистанта практически совпадают и их отклонение от плоскости на ≈1,0–1,5 мм меньше, чем в эксперименте. На расстоянии 76 см вогнутые геодезическая и эквидистанта располагаются симметрично относительно экспериментальной кривой с погрешностью $\simeq 2{,}5$ %. На расстоянии 6 м выпуклая эквидистантная кривая полностью совпадает с экспериментальной кривой. Геодезическая кривая (также выпуклая) резко отклоняется от первых двух. При $\phi = 16°$ отклонение достигает $+10$ м. Таким образом, есть все основания предполагать, что в качестве фронтопараллельных линий человеку легче воспринимать эквидистантные линии, связанные с оценкой расстояний, нежели геодезические линии, требующие дополнительных угловых оценок. Распространенное мнение о том, что гороптерные кривые – это геодезические линии, становится сомнительным.

Аллейный эксперимент. Следующим предметом для испытания предложенной ДКФ являются данные, полученные в аллейном эксперименте с

Рис. 5. Эксперимент Индоу. Размеры по оси X увеличены (сплошная кривая – геодезическая, штриховая кривая – эквидистанта, ○, × – данные Индоу). Параметры функции преобразования: $a = 1{,}08$, $b = 0{,}3$, $c = 3{,}0$



экстраординарно большим числом точечных стимулов [4, p. 41, Fig. 2.6]. Построение Р- и D-аллей по данным эксперимента Индоу (точки Р-аллей обозначены кружками, точки D-аллей – крестиками) показано на рис. 5. Необходимо найти три параметра отображения (a, b, c), ширину аллеи w и полуось эллипса v. Прежде всего, известна точка F – начало построения аллей. Строим линию взгляда $0F$ и хорду параллельно оси Z на расстоянии w, которая задает геодезическую в модели Клейна и является касательной к Р-аллеи. Пересечение хорды и линии взгляда дает точку Q, через которую должен проходить эллипс, задающий эквидистанту. На хорде среди кружков выбираем точку H – пересечение Р-аллеи и круга α_c. Радиусом $0H = a$ строим круг α_c, на котором среди крестиков выбираем точку G. По двум точкам Q и G строим эллипс-эквидистанту, который определяет на оси Z параметр c, а на оси X – малую полуось эллипса v. Найдено четыре неизвестных (a, c, w, v) из пяти, осталось определить параметр b. К сожалению, при $z < a$ в области обратной перспективы нет данных. При $z > a$ параметр b влияет на константность размеров. Возможность найти его – это тщательное выравнивание ширины аллей в точке F путем вариации b.

Сверхконстантность и обратная перспектива. При переходе от монокулярного зрения к бинокулярному проявляется не только феномен эмпирического гороптера, но и возникают эффекты «сверхконстантности» и обратной перспективы [5, 6]. Эти явления относятся к воспринимаемым размерам предметов на различном удалении от наблюдателя. Поэтому изучать их удобнее всего с помощью так называемых евклидовых аллей (Е-аллей). Прообразом Е-аллей являются прямые, параллельные координатным осям X или Z в евклидовом пространстве. Образы Е-аллей в модели Клейна получаются с помощью ДЛФ или ДКФ и затем преобразуются в ВП. В плоскости XOZ размер предметов связывают с шириной аллеи, а глубину – с расстоянием вдоль аллеи.

Пусть Е-аллея параллельна оси Z; ширина аллеи x, глубина z. Пусть задано отображение $q = rf(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + z^2}$, $\operatorname{tg}\phi = x/z$. Тогда размер S и глубину аллеи D можно представить в виде

$$S_q = xf(r); \quad S_\rho = c\,\mathrm{arch}\sqrt{\frac{c^2 - D_q^2}{c^2 - q^2}};$$
$$D_q = zf(r); \quad D_\rho = c\,\mathrm{arth}(D_q/c), \qquad (5)$$

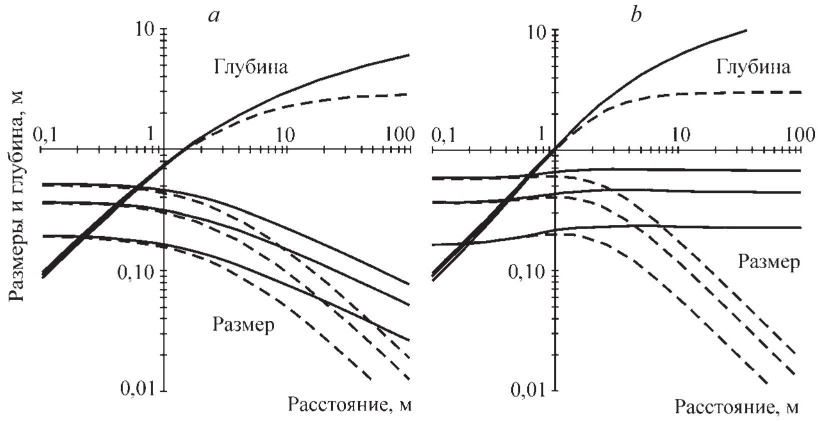


Рис. 6. Размеры и глубина предметов в модели Клейна (штриховые кривые) и ВП (сплошные кривые): для дробно-линейного с параметрами $a = 0$, $b = 0$, $c = 3$ (a) и дробно-квадратичного с параметрами $a = 1{,}08$, $b = 0{,}84$, $c = 3{,}00$ (b) отображений

где S_q, D_q – ширина и глубина в модели Клейна; S_ρ, D_ρ – ширина и глубина в ВП. Формула для S_ρ вытекает из [2, (6)]. Очевидно, что $S_q = D_q \operatorname{tg}\phi$, т. е. соблюдается психофизический закон Эммерта.

Изменение размеров и глубины предметов для двух отображений показано на рис. 6, a, b. При использовании ДЛФ в модели Клейна и ВП размеры предметов монотонно уменьшаются с увеличением расстояния. В области малых расстояний (до 2 м) уменьшение размеров незначительное (20–30 %), что соответствует обычному эффекту константности величин. Переход к ДКФ радикально изменяет ситуацию. При соотношении параметров $c = 2a + b$ возникает явление сверхконстантности размеров и обратной перспективы в ВП. Однако на модели Клейна эффект сверхконстантности из рис. 6, b установить трудно. Размеры предметов на расстояниях более 10 м монотонно уменьшаются практически так же, как и на рис. 6, a. Из (1) и (3) следует, что при $r \to \infty$ $f_m(r) \to f_c(r) \to c/r$. Поэтому размеры предметов S_q из (5) в модели Клейна на больших расстояниях выравниваются и уменьшаются по законам геометрической оптики. Решающее влияние на эффект сверхконстантности оказывает изменение глубины предметов D_q.

Построим изображение сетки Е-аллей на круге Клейна. На рис. 7 легко видеть отличия сверхконстантного бинокулярного зрения от обычного монокулярного. На рис. 7, a Е-аллеи в зависимости от ширины представляются гиперболами, параболами или эллипсами со сдвинутыми центрами [2]. Изображения Е-аллей для циклопического глаза на рис. 7, b напоминают овалы Кассини. На больших расстояниях (>10 м) такие аллеи-овалы можно аппроксимировать эллипсами, вписанными в предельный круг. Очевидно, что при сверхконстантной ДКФ Е-аллеи в дальней зоне приближаются к эквидистантным линиям, которые и сохраняют размеры предметов в ВП. Внутри абатического круга, показанного пунктиром, видна слабая обратная перспектива. Расхождение параллельных прямых $\cong 4°$.

Предложенная функция ДКФ обладает общностью, универсальностью и гибкостью. Мы рассмотрели лишь некоторые примеры, связанные с экспериментами. В общем случае можно выделить две группы отображений: гипоте-

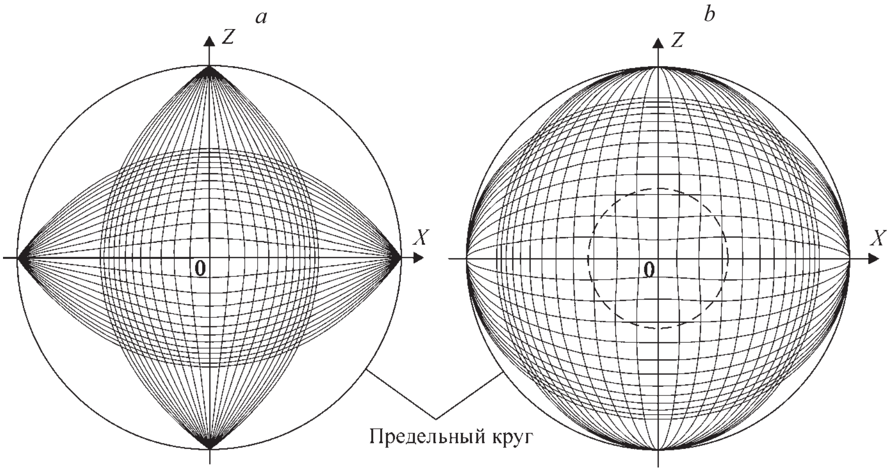


Рис. 7. Сетка E-аллей: монокулярная (*a*), бинокулярная (*b*). Параметры функций преобразования такие, как на рис. 6

тическую монокулярную и бинокулярную. Для группы монокулярных отображений ($a = 0,\ 0 \le b \le c$) характерно отсутствие гороптера и обратной перспективы. При $b = 0$ ДКФ из (3) переходит в ДЛФ из (1). При $0 < b < c$ увеличивается константность величин, а при $b = c$ возможна и сверхконстантность. Для группы бинокулярных отображений ($a \ne 0,\ 0 < 2a + b \le c$), наоборот, характерно наличие и гороптера, и обратной перспективы. Можно выделить подгруппу с максимальной обратной перспективой при $b = 0$; можно найти сверхконстантное отображение с наилучшим приближением E-аллей к эквидистантным линиям и т. д. Если $a = a(\phi, \theta)$ и $b = b(\phi, \theta)$ при $c = \text{const}$, то возникает иной подход к пониманию анизотропии ВП. Таким образом, открывается возможность для проведения исследований по определению параметров ДКФ, оценке их стабильности и влияния на свойства визуального пространства.

Заключение. В данной работе предложено дробно-квадратичное отображение евклидовой плоскости на внутреннюю область фундаментального круга Клейна для построения сенсорной модели циклопического глаза, имитирующего бинокулярное зрение. Отображение учитывает феномен горизонтального эмпирического гороптера. Введено понятие неподвижного круга с абатическим радиусом. Получена обратная дробно-квадратичная функция отображения, с помощью которой построены изображения геодезических и эквидистантных линий, претендующих на роль фронтопараллельных гороптерных кривых. Показано, что эквидистантные линии визуального пространства в наибольшей степени соответствуют известным экспериментальным данным. Рассмотрена методика определения параметров дробно-квадратичной функции на примере построения так называемых P- и D-аллей с экстраординарно большим числом точечных стимулов. На примере E-аллей рассмотрены и объяснены явления, которые возникают при переходе от монокулярного к бинокулярному зрению, а именно: сверхконстантность размеров на больших расстояниях и обратная перспектива на малых расстояниях до предметов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ковалев А. М.** О нелинейной модели визуального пространства // Автометрия. 2005. **41**, № 5. С. 58.
2. **Ковалев А. М.** Описание визуального пространства в моделях Клейна и Пуанкаре // Автометрия. 2006. **42**, № 4. С. 57.
3. **Howard I. P., Rogers B. J.** Binocular Vision & Stereopsis. Oxford: Oxford University Press, 1995.
4. **Indow T.** The global structure of visual space // Advanced Series of Mathematical Psychology. Singapore: World Scientific Publishing Co., 2004. Vol. 1.
5. **Holway A. H., Boring E. G.** Determinants of apparent visual size with distance variant // American Journ. of Psychology. 1941. **54**. P. 21.
6. **Раушенбах Б. В.** Возникновение обратной перспективы при созерцании близких областей пространства вследствие явления «сверхконстантности» // Пространственные построения в живописи. М.: Наука, 1980. Приложение 5.

Поступила в редакцию 3 августа 2007 г.