

ДИНАМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

Д. Г. Баратов, В. М. Валов, Р. А. Рзаев, В. Л. Рыков

(Москва)

В работе [1] был определен круг задач по анализу прочностных свойств параболических линз фокусирующего устройства [2] для нейтринного эксперимента, представляющих собой две параболицидальные оболочки вращения, соединенные вершинами через конструктивную шейку. Магнитное давление на внешнюю поверхность оболочек, возникающее при пропускании по линзе импульсного электрического тока, приводит к появлению в них динамических напряжений. Напряженно-деформированное состояние таких оболочек в статическом приближении было изучено в [1, 3].

В данной работе исследуются динамические напряжения параболических линз для импульсов тока, представляющих собой один полупериод синусоиды длительностью $70 \div 300$ мкс при амплитуде 500 кА. Такая зависимость является хорошим приближением к реальной форме импульсов тока, следующих с интервалом $6 \div 8$ с. Поскольку время затухания свободных механических колебаний оболочек значительно меньше интервала следования импульсов, начальные условия к приходу очередного импульса приняты нулевыми. Рассматривается вариант жесткого закрепления линзы (заделка параболицидальной оболочки у шейки и у фланца) как наиболее приемлемый согласно анализу, проведенному в [1]. Цель работы состоит в определении максимальных динамических напряжений для последующих оценок усталостной прочности.

Ввиду того, что в данном случае длительность периода низших тонов собственных колебаний оболочек сравнима с длительностью импульса тока, необходимо полное решение задачи, заключающееся в исследовании напряженно-деформированного состояния как во время прохождения тока, так и при свободных колебаниях линзы после импульса. Задача об импульсном нагружении неоднородным в пространстве давлением оболочки переменной толщины является достаточно сложной. В связи с этим для полноты и надежности получаемых результатов она решена численно двумя способами: методом собственных функций с использованием метода матричной прогонки для интегрирования дифференциальных уравнений и методом сеток [4]. Проводится анализ полученных результатов. Основные обозначения в работе аналогичны принятым в [1, 3].

Система дифференциальных уравнений, описывающих динамическое напряженно-деформированное состояние линзы, как тонкостенной оболочки вращения, нагруженной внешней давлением, записывается в виде

$$(1) \quad \frac{\rho h}{\rho_0 h_0} \tilde{E} \frac{\partial^2 \mathbf{X}(\bar{s}, \tau)}{\partial \tau^2} = \mathbf{F}(\bar{s}) \mathbf{X}(\bar{s}, \tau) - \frac{\partial \mathbf{X}(\bar{s}, \tau)}{\partial \bar{s}} - \mathbf{G}(\bar{s}, \tau),$$

где $\mathbf{X}(\bar{s}, \tau) = \{u, w, \theta_1, T_1, Q_1, M_1\}$ — вектор искомых функций; $\mathbf{F}(\bar{s})$ — квадратная (6×6) матрица коэффициентов; $\mathbf{G}(\bar{s}, \tau) = [0, 0, 0, 0, -p_n, 0]$ — вектор функций нагрузки; $\tau = (t/R_0) \sqrt{B_0/\rho_0 h_0}$ — безразмерный параметр времени; ρ — плотность материала в произвольной точке оболочки; ρ_0 — плотность в точке приведения; \tilde{E} — квадратная матрица, в которой

$$\tilde{E}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

остальные блоки (\tilde{E}_{11} , \tilde{E}_{12} , \tilde{E}_{22}) — нулевые.

В рассматриваемой задаче $G(\bar{s}, \tau) = G_0(\bar{s})q(\tau) = G_0(\bar{s}) \sin^2 \Omega t$, где Ω — круговая частота изменения протекающего через линзу тока. Таким образом, решение задачи об импульсном нагружении линз сводится к

решению неоднородной системы дифференциальных уравнений (1) при нулевых начальных и двухточечных граничных условиях.

В методе собственных функций [5-7] обычным является представление решения (1) в виде

$$X(\bar{s}, \tau) = \sum_n X_n(\bar{s}) \varphi_n(\tau),$$

где $X_n(\bar{s})$ — собственные функции однородной системы (1) ($G(\bar{s}, \tau) = 0$), соответствующие собственным частотам $\bar{\omega}_n = \omega_n R_0 \sqrt{\rho_0 h_0 / B_0}$. Такое представление в данном случае приводит к медленно сходящимся рядам. Значительного улучшения сходимости удается достичь при использовании в качестве первого приближения вектора функций

$$X_0(\bar{s}, \tau) = X_0(\bar{s}) q(\tau),$$

где $X_0(\bar{s})$ — статическое решение системы уравнений (1) при $G(\bar{s}, \tau) \equiv G_0(\bar{s})$. В виде ряда по собственным функциям представляется лишь дополнение к $X_0(\bar{s}, \tau)$ до точного решения.

Для отыскания собственных частот и форм колебаний оболочки система однородных обыкновенных дифференциальных уравнений, полученная из (1) заменой $\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$ на $-\bar{\omega}^2$, решалась методом двухсторонней матричной прогонки [1, 8], т. е. отысканием матрицы жесткости \mathbf{L} или обратной к ней матрицы податливости $\tilde{\mathbf{L}}$, для ряда значений $\bar{\omega}$. Собственной частоте соответствовало равенство нулю определителя матрицы податливости при переходе от одного конца оболочки к другому. В случае жесткой заделки это соответствовало наличию тривиальных решений. В процессе интегрирования в некоторой точке \bar{s}_1 заданная частота $\bar{\omega}$ может оказаться собственной частотой для отсеченной части оболочки от \bar{s}_0 до \bar{s} , соответствующей свободному краю, а в другой точке \bar{s}_2 — соответствующей заделке. В первом случае это приводит к обращению в бесконечность матрицы $\tilde{\mathbf{L}}$, во втором — матрицы \mathbf{L} . Переход через такую точку осуществлялся обращением возрастающей матрицы и продолжением интегрирования уравнений для обратной матрицы. Таким образом, при интегрировании перемена способа расчета может проводиться неоднократно, притом тем чаще, чем выше искомая частота. Это обстоятельство ограничивает число собственных частот, которое можно определить, но оно оказалось вполне достаточным для практических целей (например, для одной из линз было определено шестнадцать первых частот).

Расчеты показали, что сходимость рядов при использовании описанного выше приема с выделением квазистатической составляющей $X_0(\bar{s}, \tau)$ достаточно хорошая в широком интервале длительности импульса тока.

Алгоритм решения задачи методом сеток состоял в отыскании $X(\bar{s}, \tau_0 + \Delta\tau)$ при использовании системы уравнений (1), если известны $X(\bar{s}, \tau)$ и $\frac{\partial X(\bar{s}, \tau)}{\partial \tau}$ при $\tau = \tau_0$ и $\bar{s}_0 < \bar{s} < \bar{s}_k$. Значение $\partial X(\bar{s}, \tau) / \partial \bar{s}$ представлялось в виде конечных разностей, при этом на краях оболочки использовались граничные условия. Интегрирование по времени осуществлялось методом Рунге—Кутты. При фиксированных значениях шагов по времени Δt и координате Δs , удовлетворявших физическому условию $c \cdot \Delta t < \Delta s$, где c — скорость звука в материале оболочки, интервал интегрирования по времени ограничивался резко возникавшей неустойчивостью решения. Для расширения интервала достаточно было уменьшить Δs и Δt , причем

в области устойчивости решения различались лишь незначительно. Последнее, а также резкий характер возникновения неустойчивости позволяют относиться с доверием к результатам вычислений.

О правильности проведенных расчетов свидетельствует хорошее ($\sim 2\%$) количественное согласие величин максимальных напряжений и значений составляющих $X(\bar{s}, \tau)$ вдоль меридиана линзы, полученных двумя методами.

В табл. 1 приведены геометрические параметры трех типов линз фокусирующего устройства, для которых были выполнены расчеты, где

a — постоянная параболы образующей оболочки; r_0 — радиус шейки; r_k — радиус внешней поверхности у фланца; L — длина линзы; h_0 — толщина оболочки вдоль линий постоянных радиусов. Были определены ряд первых частот и форм собственных

колебаний оболочек, распределение динамических напряжений и перемещений по длине меридиана s при длительности импульса 157 мкс ($\Omega = 2 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$), исследована зависимость величины максимальных напряжений от длительности импульса.

В табл. 1 приведены первые собственные частоты f_1 для трех линз, а в табл. 2—16 собственных частот f_n и безразмерных круговых частот

Таблица 1

Номер линзы	$a, \text{см}^{-1}$	$r_0, \text{см}$	$r_k, \text{см}$	$h_0, \text{см}$	$\sigma_{\text{ст}}, \text{кг/мм}^2$	$f_1, \text{кГц}$	$\sigma_{\text{д}}, \text{кг/мм}^2$
1	0,842	1,2	6,5	1,5	14,85	7,10	18,0
2	0,404	1,5	9,5	1,0	15,5	6,30	18,5
3	0,1236	3,0	24,0	1,0	8,3	2,82	7,2

Таблица 2

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\bar{\omega}_n$	0,09132	0,13256	0,13747	0,14475	0,14833	0,15510	0,15960	0,1674
$f_n, \text{кГц}$	6,30	9,17	9,49	10,0	10,25	10,7	11,02	11,56
n	9	10	11	12	13	14	15	16
$\bar{\omega}_n$	0,17413	0,18266	0,19066	0,20023	0,20907	0,21854	0,22210	0,23266
$f_n, \text{кГц}$	12,02	12,59	13,15	13,82	14,44	15,11	15,35	16,08

$\bar{\omega}_n$ для линзы 2. Первые частоты f_1 определяются продольными колебаниями и близки к величине c/L . Характерной особенностью спектра является высокая плотность частот, начиная со второй.

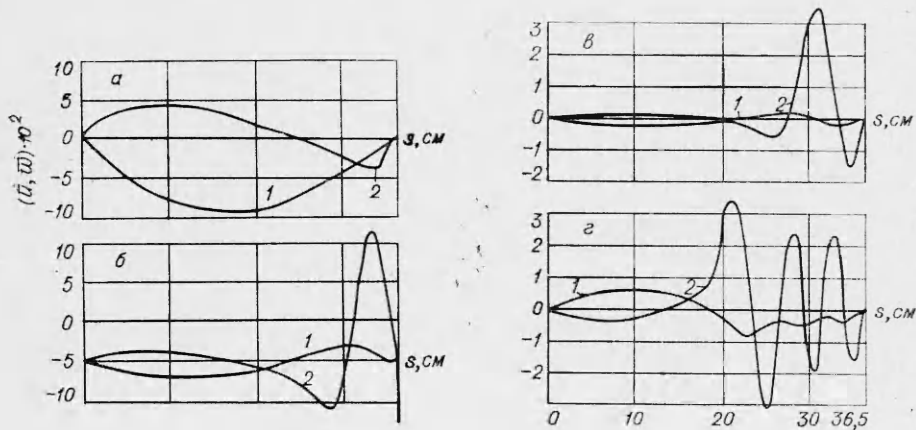
На фиг. 1 показаны формы собственных колебаний по \bar{u} (кривые 1) и \bar{w} (кривые 2) линзы 2 для первого (а), второго (б), третьего (в) и седьмого (г) тонов. Возбуждение первых тонов приводит к появлению смещений \bar{u} достаточно равномерно по всей длине, в то время как радиальные колебания, основной вклад в которые дают перемещения \bar{w} , возбуждаются лишь вблизи фланца, т. е. на участке оболочки большого диаметра. Возникновение же радиальных колебаний у шейки возможно лишь при возбуждении достаточно высоких тонов.

Фиг. 2 иллюстрирует эволюцию распределений напряжений σ_{T1} , σ_{T2} , σ_{M1} , σ_{M2} для линзы 2 (кривые 1—4 соответственно). Распределения при-

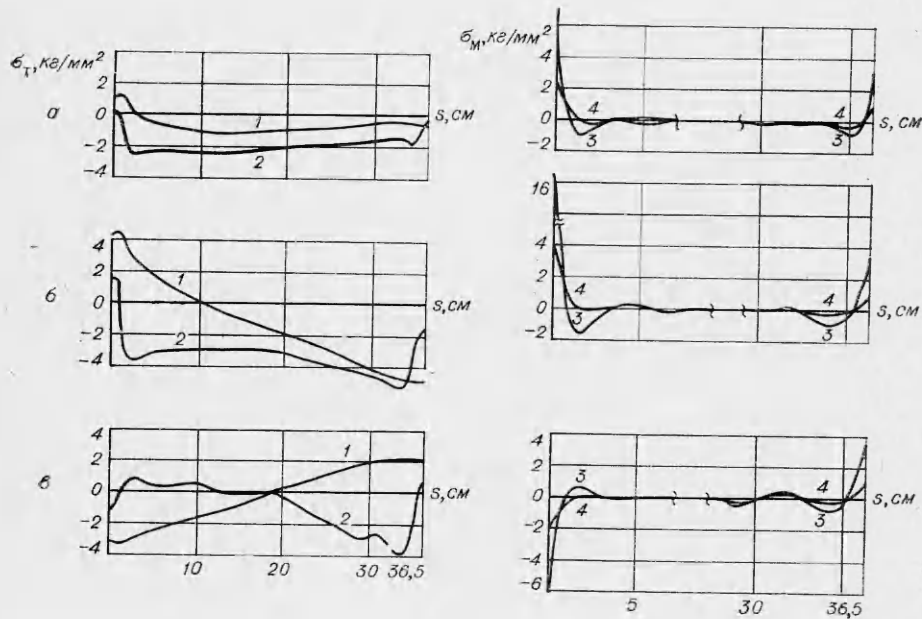
ведены для следующих моментов времени после начала импульса: *a* — 50, *б* — 100, *в* — 200 мкс.

При выбранных параметрах импульса тока характер распределений в районе его максимума (100 мкс) близок к статическому [1³]. Как и в статическом случае, эквивалентные напряжения $\sigma_1 = \sigma_{T1} + \sigma_{M1}$ наиболее велики на внешней поверхности параболоида вблизи шейки. На фиг. 3 показано изменение их во времени для линзы 2 (кривая 1). Здесь же кривой 2 показана форма импульса тока. Максимум эквивалентных напряжений лежит в пределах длительности импульса, но запаздывает по отношению к максимуму тока. Амплитуда σ_1 при свободных колебаниях линзы после окончания тока примерно в два раза меньше.

В табл. 1 приведены максимальные эквивалентные динамические σ_d и статические $\sigma_{ст}$ напряжения для всех линз при $\Omega = 2 \cdot 10^4$ с⁻¹,

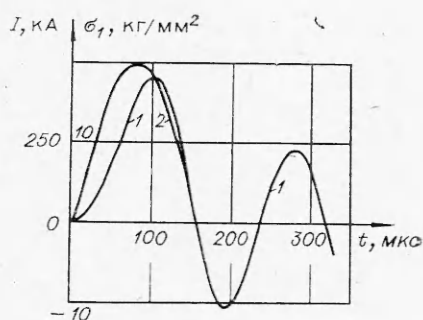


Фиг. 1

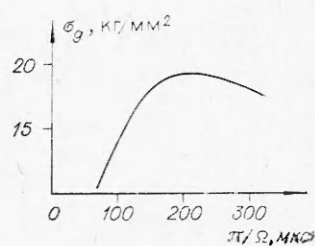


Фиг. 2

$I_0 = 500$ кА. Для линз 1, 2 $\sigma_d > \sigma_{ст}$, для линзы 3 $\sigma_d < \sigma_{ст}$. Это связано с тем, что частота вынуждающей силы Ω/π в первом случае близка к частоте f_1 первого тона собственных колебаний, а во втором — в два раза превосходит последнюю. На фиг. 4 представлена зависимость максимального эквивалентного напряжения от длительности импульса тока для линзы 2. Наибольшей величины σ_d достигает при $\Omega/\pi \approx f_1$. С увеличением длительности импульса σ_d стремится к $\sigma_{ст}$, при уменьшении длительности напряжение σ_d уменьшается, приближаясь к зависимости, пропорциональной $\pi f_1/\Omega$.



Фиг. 3



Фиг. 4

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность профессору Л. И. Балабуху за ценные советы и плодотворные обсуждения, а также А. В. Самойлову за постоянный интерес к работе.

Поступила 10 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Баратов Д. Г., Валов В. М., Рзаев Р. А., Рыков В. Л., Шалашов И. М. Напряженное состояние параболических линз, обтекаемых сильным электрическим током. Препринт ИФВЭ, ОП 72-94. Серпухов, 1972.
2. Воронов В. И., Данильченко И. А., Рзаев Р. А., Самойлов А. В. Фокусирующее устройство для нейтринных экспериментов. Препринт ИФВЭ, ОП 70-93. Серпухов, 1970.
3. Баратов Д. Г., Валов В. М., Рзаев Р. А., Рыков В. Л., Шалашов И. М. Напряженно-деформированное состояние параболической оболочки вращения, находящейся под внешним давлением. — ПМТФ, 1974, № 3.
4. Гавурин М. К. Лекции по методам вычислений. М., «Наука», 1974.
5. Балабух Л. И., Колесников К. С., Зарубин В. С., Алфатов Н. А., Устюкин В. И., Чижов В. Ф. Основы строительной механики ракет. — М., «Высшая школа», 1969.
6. Гольденвейзер А. Л. Об ортогональности форм собственных колебаний тонкой упругой оболочки. — В кн.: Проблемы механики (к 60-летию академика В. В. Новожилова). Л., «Судостроение», 1970.
7. Воробьева Е. М. Об ортогональности собственных форм колебаний оболочек в границах технической моментной теории. — ПМ, 1968, т. IV, в. 11.
8. Бидерман В. Л. Применение метода прогонки для численного решения задач строительной механики. — «Инж. журн. МТТ АН СССР», 1967, № 5.