УДК 532.529.591

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СРЕДЕ. ТОЧНЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

А. А. Луговцов

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: lugovtsov.anton@gmail.com

Представлен ряд точных и приближенных аналитических решений уравнений для одномерных и слабонеодномерных волн, распространяющихся в жидкости с пузырьками газа, в случае, когда плотность распределения пузырьков является непрерывной функцией радиуса пузырька и пространственных координат.

Ключевые слова: пузырьковая жидкость, волновое уравнение, точное решение.

Введение. Целью исследования волновых уравнений, описывающих распространение линейных и нелинейных волн в однородных и неоднородных многофазных средах, является построение точных или приближенных аналитических решений, включающих параметры рассматриваемой задачи в явном виде. Такие решения могут быть использованы как для анализа и систематизации экспериментальных данных, так и в качестве тестов при численных расчетах. В [1] приведены ссылки на работы, посвященные аналитическому и численному исследованию волновых процессов в многофазных средах. В данной работе приведены два неизвестных ранее решения для случая одномерных волн, распространяющихся в однородной газожидкостной среде. Первое решение представляет собой точное аналитическое решение уравнения Кортевега — де Фриза — Бюргерса и имеет вид неосциллирующей ударной волны, второе является приближенным автомодельным решением осесимметричного уравнения Кортевега — де Фриза в виде солитона с длинным “хвостом”, обеспечивающего выполнение закона сохранения импульса. Для неодномерных линейных уравнений получен ряд точных решений, описывающих распространение ограниченного звукового пучка вдоль области неоднородного распределения пузырьков в пространстве. Как известно, линейный ограниченный звуковой пучок, распространяющийся в однородной среде, расходится [2]. Угол расхождения пропорционален отношению длины волны излучаемого звука к эффективному размеру излучателя. В данной работе показано, что наличие неоднородности среды может приводить к появлению решения в виде нерасходящихся пучков.

1. Одномерные волны. Система уравнений, описывающая распространение одномерных нелинейных волн в неоднородной газожидкостной среде [1], сводится к одному уравнению (индекс 0 опускается)

$$u_\tau + \alpha(\tau) u u_\eta + \beta(\tau) u_{\eta\eta\eta} - \mu(\tau) u_{\eta\eta} + \Big[\frac{k}{2\tau} + \delta(\tau)\Big] u = 0, \tag{1}$$

где функции $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$, $\mu(\tau)$, $\delta(\tau)$ определены в [1]; значения $k = 0, 1, 2$ соответствуют плоским, цилиндрическим и сферическим волнам. В случае если $N_*(R_*, \tau) = N_*(R_*)$, т. е. плотность функции распределения пузырьков по размерам во всех точках пространства одинакова, коэффициенты α, β, μ являются константами, $\delta = 0$ и уравнение (1) превращается в классическое уравнение Кортевега — де Фриза — Бюргерса

$$u_\tau + \alpha u u_\eta + \beta u_{\eta\eta\eta} - \mu u_{\eta\eta} + \frac{k}{2\tau}\, u = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим два решения уравнения (2).

1. В случае $k = 0$ при переходе в систему координат, движущуюся с некоторой постоянной скоростью, уравнение (2) после интегрирования сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка. Численные решения этого уравнения, полученные, например, в работах [3, 4], интерпретируются как слабые ударные волны с монотонным либо осциллирующим фронтом. В данной работе получено точное аналитическое решение, имеющее вид

$$\begin{gathered} u = u_*[2(1-\operatorname{th}\theta) + 1 - \operatorname{th}^2\theta] = u_*[2(1-\operatorname{th}\theta) + \operatorname{ch}^{-2}\theta] = u_*[4(1-\operatorname{th}\theta) - (1-\operatorname{th}\theta)^2], \\ u_* = \frac{u_0}{2\alpha}, \quad \theta = m(\eta - u_0\tau), \quad u_0 = \frac{0{,}24\mu^2}{\beta}, \quad m = \frac{0{,}1\mu}{\beta}. \end{gathered} \tag{3}$$

Это решение представляет собой неосциллирующую ударную волну, движущуюся с постоянной скоростью u_0. Решение (3) существует не при любых значениях m и u_0. При заданных значениях β и μ единственные значения волнового числа m и амплитуды ударной волны u_0 определяются формулами (3), и, наоборот, при заданной амплитуде ударной волны определяется соотношение между β и μ; волновое число m вычисляется из (3) по заданной амплитуде и одному из этих параметров. Вопрос о существовании точного аналитического решения для ударной волны с осциллирующим фронтом остается нерешенным.

2. При $\mu = 0$, $k = 1$ уравнение (2) записывается в виде

$$u_\tau + \alpha u u_\eta + \beta u_{\eta\eta\eta} + \frac{1}{2\tau}\, u = 0. \tag{4}$$

Для получения решения используются законы сохранения импульса и энергии, которые в принятом приближении при $u \to 0$, $|\eta| \to \infty$ имеют вид

$$\tau^k \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(\tau,\eta)\, d\eta = \tau_0^k \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(\tau_0,\eta)\, d\eta = C_1 + O(\varepsilon); \tag{5}$$

$$\tau^k \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2(\tau,\eta)\, d\eta = \tau_0^k \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2(\tau_0,\eta)\, d\eta = C_2 + O(\varepsilon). \tag{6}$$

Здесь C_1, C_2 — константы; $u(\tau_0,\eta)$ — начальное возмущение. Интегрирование от $-\infty$ объясняется тем, что рассматриваются волны длиной порядка $\varepsilon^{-1/2}$ на расстояниях от начала координат, в ε^{-1} раз превышающих характерную ширину возмущения. Следует отметить, что, поскольку законы сохранения импульса и энергии являются одними из наиболее важных свойств исходной системы уравнений, естественно считать, что среди всех решений приближенного уравнения (4) физический смысл имеют только те, которые удовлетворяют законам сохранения (5), (6). Легко показать, что закон сохранения энергии выполняется для любого точного решения уравнения (4) (для $u(\tau_0,\eta) \to 0$ при $|\eta| \to \infty$). Закон сохранения импульса выполняется только при $C_1 = 0$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(\tau,\eta)\, d\eta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(\tau_0,\eta)\, d\eta = 0. \tag{7}$$

Равенство нулю интеграла от начального возмущения $u(\tau_0, \eta)$ является необходимым и достаточным условием выполнения закона сохранения импульса для всех $\tau > \tau_0$. Следовательно, во-первых, в цилиндрической волне, распространяющейся в одном направлении, наряду с фазами сжатия обязательно присутствуют фазы разрежения; во-вторых, в осесимметричном случае уравнение (4) применимо начиная с того момента, когда произвольное начальное возмущение эволюционирует в волну, удовлетворяющую условию (7). До этого момента в эволюции начального возмущения существенную роль играют волны, распространяющиеся в обоих направлениях, и уравнение (4) не является достаточным для описания этой эволюции. При больших значениях τ асимптотическое решение уравнения (4) можно искать в виде ряда по обратным степеням τ:

$$u(\tau, \eta) = \tau^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} u_m \tau^{-m}. \tag{8}$$

Подставляя (8) в уравнение (4), получаем линейное уравнение Кортевега — де Фриза для u_0. Асимптотическое решение этого уравнения известно и поэтому в данной работе не приводится. Последующие приближения получаются в виде рекуррентной системы линейных уравнений. Таким образом, при больших значениях τ расходящиеся цилиндрические волны представляют собой расплывающийся волновой пакет с затуханием порядка $\tau^{-5/6}$ (с учетом того, что в асимптотическом решении затухание происходит по закону $\tau^{-1/3}$).

Однако можно указать такие начальные условия, при которых в случае больших значений τ возможно существование цилиндрических волн типа солитонов.

Пусть начальное возмущение имеет вид

$$u(\tau_0, \eta) = \lambda^{-2/3} f(\lambda^{-1/3}\eta), \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda^{-1/3}\eta)\, d\eta = 0, \tag{9}$$

где малый параметр λ удовлетворяет соотношению $\varepsilon \ll \lambda \ll 1$. Подставляя (9) в (6), получаем

$$\lambda\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2(\tau, \eta)\, d\eta = \tau_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(z)\, dz. \tag{10}$$

Выполнив замену функции и независимых переменных, выделим в уравнении (4) главную часть в виде уравнения Кортевега — де Фриза для плоской волны и введем в это уравнение малый параметр λ в явном виде:

$$u(\tau, \eta) = \frac{16\beta}{9\alpha(\lambda\tau)^{2/3}}\, U(t, r); \tag{11}$$

$$t = \frac{64\beta}{27\lambda} \ln \frac{\tau}{\tau_0}, \qquad r = \frac{4\eta}{3(\lambda\tau)^{1/3}}. \tag{12}$$

Из (9)–(12) следуют соотношения

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} U^2(t, r)\, dr = C, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} U(t, r)\, dr = 0, \tag{13}$$

где C — константа. Подставляя (11), (12) в (4), получаем уравнение для $U(t, r)$

$$\frac{1}{(\lambda\tau)^{5/3}}\, [U_t + UU_r + U_{rrr} - \lambda_*(U + 2rU_r)] = 0, \tag{14}$$

где $\lambda_* = 9\lambda/(32\beta)$ — новый малый параметр. Представим функцию $U(t, r)$ в виде ряда по степеням λ:

$$U(t, r) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m(t, r)\lambda_*^m. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (14), для функции $U_0(t, r)$ получаем уравнение Кортевега — де Фриза

$$U_{0t} + U_0 U_{0r} + U_{0rrr} = 0. \tag{16}$$

При этом для функции U_0 из (13) следует, что законы сохранения энергии и импульса имеют следующий вид:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} U_0^2(t, r)\, dr = C, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} U_0(t, r)\, dr = 0. \tag{17}$$

Решение уравнения (16) с условиями (17) достаточно хорошо известно. В частности, известно, что в зависимости от значения параметра σ, в начальный момент времени равного отношению нелинейного члена к дисперсионному, возможны два решения уравнения (16). Для значений σ, меньших некоторого критического значения σ_0, решение представляет собой расплывающийся волновой пакет, по скорости уменьшения амплитуды и движению фаз аналогичный решению линеаризованного уравнения Кортевега — де Фриза. Для значений $\sigma > \sigma_0$ при $\tau \to \infty$ решение представляется в виде одного или нескольких солитонов:

$$U_{0i}(t, r) = a_i \operatorname{ch}^{-2} [\sqrt{a_i/12}\,(r - a_i t/3)]. \tag{18}$$

Однако, для того чтобы решение типа (18) удовлетворяло уравнению (14), необходимо выполнение условия малости отброшенных в нулевом приближении членов этого уравнения при $t \to \infty$. Это условие может быть выполнено, если решение (18) представить в виде

$$U_i(x) = 12k_i^2 \operatorname{ch}^{-2} X, \tag{19}$$

где $X = k_i Z$; $k_i = \sqrt{a_i/12}$; $Z = r - \psi_i(t)$.

Функции $\psi_i(t)$ определяются из условия стационарности уравнения (14) в координатах t, Z, т. е. это уравнение должно иметь вид

$$-4k^2 U_{iX} + U_i U_{iX} + k^2 U_{iXXX} - \lambda_*(U_i + 2XU_{iX}) = 0. \tag{20}$$

Выполнение указанного условия приводит к следующему выражению для функций $\psi_i(t)$:

$$\psi_i(t) = 4k_i^2 + (r_{i*} - 4k_i^2)\exp[-\lambda_*(t - t_{i*})/2]. \tag{21}$$

Здесь $a_i = 12k_i^2$ — амплитуда i-го солитона; t_{i*} — момент времени появления i-го солитона и отрыва его от осциллирующего “хвоста”; r_{i*} — координата i-го солитона. Учитывая соотношения (12) и параметр $\lambda_* = 9\lambda/(32\beta)$, формулу (21) можно записать в виде

$$\psi_i(t) = 4k_i^2 + (r_* - 4k_i^2)(\tau/\tau_{i0})^{-1/3}. \tag{22}$$

Из (19)–(22) следует, что отброшенные в нулевом приближении члены уравнения (14) остаются малыми величинами порядка λ_* для любого $t \to \infty$. Итак, показано, что при определенных условиях цилиндрические волны могут существовать в виде солитонов. Момент времени и место появления солитонов определяются только при численном расчете, но, поскольку эти константы не входят в формулы (11), (12), законы затухания амплитуд и растяжения солитонов полностью определены. Из формулы (11) следует, что амплитуды солитонов затухают медленнее (затухание порядка $\tau^{-2/3}$), чем амплитуда линейного волнового пакета (затухание порядка $\tau^{-5/6}$).

Возвращаясь к уравнению (1), отметим, что в случае переменных коэффициентов при отыскании решений этого уравнения роль законов сохранения не менее важна, чем в рассмотренной выше задаче. Для $\mu = 0, u(\tau,\eta) \to 0$ при $|\eta| \to \infty$ в случае переменных коэффициентов законы сохранения импульса и энергии имеют вид

$$[1-\varphi_*(\tau)]\tau^k c(\tau)\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(\tau,\eta)\,d\eta = C_1 + O(\varepsilon); \tag{23}$$

$$[1-\varphi_*(\tau)]\tau^k c(\tau)\int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2(\tau,\eta)\,d\eta = C_2 + O(\varepsilon), \tag{24}$$

где $\varphi_*(\tau)$ — невозмущенная объемная концентрация газа.

Нетрудно показать, что при $\mu = 0$ закон сохранения энергии (24) выполняется для любого точного решения уравнения (1). В случае если $\delta(\tau) \ne 0$, закон сохранения импульса (23) выполняется только для $C_1 = 0$ даже при $k = 0$, т. е. для плоских волн, что в отличие от случая цилиндрических волн не удовлетворяет условию существования уединенных волн. В этом случае, по-видимому, необходимо использовать уравнения следующего, первого приближения, допускающие появление волн, длина которых на порядок больше длины волн в нулевом приближении. Введение в решение таких волн, не вызывающее нарушения (в силу малости их амплитуды) квадратичного закона сохранения энергии, может привести к выполнению линейного закона сохранения импульса (23). С точки зрения физики появление волн с длиной порядка характерных размеров неоднородностей распределения пузырьков в жидкости является естественным. Однако этот вопрос требует отдельного исследования.

Для исследования аналитических решений уравнения (1) выполним замену искомой функции и независимых переменных:

$$u(\tau,\eta) = f(\tau)U[X,T(\tau)], \qquad X = q(\tau)\eta. \tag{25}$$

Так же как и для уравнения (4), функции $f(\tau)$, $q(\tau)$, $T(\tau)$ определяются из условий выделения главной части уравнения (1) в виде уравнения Кортевега — де Фриза и условий существования законов сохранения в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} U^2(T,X)\,dX = C, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} U(T,X)\,dX = 0. \tag{26}$$

Из (25), (26) следует

$$\begin{gathered} q(\tau) = \alpha^2(\tau)[1-\varphi_*(\tau)]^{-1}\tau^{-k}\beta^{-2}(\tau)^{1/3}c^{-1/2}(\tau), \qquad f(\tau) = \beta(\tau)\alpha^{-1}(\tau)q^2(\tau), \\ T(\tau) = \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \alpha^2(z)[1-\varphi_*(z)]^{-1}z^{-k}\beta^{-1}(z)c^{-1}(z)\,dz. \end{gathered} \tag{27}$$

При этом уравнение для $U(T,X)$ принимает вид

$$U_T + UU_X + U_{XXX} - F(\tau)\Big[\frac{k}{\tau} + Q(\tau)\Big](U + 2XU_X) = 0, \tag{28}$$

где

$$F(\tau) = \frac{1}{6\beta(\tau)q^3(\tau)}, \qquad Q(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau}\Big\{\ln \frac{[1-\varphi_*(\tau)]\beta^2(\tau)c(\tau)}{\alpha^2(\tau)}\Big\}. \tag{29}$$

Поскольку $k/\tau = \partial \ln(\tau^k)/\partial\tau$, уравнение (28) можно записать в виде

$$U_T + UU_X + U_{XXX} - P(\tau)(U + 2XU_X) = 0, \tag{30}$$

где

$$P(\tau) = \frac{1}{6\beta(\tau)q^3(\tau)}\,\frac{\partial}{\partial\tau}\Big\{\ln\frac{\tau^k[1-\varphi_*(\tau)]\beta^2(\tau)c(\tau)}{\alpha^2(\tau)}\Big\}. \tag{31}$$

При $P(\tau) = 0$ уравнение (30) превращается в классическое уравнение Кортевега — де Фриза с законами сохранения (26). Из формулы (31) следует, что для выполнения этого условия достаточно, чтобы выражение в фигурных скобках было равно константе. При этом получается уравнение для определения функции плотности распределения пузырьков по радиусу

$$\frac{\tau^k[1-\varphi_*(\tau)]\beta^2(\tau)c(\tau)}{\alpha^2(\tau)} = C, \tag{32}$$

где C — константа. Сравнивая (32) и (27), получаем

$$q = C^{-3}, \qquad f = \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}\,C^{-3}, \qquad T = C^{-3}\int \beta(z)\,dz.$$

В предположении $P(\tau) = \lambda$ (λ — малый параметр) задача сводится к рассмотренной выше задаче для цилиндрических волн. При этом все решения, полученные ранее, справедливы и для уравнения (30), но изменение таких характеристик солитонов, как амплитуда, ширина и скорость движения, определяется из (27).

2. Слабонеодномерные волны. Систему уравнений, описывающую распространение нелинейных неодномерных волн, можно получить из формул (53), (54) работы [1] при $k = 0$ (индекс 0 опускается):

$$\begin{gathered} u_\tau + \alpha(\tau)uu_\eta + \beta(\tau)u_{\eta\eta\eta} - \mu(\tau)u_{\eta\eta} + \delta(\tau)u - c_1(\tau,y,z)u_\eta + (v_y + w_z)/2 = 0, \\ v_\eta = c(\tau)u_y, \qquad w_\eta = c(\tau)u_z. \end{gathered} \tag{33}$$

Исключая из (33) функции v и w, для u получаем уравнение

$$[u_\tau + \alpha(\tau)uu_\eta + \beta(\tau)u_{\eta\eta\eta} - \mu(\tau)u_{\eta\eta} + \delta(\tau)u - c_1(\tau,y,z)u_\eta]_\eta + c(\tau)(u_{yy} + u_{zz})/2 = 0. \tag{34}$$

Впервые уравнение, аналогичное (34), выведено в работе [5] для поверхностных волн в водоеме конечной глубины ($c(\tau) = 1$, $\mu(\tau) = \delta(\tau) = 0$; α, β — константы). Позднее это уравнение (для $c_1 = 0$) стало известно как уравнение Кадомцева — Петвиашвили. Если из уравнения (34) исключить дисперсионный член и добавить диффузионный, то оно превращается в известное уравнение Хохлова — Заболотской, выведенное для описания распространения нелинейных звуковых пучков в вязкой жидкости. Следует отметить, что для ограниченного нелинейного пучка, так же как и для уравнения Кадомцева — Петвиашвили, пока не получено ни одного точного решения. Уравнение, описывающее распространение сигнала, излучаемого осесимметричным источником, имеет вид

$$[u_\tau + \alpha(\tau)uu_\eta + \beta(\tau)u_{\eta\eta\eta} - \mu(\tau)u_{\eta\eta} + \delta(\tau)u - c_1(\tau,r)u_\eta]_\eta + \frac{c(\tau)}{2}\Big(u_{rr} + \frac{1}{r}\,u_r\Big) = 0. \tag{35}$$

Ниже рассматриваются линейные уравнения, описывающие распространение звукового пучка, создаваемого периодическим излучателем конечной ширины, в среде с постоянными α, β, μ и, следовательно, с $\delta = 0$ при $c_1(\tau, y) \neq 0$. Для плоского излучателя уравнение (35) записывается следующим образом:

$$u_{\tau\eta} + \beta u_{\eta\eta\eta\eta} - \mu u_{\eta\eta\eta} - c_1(y) u_{\eta\eta} + u_{yy} = 0. \qquad (36)$$

Полагая $\mu = 0$, решение уравнения (36) будем искать в виде

$$u(x, y) = a(by) \cos{(kx)}, \qquad x = \eta + V\tau. \qquad (37)$$

Подставляя (37) в (36), получаем

$$[-k^2 V + k^4 \beta + k^2 c_1(by) a(by) + b^2 a''(by)] \cos{(kx)} = 0.$$

При заданной функции $c_1(by)$ условие равенства нулю выражения в квадратных скобках приводит к линейному уравнению для определения функции $a(by)$

$$b^2 a'' + (k^4 \beta + k^2 c_1(by) - k^2 V) a = 0. \qquad (38)$$

Пусть $c_1(by) = c_0 \operatorname{ch}^{-2}(by)$. Из уравнения (38) следует

$$a(by) = a_0 \operatorname{ch}^{-2}(by), \qquad V = k^2 \beta + 2c_0/3, \qquad b = k(c_0/6)^{1/2}, \qquad (39)$$

поэтому

$$u(x, y) = a_0 \operatorname{ch}^{-2}(by) \cos{(kx)}. \qquad (40)$$

Функция (40) представляет собой симметричный по y, ограниченный, монохроматический звуковой пучок. Поскольку уравнение (38) линейное, его решение можно представить в виде суперпозиции гармоник различной частоты. В данной работе рассматривается одна гармоника. Из уравнения (38) можно выразить функцию $c_1(by)$ в виде

$$c_1(by) = V - k^2 \beta - \frac{b^2 a''(by)}{k^2 a(by)}. \qquad (41)$$

Задавая зависимость амплитуды колебаний в пучке от y, из формулы (41) определим вид неоднородности распределения пузырьков в жидкости, обеспечивающей существование такого пучка. Например, при $a(by) = a_0 \operatorname{ch}^{-m}(by)$ имеем

$$c_1(by) = V - k^2 \beta - m^2 b^2 k^{-2} + m(m+1) b^2 k^{-2} \operatorname{ch}^{-2}(by).$$

Из условия равенства нулю c_1 на бесконечности следует $V = k^2 \beta + m^2 b^2 k^{-2}$.

Линейное уравнение распространения осесимметричного звукового пучка, записанное в координатах $x = \eta + V\tau$, r, имеет вид

$$V u_{xx} + \beta u_{xxxx} - \mu u_{xxx} - c_1(r) u_{xx} + u_{rr} + \frac{1}{r}\, u_r = 0. \qquad (42)$$

Решение уравнения (42) ($\mu = 0$) будем искать в виде

$$u(x, r) = a(r) \cos{(kx)}. \qquad (43)$$

При этом формула (41) записывается следующим образом:

$$c_1(r) = V - k^2 \beta - \frac{a''(r)}{k^2 a(r)} - \frac{a'(r)}{k^2 r a(r)}.$$

Задавая $a(r)$ в виде $a(r) = a_0 \exp{[-(1 + b^2 r^2)^{1/2}]}$, получаем

$$c_1(r) = b^2 k^{-2} [(1 + b^2 r^2)^{-1/2} + (1 + b^2 r^2)^{-1} + (1 + b^2 r^2)^{-3/2}]. \qquad (44)$$

Из условия равенства нулю c_1 на бесконечности определяется параметр $V = k^2\beta + b^2k^{-2}$. Из формулы (44) следует, что при $r \to \infty$ функция $c_1(r)$ монотонно убывает до нуля, но значительно медленнее, чем амплитуда излучаемого сигнала.

Решения уравнения (36) с отличной от нуля вязкостью определяются формулами (40) и (43), в правые части которых добавлен множитель $\exp(-k^2\mu\tau)$.

Итак, показано, что неоднородное распределение пузырьков по координатам может приводить к появлению решения в виде нерасширяющихся звуковых пучков, в отличие от случая однородной газожидкостной среды. Предложенный в работе [1] способ вывода приближенных волновых уравнений и приведенные в данной работе решения этих уравнений могут быть использованы при исследовании задачи о воздействии ограниченных звуковых пучков на распределение пузырьков в жидкости. При этом исходная система уравнений должна быть записана с учетом относительного движения пузырьков и жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Луговцов А. А.** Распространение нелинейных волн в неоднородной газожидкостной среде. Вывод волновых уравнений в приближении Кортевега — де Фриза // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 2. С. 188–197.
2. **Руденко О. В.** Теоретические основы нелинейной акустики / О. В. Руденко, С. И. Солуян. М.: Наука, 1975.
3. **Карпман В. И.** Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973.
4. **Кутателадзе С. С.** Тепломассообмен и волны в газожидкостных системах / С. С. Кутателадзе, В. Е. Накоряков. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984.
5. **Луговцов А. А., Луговцов Б. А.** Исследование осесимметричных длинных волн в приближении КДВ // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1969. Вып. 1. С. 195–206.

Поступила в редакцию 13/X 2006 г.,
в окончательном варианте — 23/III 2009 г.