ПМТФ, № 4, 1970

ДИФФУЗИОННОЕ И ТЕПЛОВОЕ СКОЛЬЖЕНИЕ БИНАРНОЙ СМЕСИ ГАЗОВ

Ю. Ю. Абрамов, Г. Г. Гладуш

(*Москва*)

Заметим, что явление диффузионного скольжения при постоянной температуре газовой смеси рассмотрено, например, в работе [1], а тепловое скольжение для однокомпонентного газа — в работе [2]. Вычисляется скорость скольжения бинарной газовой смеси в поле градиента температуры и градиентов парциальных давлений. Кинетическое уравнение решается приближенным методом, основанным на физических соображениях. Аналитически получена формула для скорости скольжения при произвольных коэффициентах аккомодации, а также при произвольных концентрациях газов и произвольных массах молекул. Результаты с точностью до 1% согласуются с численными расчетами других авторов.

Для описания системы используется кинетическое уравнение в модельной форме предложенной Батнагаром, Гроссом и Круком [3]. Как известно, эта модель дает хорошее согласие с экспериментом, а в математическом отношении она значительно проще уравнения Больцмана. С другой стороны, ряд эффектов эта модель не описывает, так как предполагается, что время соударений частиц не зависит от их скорости (максвелловские молекулы). Это, прежде, всего, относится к явлению термодиффузии газов. Таким образом, последующие рассуждения применимы к газам, которые обладают малыми коэффициентами термодиффузии.

Пусть смесь газов с плотностями n_1 и n_2 и массами молекул m_1 и m_2 заполняет полупространство $x > 0$, расположенное над плоскостью $x = 0$, температура которой T_0 меняется вдоль координаты y. В направлении z среда считается однородной.

Запишем систему уравнений для бинарной газовой смеси в виде [3]

$$v_x \frac{\partial f_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial f_i}{\partial y} = -\frac{f_i - f_{0i}^u}{\tau_i} \qquad (i = 1,2) \tag{1}$$

$$f_{0i}^u = n_i \left(\frac{m_i}{2\pi T}\right)^{3/2} - \exp\left[\frac{v_x^2 + (v_y - u)^2 + v_z^2}{2T}\right]$$

Здесь u — массовая скорость газовой смеси вдоль поверхности (течение полагается одномерным), τ_i — время соударений частиц, не зависящее, как говорилось выше, от скорости частиц; $f_i\ (x, y, v)$ — функция распределения молекул i-газа по скоростям v.

Величины n_i, u, T представляют собой функционалы от f_i

$$\rho_i = m_i n_i = m_i \int f_i\,(x, y, \mathbf{v})\, d\mathbf{v}$$

$$u = \frac{1}{\rho_1 + \rho_2}(\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2) = \frac{1}{\rho_1 + \rho_2}\left(m_1 \int f_1 v_y d\mathbf{v} + m_2 \int f_2 v_y d\mathbf{v}\right)$$

$$T = \frac{1}{3\,(n_1 + n_2)}\left[m_1 \int (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 f_1 d\mathbf{v} + m_2 \int (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 f_2 d\mathbf{u}\right]$$

Температура измеряется в энергетических единицах. Столкновительные члены в (1) выбраны в упрощенной форме, однако они сохраняют число частиц каждого газа и при $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ сохраняют суммарный импульс и суммарную энергию. Таким образом, под τ подразумевается некоторое среднее время релаксации всей смеси газов.

Закон взаимодействия молекул с поверхностью при таком подходе может быть произвольным. Ограничимся наиболее распространенной аппроксимацией, в которой полагается, что часть молекул отражается зеркально, а часть диффузно

$$f_i(x=0, v_x, v_y, v_z) = (1-q) f_i(x=0, -v_x, v_y, v_z) + q_i f_{iD} \qquad (v_x > 0) \tag{2}$$

Здесь f_{iD} — функция распределения диффузно отраженных молекул, q_i — коэффициент аккомодации.

Конкретный вид функции f_{iD} несуществен. Из условия диффузности отражения следует, что

$$\int v_y f_{iD} d\mathrm{v} = 0$$

Как обычно, ищем решение уравнений (1) в виде

$$f_i = f_{i0}^0 + \varphi_i \qquad (\varphi_i \ll f_{0i}^0) \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) и производя линеаризацию [2], получаем систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\tau v_x \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \varphi_i = f_{0i}^0 \left[\frac{\delta n_i}{n_{0i}} + \frac{\delta T}{2T_0}\left(\frac{m_i v^2}{2} - 3\right) + \right. \\ \left. + \frac{m_i u v_y}{T_0} - \tau v_y \frac{P_{0i}'}{P_{0i}} + \tau v_y \frac{T_0'}{T_0}\left(\frac{5}{2} - \frac{m_i v^2}{2T_0}\right)\right] \tag{4}$$

$$\left(P_{0i} = T_0 n_{0i}, \quad P_{0i}' \equiv \frac{\partial P_{0i}}{\partial y}, \quad T_0' \equiv \frac{\partial T_0}{\partial y}\right)$$

Введем новые переменные

$$\xi = x/\tau w, \qquad c = v_x/w \tag{5}$$

$$U_i(c, \xi) = \frac{w}{n_i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_y \varphi_i dv_y dv_z \tag{6}$$

$$w = \left(2T \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\right)^{1/2}$$

Так что

$$u_i(\xi) = \frac{1}{n_i} \int v_y f_i d\mathrm{v} = \int_{-\infty}^{\infty} U_i(c, \xi)\, dc \tag{7}$$

Умножая обе стороны уравнений (4) на v_y и интегрируя их по v_y и v_z, получаем для U_1 и U_2 систему уравнений

$$c \frac{\partial U_1}{\partial \xi} + U_1 = \frac{e^{-c^2/\theta_1^2}}{\theta_1 \sqrt{\pi}} \left[u - \tau \frac{T}{m_1} \frac{P_1'}{P_1} + \frac{\tau T'}{2m_1}\left(1 - 2\frac{c^2}{\theta_1^2}\right)\right] \tag{8}$$

$$c \frac{\partial U_2}{\partial \xi} + U_2 = \frac{e^{-c^2/\theta_2^2}}{\theta_2 \sqrt{\pi}} \left[u + \tau \frac{T}{m_2} \frac{P_1'}{P_2} + \frac{\tau T'}{2m_2}\left(1 - 2\frac{c^2}{\theta_2^2}\right)\right] \tag{9}$$

$$\theta_1 = \left(\frac{m_0}{m_1}\right)^{1/2}, \qquad \theta_2 = \left(\frac{m_0}{m_2}\right)^{1/2}, \qquad m_0 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

При выводе (9) предполагалось $P = P_1 + P_2 = \text{const}$. Умножая (8) и (9) на ρ_i / ρ и складывая, получаем

$$c\frac{\partial U}{\partial \xi} + U = u(\xi)\frac{1}{\sqrt{\pi}\rho}\left[\frac{\rho_1}{\theta_1}e^{-c^2/\theta_1^2} + \frac{\rho_2}{\theta_2}e^{-c^2/\theta_2^2}\right] - \tag{10}$$

$$-\frac{P_1'\tau}{\sqrt{\pi}\rho}\left[\frac{1}{\theta_1}e^{-c^2/\theta_1^2} - \frac{1}{\theta_2}e^{-c^2/\theta_2^2}\right] + \frac{T'\tau}{2\sqrt{\pi}\rho}\left\{\left[\frac{n_1}{\theta_1}e^{-c_1/\theta_2^2} + \frac{n_2}{\theta_2}e^{-c^2/\theta_2^2}\right] - \right.$$

$$\left. - 2c^2\left[\frac{n_1}{\theta_1^3}e^{-c/\theta_1^2} + \frac{n_2}{\theta_2^3}e^{-c^2/\theta_2^2}\right]\right\}$$

где $U = p^{-1}(U_1\rho_1 + U_2\rho_2)$

Из (2) следует граничное условие:

$$U(\xi = 0, c) = U(\xi = 0, -c) - \frac{1}{\rho}[q_1\rho_1 U_1(\xi = 0, -c) + q_2\rho_2 U_2(\xi = 0, -c)] \tag{11}$$

$$(c > 0)$$

Уравнения (7), (10), (11) образуют замкнутую систему для определения $U(c\xi)$. Эта система может быть сведена к одному интегральному уравнению неразностного типа. Ввиду математических трудностей, возникающих при решении такого уравнения, попытаемся решить систему (7), (10), (11) приближенным методом, предложенным в [4].

В сочетании с простотой этот метод обладает достаточно высокой точностью. В [4] на модели лорентцева газа показано, что решения, полученные с помощью этого метода, отличаются от точных, полученных значительно более громоздкими способами или численными расчетами на машинах, лишь на несколько процентов. Будем интересоваться решением уравнения, связанным с источниками. Поскольку последние убывают при $\xi \to \infty$, то решение стремится к константе при $\xi \to \infty$

$$u(\xi) = a \; (\xi \to \infty) \tag{12}$$

Задача состоит в нахождении этой величины, которая называется скоростью скольжения.

Из уравнения (10) следует, что при $\xi \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} cU(c, \xi)\, dc = 0$$

Таким образом, имеем

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} cU(c, \xi)\, dc = 0 \tag{13}$$

Умножая (10) на c и интегрируя, получаем

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} c^2 U(c, \xi)\, dc = \text{const} \tag{14}$$

Величину a можно найти, вычисляя L при $\xi \to \infty$ ($\underset{\xi \to \infty}{U(c, \xi)}$ находится из (10)) и приравнивая ее к значению, вычисленному при $\xi = 0$. Для этого необходимо знать $U(c < 0, \; \xi = 0)$. Приближенное выражение для

$U\,(c < 0,\ \xi = 0)$ можно получить, положив в (10) $u = a^{(1)}$

$$u\,(c < 0, 0) = \frac{a^{(1)}}{\sqrt{\pi}\rho}\left[\frac{\rho_1}{\theta_1} e^{-c^2/\theta_1^2} + \frac{\rho_2}{\theta_2} e^{-c^2/\theta_2^2}\right] - \frac{P_1'\tau}{\sqrt{\pi}\rho}\left[\frac{e^{-c^2/\theta_1^2}}{\theta_1} - \frac{e^{-c^2/\theta_2^2}}{\theta_2}\right] + \tag{15}$$

$$+ \frac{T'\tau}{2\sqrt{\pi}\rho}\left\{\left[\frac{n_1}{\theta_1} e^{-c^2/\theta_1^2} + \frac{n_2}{\theta_2} e^{-c^2/\theta_2^2}\right] - 2v^2\left[\frac{n_1}{\theta_1^3} e^{-c^2/\theta_1^2} + \frac{n^2}{\theta_2^3} e^{-c^2/\theta_2^2}\right]\right\}$$

$U(c > 0{,}0)$ находится из граничного условия (11) и (8), (9). Для нахождения $a^{(1)}$ потребуем выполнения закона сохранения (13).

В работе [4] изложены соображения, подтверждающие достаточную точность такого способа нахождения $U(c,\ 0)$. Проделывая указанную операцию, получаем

$$a^{(1)} = \frac{q_1\theta_1 - q_2\theta_2}{q_1\theta_1\rho_1 + q_2\theta_2\rho_2}\,\tau P_1' + \frac{q_1\theta_1 n_1 + q_2\theta_2 n_2}{q_1\theta_1\rho_1 + q_2\theta_2\rho_2}\,\frac{\tau T'}{2} \tag{16}$$

Зная выражение для $U(c, 0)$ при $c < 0$, можем вычислить величину a, воспользовавшись (14), (10), (15) с учетом граничного условия (11)

$$a = a^{(1)} - \frac{q_1 n_1 + q_2 n_2}{2\,(n_1 + n_2)}\,a^{(1)} + \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2}\right)\frac{\tau P_1'}{2\,(n_1 + n_2)} + \tag{17}$$

$$+ \left(\frac{q_1 n_1}{m_1} + \frac{q_2 n_2}{m_2}\right)\frac{\tau T'}{2\,(n_1 + n_2)}$$

Подставляя (16) в (17), получаем окончательно

$$a = \left\{\frac{q_1\theta_1 - q_2\theta_2}{q_1\theta_1\rho_1 + q_2\theta_2\rho_2}\left(1 - \frac{q_1 n_1 - q_2 n_2}{2n}\right) + \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2}\right)\frac{1}{2n}\right\}\tau P_1' +$$

$$+ \left\{\frac{q_1\theta_1 n_1 + q_2\theta_2 n_2}{q_1\theta_1\rho_1 + q_2\theta_2\rho_2}\left(1 - \frac{q_1 n_1 + q_2 n_2}{2n}\right) + \left(\frac{q_1 n_1}{m_1} + \frac{q_2 n_2}{m_2}\right)\frac{1}{n}\right\}\frac{\tau T'}{2} \tag{18}$$

$$(n = n_1 + n_2)$$

Первый член (18), пропорциональный P_1', называется скоростью диффузионного скольжения, второй — скоростью теплового скольжения смеси. При $m_1 = m_2$, $q_1 = q_2 = q$ (однокомнонентный газ) скоростью диффузионного скольжения, как и должно быть, обращается в нуль.

Выразим τ в формуле (18) через коэффициенты переноса газовой смеси — коэффициенты диффузии и теплопроводности. Поскольку диффузионное скольжение возникает из членов разложения в кинетическом уравнении, пропорциональных P', то этот эффект связан с диффузией (D_{12}). Аналогично, эффект теплового скольжения связан с теплопроводностью ($\varkappa$). Связь между τ и D_{12} можно найти из условия, что на больших расстояниях от стенки система (8), (9), правильно описывает диффузию в безграничном пространстве [5]

$$u_1 - u_2 = -D_{12}\frac{n_1' n}{n_1 n_2} \tag{19}$$

Находя разность между u_1 и u_2 из системы (8), (9) и приравнивая ее (19), получаем

$$\tau = \frac{D_{12} m_1 m_2 n}{T\rho} \tag{20}$$

Аналогично находится связь между τ и $\varkappa$. Выражая D_{12} и $\varkappa$ через τ, вместо (18) получаем окончательно

$$a = \left\{\frac{q_1\theta_1 - q_2\theta_2}{q_1\theta_1\rho_1 + q_2\theta_2\rho_2}\left(1 - \frac{q_1n_1 + q_2n_2}{2n}\right) + \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2}\right)\frac{1}{2n}\right\}\frac{m_1m_2n}{kT\rho} D_{12}P_1{}' + \tag{21}$$
$$+ \left\{\frac{q_1\theta_1n_1 + q_2\theta_2n_2}{q_1\theta_1\rho_1 + q_2\theta_2\rho_2}\left(1 - \frac{q_1n_1 + q_2n_2}{2n}\right) + \left(\frac{q_1n_1}{m_1} + \frac{q_2n_2}{m_2}\right)\frac{1}{n}\right\}\frac{\varkappa}{5kT}\left[\frac{n_1}{m_1} + \frac{n_2}{m_2}\right]^{-1} T'$$

где k — постоянная Больцмана.

В работе [6] при $T' = 0$ численно получено выражение для скорости скольжения в частном случае

$$q_1 = q_2 = 1, \qquad n_1 / n_2 \to 0, \qquad m_1 / m_1 = {}^{18}/_{29} \qquad \text{(пары воды в воздухе)}$$

При этих условиях из формулы (21) получим

$$a = -0.275 D_{12}\frac{n_1{}'}{n_2} \tag{22}$$

В [6] приводится значение численного коэффициента, равное 0,277, что лишь на 1% отличается от коэффициента в (22).

Как уже отмечалось в начале статьи, модель, с помощью которой получены результаты, может быть применена к смесям газов, имеющим малый коэффициент термодиффузии. В дальнейшем, однако, предполагается учесть термодиффузию для вычисления скорости теплового скольжения бинарной смеси, применяя тот же приближенный метод решения кинетического уравнения к линеаризованному уравнению Больцмана.

Поступила 1 VII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Исследования в области поверхностных сил. М., «Наука», 1960.
2. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
3. Bhatnagar P. L., Cross E. P., Krook M. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. Phys. Rev., 1954, vol. 94, No. 3.
4. Абрамов Ю. Ю., Напартович А. П. Граничные условия к уравнению диффузии. Теплофизика высоких температур, 1968, т. 6, № 5.
5. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
6. Дерягин Б. В., Яламов Ю. И., Ивченко И. Н. Расчет скорости диффузионного скольжения бинарной газовой смеси. Докл. АН СССР, 1968, т. 180, № 2.