

УДК 681.3.08 + 519.2

О НАДЁЖНОСТИ СЧИТЫВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ТОЧЕЧНЫХ ОБЪЕКТОВ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ ЧИСЛЕ ПОРОГОВЫХ УРОВНЕЙ СКАНИРУЮЩЕЙ АПЕРТУРЫ*

А. Л. Резник, В. М. Ефимов, А. А. Соловьев, А. В. Торгов

*Институт автоматизации и электрометрии СО РАН,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1
E-mail: reznik@iae.nsk.su*

Рассматриваются задачи, возникающие при расчёте вероятности безошибочного считывания случайных полей, когда регистрация координат точечных объектов, образующих случайное поле, осуществляется интеграторами с ограниченным числом пороговых уровней. Приводится ряд новых результатов, полученных с применением средств компьютерной аналитики. Для процесса регистрации, осуществляемой одноуровневыми интеграторами, предложены оригинальные способы нахождения вероятности безошибочного считывания, не требующие многомерного интегрирования.

Ключевые слова: случайное разбиение интервала, компьютерные аналитические преобразования, вероятность безошибочного считывания.

Введение. Предлагаемая работа посвящена решению проблемных вероятностных задач, которые возникают при оценивании надёжности считывания случайных точечных полей и имеют непосредственное отношение к случайному разбиению интервала. Сложность рассматриваемых вопросов состоит в том, что большинство задач, связанных с построением процедур регистрации и распознавания случайных точечных структур, несмотря на свою прозрачность и простоту постановки, на сегодняшний день не имеют точного аналитического решения. Реализуя один из возможных подходов к их решению, мы разработали методы программного проведения трудоёмких аналитических преобразований, при этом созданные системы аналитического манипулирования на ЭВМ были использованы для расчёта многочисленных частных решений задачи, что в дальнейшем позволило установить ряд новых, ранее неизвестных общих аналитических закономерностей. В разд. 1–3 обсуждаются компьютерно-ориентированные подходы к решению вероятностных проблем, возникающих при исследовании процесса регистрации случайных точечных изображений в условиях, когда считывание координат осуществляется интеграторами с ограниченным числом пороговых уровней. В разд. 4, 5 основное внимание уделено разработке таких алгоритмических подходов, которые позволяют решать возникающие задачи исключительно вероятностными средствами, не требующими использования компьютерных расчётов и проведения трудоёмких процедур многомерного интегрирования.

1. Телевизионное считывание случайного двумерного поля. Под случайным двумерным полем подразумевается реализация на плоскости случайного точечного распределения, созданного неким пуассоновским источником интенсивностью λ . Это означает, что вероятность события, заключающегося в том, что на любое наперёд заданное подмножество A такого поля в результате воздействия случайного источника выпадет в точности n отсчётов потока, зависит только от площади $s(A)$ этого подмножества, но не зависит ни

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00361), Президиума РАН (проект № 15.11/2012) и Сибирского отделения РАН (проект СО РАН — НАН Беларуси № 16/2012).

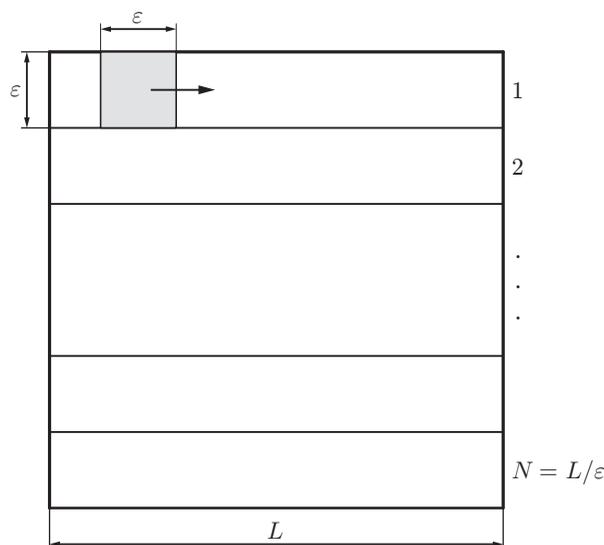


Схема телевизионного считывания случайного пуассоновского поля размером $L \times L$

от каких других его геометрико-топологических характеристик и задаётся соотношением

$$P_A(n) = \exp(-\lambda s(A)) \frac{(\lambda s(A))^n}{n!}.$$

Классический способ считывания координат таких импульсно-точечных объектов заключается в телевизионном считывании случайного поля в соответствии со схемой, представленной на рисунке. Считывающей апертурой $\epsilon \times \epsilon$ последовательно осуществляется сканирование всех горизонтальных полос изображения, имеющих ширину ϵ . Внутри каждой полосы апертура непрерывно перемещается, двигаясь по оси абсцисс слева направо. При попадании точечного объекта в пределы считывающей апертуры суммарный сигнал интегратора увеличивается на единицу и переходит на следующий пороговый уровень. В этот момент происходит фиксация координат очередного точечного объекта (естественно, с точностью ϵ по оси ординат). При выбывании какого-либо объекта из окна интегрирующей апертуры суммарный уровень сигнала интегратора соответственно уменьшается на единицу. При щелевом (одномерный случай) или телевизионном (двумерный случай) считывании дискретных изображений интеграторами, имеющими ограниченное число пороговых уровней, важнейшей характеристикой является вероятность безошибочного считывания изображения, т. е. вероятность того, что за весь период сканирования в окне интегрирующей апертуры ни разу не будет находиться более k объектов (здесь k — число пороговых уровней интегратора). Различные аспекты нахождения частных и общих решений этой задачи и будут предметом дальнейшего рассмотрения в данной работе.

2. Сведение общей двумерной задачи безошибочного считывания к одномерному случаю. Точного аналитического решения сформулированной в разд. 1 задачи в общем виде получить не удаётся. Известны [1, 2] лишь частные формулы для простейших случаев (например, найдено точное аналитическое решение для считывания интегратором, обладающим одним пороговым уровнем), а также ряд асимптотических соотношений [3]. Вообще говоря, двумерная задача нахождения вероятности P безошибочного считывания плоского точечного изображения, формируемого случайным пуассоновским источником интенсивностью λ , достаточно просто редуцируется к одномерной, так что её общее решение фактически эквивалентно нахождению вероятности $P_{n,k}(\epsilon, L)$ безошибочного считывания

случайного одномерного n -точечного изображения, сосредоточенного в интервале $(0, L)$. В частности, для считывания, проводимого щелевым интегратором, имеющим k пороговых уровней и апертуру интегрирования ε , эта вероятность записывается в виде

$$P = \left[\exp(-\lambda\varepsilon L) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\varepsilon L)^n}{n!} P_{n,k}(\varepsilon, L) \right]^N.$$

Здесь выражение в квадратных скобках — вероятность безошибочного считывания каждой из N горизонтальных полос, представленных на рисунке. В свою очередь, соотношение для вероятности безошибочного считывания отдельной полосы есть взвешенная сумма вероятностей наличия в полосе в точности n пуассоновских отсчётов (множитель $\exp(-\lambda\varepsilon L) \frac{(\lambda\varepsilon L)^n}{n!}$), взятых с весами $P_{n,k}(\varepsilon, L)$. При этом каждый из весовых коэффициентов $P_{n,k}(\varepsilon, L)$ как раз и является вероятностью безошибочного считывания случайного одномерного n -точечного изображения, когда считывание проводится k -пороговым одномерным щелевым интегратором, имеющим апертуру ε . Таким образом, отыскание аналитических формул $P_{n,k}(\varepsilon, L)$ равносильно решению следующей простой в постановке, но в действительности весьма сложной вероятностной задачи:

Пусть n точек x_1, x_2, \dots, x_n случайно брошены на интервал $(0, 1)$, т. е. имеется n независимых испытаний случайной величины, равномерно распределённой на интервале $(0, 1)$. Требуется определить вероятность $P_{n,k}(\varepsilon)$ события, состоящего в том, что не существует ни одного подынтервала $\Omega_\varepsilon \subset (0, 1)$ длины ε , содержащего более k точек.

3. Компьютерно-аналитические методы нахождения формул, описывающих надёжность многопорогового считывания. Как уже отмечалось, общее аналитическое решение $P_{n,k}(\varepsilon)$ сформулированной в разд. 2 задачи, как и многих других задач со случайным разбиением интервала [4], на сегодняшний день не найдено. В замкнутом виде известно [1, 2] лишь решение для простейшего случая $k = 1$:

$$P_{n,1}(\varepsilon) = (1 - (n-1)\varepsilon)^n, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1/(n-1). \quad (1)$$

К сожалению, уже при $k = 2$ для вероятности $P_{n,k}(\varepsilon)$ не существует такого же компактного обобщения, как приведённая формула (1), поскольку само выражение $P_{n,k}(\varepsilon)$ перестаёт описываться единственным полиномом от ε степени n , а по существу является набором полиномов, непрерывно «состыкованных» в нескольких узловых точках.

Для нахождения точных вероятностных формул $P_{n,k}(\varepsilon)$ при произвольных, но фиксированных значениях целочисленных параметров n и k нами предложено несколько алгоритмических схем. Одна из них основана на представлении исходных вероятностей $P_{n,k}(\varepsilon)$ в виде многократных интегралов по областям, которые описываются выпуклыми многогранниками в n -мерном пространстве с параметрически заданными границами [5]. В основу другой схемы [6] положен комбинаторно-рекурсивный алгоритм, когда на первом этапе сначала рассчитываются дискретные прототипы, а затем в результате предельного перехода находят точные аналитические формулы. Третья схема [7, 8] базируется на дифференцировании по параметру ε многократных интегралов, описывающих вероятность $P_{n,k}(\varepsilon)$, с последующим восстановлением полиномов по значениям всех его производных.

Серьёзным недостатком всех перечисленных схем является то, что проведение расчётов по нахождению конкретных формул $P_{n,k}(\varepsilon)$ (при фиксированных значениях параметров n и k) связано с огромным объёмом аналитических выкладок, которые практически невозможно выполнить «вручную» при $n > 3$. Поэтому все три алгоритмические схемы были нами полностью формализованы, а затем выполнены в виде программных систем, осуществляющих специализированные аналитические выкладки.

Анализ «компьютерных» формул позволил нам найти ряд общих ранее неизвестных аналитических соотношений и зависимостей. В частности, для $k = 2$ и чётных $n = 2m$ мы сначала установили [7], а впоследствии [9] строго доказали формулу

$$P_{2m,2}(\varepsilon) = \frac{1}{m+1} C_{2m}^m (1 - (m-1)\varepsilon)^{2m}, \quad (2)$$

которая верна, если $1/m < \varepsilon < 1/(m-1)$. Коэффициенты $(1/(m+1))C_{2m}^m$ в (2) являются классическими числами Каталана, известными ещё по работам Леонарда Эйлера, но интерес к ним сохранился до настоящего времени, поскольку они лежат в основе перечислительной комбинаторики [10] и возникают в большом числе вероятностных приложений.

Не так давно [11] нам удалось доказать, что для $k = 2$ при нечётных $n = 2m + 1$ на участке $1/(m+1) < \varepsilon < 1/m$ вероятность $P_{n,k}(\varepsilon)$ представляется в виде

$$P_{2m+1,2}(\varepsilon) = C_{2m+1}^{m+1} (1 - m\varepsilon)^{m+1} (1 - (m-1)\varepsilon)^m - 2C_{2m+1}^{m+2} (1 - m\varepsilon)^{m+2} (1 - (m-1)\varepsilon)^{m-1} + \\ + C_{2m+1}^{m+3} (1 - m\varepsilon)^{m+3} (1 - (m-1)\varepsilon)^{m-2}. \quad (3)$$

На одном из этапов доказательства соотношения (3) потребовалось найти общее число специальных перестановок элементов трёх подмножеств, каждое из которых представляет собой ранжированную последовательность равномерно распределённых случайных величин. Возникшая при этом задача привела нас к интересному расширению классической последовательности Каталана [12–14].

В завершение краткого обзора разработанных методов компьютерной поддержки вычислений, направленных на расчёт точных аналитических формул $P_{n,k}(\varepsilon)$, отметим также, что нами разработаны и полностью формализованы алгоритмы, позволяющие последовательно вычислять формулы $P_{n,n-i}(\varepsilon)$, $i = 1, 2, \dots$, и т. д. К настоящему времени по ним «вручную» рассчитаны точные аналитические формулы $P_{n,n-1}(\varepsilon)$, $P_{n,n-2}(\varepsilon)$, $P_{n,n-3}(\varepsilon)$. Реализация алгоритма в виде компьютерной программы, осуществляющей аналитические преобразования на ЭВМ, в данном случае возможна, но весьма затруднительна, поскольку результирующие формулы зависят уже не от одного, а от двух свободных параметров.

4. Вероятностные методы оценивания надёжности считывания для интегратора с одним пороговым уровнем. Анализ методов отыскания точных аналитических формул $P_{n,k}(\varepsilon)$, описывающих вероятность безошибочного считывания случайного n -точечного изображения, которые обсуждались в разд. 3, показывает следующее. В простейшем случае, когда целочисленный параметр $k = 1$ (т. е. для интегратора с одним пороговым уровнем), решение достигается либо с помощью трудоёмких аналитических вычислений на компьютере, либо (если отказаться от применения компьютерных технологий) с помощью стандартных средств математического анализа, но с обязательным использованием процедур многомерного интегрирования. Например, прямой путь получения решения (1) заключается в представлении вероятности $P_{n,1}(\varepsilon)$ в виде легко вычисляемого повторного интеграла

$$P_{n,1}(\varepsilon) = n! \int_{(n-1)\varepsilon}^1 dx_n \left\{ \int_{(n-2)\varepsilon}^{x_n - \varepsilon} dx_{n-1} \dots \left\{ \int_{2\varepsilon}^{x_4 - \varepsilon} dx_3 \left\{ \int_{\varepsilon}^{x_3 - \varepsilon} dx_2 \left\{ \int_0^{x_2 - \varepsilon} dx_1 \right\} \right\} \right\} \right\}. \quad (4)$$

В этом разделе ближайшей задачей будет получение соотношения (1) чисто вероятностными средствами — без использования компьютерных расчётов и процедур многомерного интегрирования типа (4). На такую возможность наталкивает сам вид зависимости (1), в структуре которой явно просматривается схема независимых испытаний Бернулли.

Соотношение (1), в принципе, можно трактовать так: проводится серия из n независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = 1 - (n - 1)\varepsilon$ и вероятностью неуспеха $q = (n - 1)\varepsilon$, а $P_{n,1}(\varepsilon)$ есть вероятность того, что все n испытаний будут успешными. Другими словами, если интервал $(0, 1)$, на котором проводится случайное независимое бросание n точек, разбить на два подынтервала: $\Delta_1 = (0, (1 - (n - 1)\varepsilon))$ и $\Delta_2 = ((1 - (n - 1)\varepsilon), 1)$, то вероятность $P_{n,1}(\varepsilon)$ соответствует событию, состоящему в том, что все брошенные точки попадут в подынтервал Δ_1 . В результате утверждение, которое нам предстоит доказать, можно сформулировать следующим образом: вероятность того, что при случайном бросании n точек на интервал $(0, 1)$ все они разлетятся друг от друга на расстояние, превышающее ε , совпадает с вероятностью того, что все брошенные точки попадут в подынтервал $\Delta_1 = (0, (1 - (n - 1)\varepsilon))$ длиной $1 - (n - 1)\varepsilon$. Последняя вероятность, очевидно, равна $(1 - (n - 1)\varepsilon)^n$.

Обозначим через X множество точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ в евклидовом пространстве R^n таких, что $0 < x_i < 1, \forall i = \overline{1, n}; |x_i - x_j| > \varepsilon, i \neq j$. Соответственно через Y обозначим множество точек $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$ таких, что $0 < y_i < (1 - (n - 1)\varepsilon), \forall i = \overline{1, n}$. Требуется показать, что объёмы $V(X)$ и $V(Y)$, которые занимают области X и Y внутри n -мерного единичного куба $K_n = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n), 0 < z_i < 1, \forall i = \overline{1, n}\}$, равны между собой.

С учётом независимости испытаний и полной симметрии задачи по переменным x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_n достаточно показать равенство объёмов $V(X^*) = V(Y^*)$ двух подмножеств $X^* \subset X$ и $Y^* \subset Y$, которые формируются теми и только теми элементами $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ и $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$ множеств X и Y , координаты которых образуют монотонно возрастающие последовательности (вариационные ряды), а именно $0 < x_1^* < x_2^* < \dots < x_n^* < 1$ и $0 < y_1^* < y_2^* < \dots < y_n^* < 1$. Очевидно, что объёмы введённых нами n -мерных областей связаны соотношениями

$$V(X) = n!V(X^*); \quad V(Y) = n!V(Y^*), \quad (5)$$

т. е. для решения задачи достаточно показать, что $V(X^*) = V(Y^*)$, откуда непосредственно следует равенство $V(X) = V(Y)$. Для этого удобнее будет считать точки из n -мерного пространства R^n векторами n -мерного линейного векторного пространства E^n : каждой точке $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ будем ставить в соответствие вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in E^n$. Теперь достаточно заметить, что два векторных подпространства \mathbf{X}^* и \mathbf{Y}^* отличаются между собой лишь взаимным векторным сдвигом $\mathbf{X}^* = \mathbf{Y}^* + \mathbf{a}$, где вектор $\mathbf{a} = (0, \varepsilon, 2\varepsilon, \dots, (n - 1)\varepsilon)^T$. Таким образом, с точностью до смещения начала координат векторные подпространства \mathbf{X}^* и \mathbf{Y}^* тождественны, а соответствующие им множества X^* и Y^* представляют собой области в n -мерном евклидовом пространстве R^n , получающиеся одна из другой параллельным сдвигом. Следовательно, множества X^* и Y^* имеют эквивалентные геометрико-топологические характеристики, в том числе совпадающие n -мерные объёмы. С учётом (5) объёмы областей X и Y тоже совпадают. Доказательство завершено.

Следует заметить, что в приведённом доказательстве весьма существенным является то обстоятельство, что нами предварительно установлено равенство объёмов подмножеств X^* и Y^* , которые формируются теми точками множеств $X \subset R^n$ и $Y \subset R^n$, чьи координаты образуют вариационные ряды. Дело в том, что области X^* и Y^* односвязны, поэтому применительно к ним оказалось возможным провести доказательство их «геометрической тождественности». А вот область X в отличие от области Y многосвязна, поэтому без предварительного этапа доказать напрямую равенство их объёмов $V(X)$ и $V(Y)$ не удаётся.

5. Применение схемы испытаний Бернулли для оценивания надёжности считывания при круговой траектории сканирования. Ряд технических задач, связанных с регистрацией координат случайных точечных полей и цифровых изображений, относится к круговой траектории перемещения сканирующей апертуры, поэтому одномерные формулы для прямолинейного щелевого сканирования интервала, которые до этого входили в соотношения для вероятности безошибочного считывания подобных изображений, должны быть замещены формулами, соответствующими схеме, когда случайные точки бросаются не на интервал, а на окружность. В данном разделе мы будем касаться только вопросов, возникающих при использовании одноуровневых интеграторов, поэтому основная одномерная задача с прямолинейными траекториями сканирования, которая рассматривалась выше, трансформируется в следующую задачу, относящуюся к круговым траекториям сканирования:

Точки x_1, x_2, \dots, x_n случайно брошены на окружность. Какова вероятность $\text{Pr}_n(\alpha)$ того, что минимальный из n центральных углов, на которые разбивается при этом окружность, превосходит α ?

Решение этой задачи известно [15]. Здесь мы приведём новый способ решения, которое, во-первых, достигается чисто вероятностными средствами (без использования трудоёмких компьютерных расчётов и процедур многомерного интегрирования), во-вторых, устанавливает удобную взаимосвязь между случайным разбиением интервала и случайным разбиением окружности, в-третьих, является, на наш взгляд, наиболее простым из существующих.

Итак, в качестве начала координат на окружности выберем любую из n брошенных точек x_1, x_2, \dots, x_n , например точку x_i . Тогда искомая вероятность $\text{Pr}_n(\alpha)$ представима в виде произведения двух величин:

$$\text{Pr}_n(\alpha) = \text{Pr} 1_{n-1}(2\alpha) \text{Pr} 2_{n-1}(2\pi - 2\alpha). \quad (6)$$

Здесь $\text{Pr} 1_{n-1}(2\alpha)$ есть вероятность того, что одновременно на обеих — «правой» и «левой» — дугах α , примыкающих к точке x_i по ходу и против хода часовой стрелки, не выпало ни одной из $(n-1)$ оставшихся случайных точек. Вероятность этого

$$\text{Pr} 1_{n-1}(2\alpha) = \left(1 - \frac{2\alpha}{2\pi}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)^{n-1}. \quad (7)$$

Сомножитель $\text{Pr} 2_{n-1}(2\pi - 2\alpha)$ в (6) есть вероятность того, что все $(n-1)$ случайных точек (за исключением точки x_i), выпавших на «разомкнутую» дугу $(2\pi - 2\alpha)$, разлетятся друг от друга на угол больше α . Корректно применяя соотношение (1) к таким образом разомкнутой дуге (т. е. фактически к $(n-1)$ точкам, брошенным на интервал $(0, 2\pi - 2\alpha)$), получим

$$\text{Pr} 2_{n-1}(2\pi - 2\alpha) = \left(1 - (n-2) \frac{\alpha}{2\pi - 2\alpha}\right)^{n-1}. \quad (8)$$

Подставляя (7) и (6) в (5), окончательно имеем

$$\text{Pr}_n(\alpha) = \left(1 - \frac{n\alpha}{2\pi}\right)^{n-1}. \quad (9)$$

Заметим, что, как и в случае с формулой (1), доказанное соотношение (9) можно было получить другим путём, поскольку оно тоже допускает вероятностную трактовку с использованием схемы испытаний Бернулли, а именно проводится случайное бросание $(n-1)$ точек x_1, x_2, \dots, x_{n-1} на интервал $(0, 2\pi)$, который предварительно разбит на подынтервалы $\Delta_1 = (0, n\alpha)$ и $\Delta_2 = (n\alpha, 2\pi)$. Испытание считается успешным, если выброшенная

точка попадает в подынтервал Δ_2 (т. е. вероятность успеха $p = \frac{2\pi - n\alpha}{2\pi} = 1 - \frac{n\alpha}{2\pi}$). Тогда вероятность $\text{Pr}_n(\alpha)$, описываемая соотношением (9), соответствует тому, что серия из $(n - 1)$ испытаний будет абсолютно успешной, т. е. все выброшенные точки попадут в интервал Δ_2 . Если теперь полностью повторить схему, применённую в разд. 4, то можно строго доказать, что именно величиной $\text{Pr}_n(\alpha)$ описывается ещё и вероятность события, состоящего в том, что при случайном бросании n точек на окружность минимальный центральный угол, на который она разбивается, превысит α . При этом взаимно однозначное соответствие между множеством успешных бросаний $(n - 1)$ точек на интервал и множеством успешных (с разлётом на угол, превышающий α) бросаний n точек на окружность строится следующим образом. Сначала для простоты изложения полагаем, что случайно брошенные на интервал точки упорядочены по возрастанию: $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$. Для каждого успешного бросания $(n - 1)$ точек x_1, x_2, \dots, x_{n-1} на интервал $(0, 2\pi)$, когда все брошенные точки попали в подынтервал Δ_2 длиной $(2\pi - n\alpha)$, проводится двухэтапная процедура. На первом этапе подынтервал Δ_2 сворачивается в окружность длиной $(2\pi - n\alpha)$, а соединённые концы свёрнутого подынтервала принимаются в качестве дополнительной точки $x_n = 2\pi - n\alpha$ (в зависимости от обстоятельств мы будем иногда эту же точку использовать как начало координат $x_0 = 0$ в системе с направлением движения по часовой стрелке). На втором этапе каждая из n дуг, на которые разбивается окружность точками $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, «наращивается» на величину α , в результате чего длина окружности возрастает до 2π , а исходно выпавшая случайная последовательность x_1, x_2, \dots, x_{n-1} в совокупности с дополнительной точкой $x_0 = 0$ преобразуется в последовательность $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$, определяемую как $y_i = x_i + i\alpha, \forall i = \overline{0, n-1}$. Сохраняя введённые условности, считаем, что на преобразованной таким образом окружности началом координат служит точка $y_0 = 0$, совпадающая с конечной точкой $y_n = 2\pi$. В $(n - 1)$ -мерном евклидовом пространстве R^{n-1} объём множества X , соответствующего успешным бросаниям на интервале $(0, 2\pi)$, совпадает с объёмом построенного множества Y , отвечающего за нужные углы разлёта на окружности (по-видимому, нет необходимости в рамках одной публикации практически дословно воспроизводить доказательство из разд. 4). А поскольку этими множествами исчерпываются успешные бросания на интервале и на окружности, то тем самым доказательство завершено.

Заключение. В данной работе обсуждены алгоритмы проведения на ЭВМ эквивалентных аналитических преобразований, которые были созданы и эффективно применены авторами для нахождения новых, ранее неизвестных аналитических соотношений и формул, описывающих надёжность телевизионного считывания случайных точечных изображений, когда такое считывание осуществляется многоуровневыми интеграторами. Для регистрации случайных полей, проводимой с помощью одноуровневых интеграторов, предложены новые алгоритмы расчёта вероятности безошибочного считывания, не требующие трудоёмких программных вычислений и процедур многомерного интегрирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Parzen E. Modern Probability Theory and Its Applications. New York — London: John Wiley and Sons, Inc., 1960. 464 p.
2. Уилкс С. Математическая статистика. М.: Наука, 1967. 632 с.
3. Ефимов В. М., Искольдский А. М., Крендель Ю. М., Лившиц З. А. О характеристиках различных методов считывания изображений дискретной структуры // Автометрия. 1973. № 1. С. 3–7.
4. Дэйвид Г. Порядковые статистики. М.: Наука, 1979. 336 с.

5. **Ефимов В. М., Резник А. Л.** Аналитическое вычисление на ЭВМ объемов, ограниченных системой гиперплоскостей в n -мерном пространстве // *Автометрия*. 1976. № 1. С. 116–119.
6. **Ефимов В. М., Резник А. Л.** Аналитическое определение с помощью ЭВМ статистических характеристик процесса щелевого сканирования потока Бернулли // *Автометрия*. 1977. № 4. С. 49–51.
7. **Резник А. Л.** Моделирование на ЭВМ непрерывного считывания изображений дискретной структуры // *Автометрия*. 1981. № 6. С. 3–6.
8. **Reznik A. L., Efimov V. M.** Analytical computer calculations in image analysis: correct reading of random discrete-point fields // *Proc. of the IASTED International Conference on Signal Processing, Pattern Recognition, and Applications*. June, 30–July, 2, 2003. Rhodes, Greece. P. 6–10.
9. **Резник А. Л., Ефимов В. М., Соловьев А. А.** Компьютерно-аналитический расчёт вероятностных характеристик процесса считывания случайных точечных изображений // *Автометрия*. 2011. 47, № 1. С. 10–16.
10. **Stanley R. P.** *Enumerative Combinatorics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. Vol. 2. 595 p.
11. **Reznik A., Efimov V., Soloviev A., Torgov A.** Computer intelligence and generalized Catalan numbers in the pattern recognition problems // *Proc. of the 11th Intern. Conf. Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies (PRIA-11-2013)*. Samara, September, 23–28, 2013. P. 118–121.
12. **Резник А. Л., Ефимов В. М., Соловьев А. А., Торгов А. В.** Обобщённые числа Каталана в задачах обработки случайных дискретных изображений // *Автометрия*. 2011. 47, № 6. С. 11–15.
13. **Резник А. Л., Ефимов В. М., Соловьев А. А., Торгов А. В.** О безошибочном считывании случайных дискретно-точечных полей // *Автометрия*. 2012. 48, № 5. С. 93–103.
14. **Резник А. Л., Ефимов В. М.** Компьютерная аналитика и обобщённые числа Каталана в задачах регистрации случайных дискретных объектов. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2013. 64 с.
15. **Stevens W. L.** Solution to a geometrical problem in probability // *Ann. Eugenics*. 1939. 9, N 4. P. 315–320.

Поступила в редакцию 21 апреля 2014 г.
