/

ПМТФ, № 1, 1975

УДК 532.516

О СИЛАХ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ПОРИСТЫЙ ШАР, ВРАЩАЮЩИЙСЯ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

Ю. П. Лебедев, Л. Н. Маурин, Е. Д. Потапов

(Иваново, Горький)

Найдены точные выражения для силы сопротивления (модифицированная сила Стокса) и подъемной силы (модифицированная сила Магнуса), действующих иа пористый шар, медленно вращающийся в медленно обтекающем его однородном потоке вязкой жидкости.

1. Постановка задачи. Пусть пористый шар радиуса R, вращающийся стационарно с угловой скоростью ω_i, помещен в начало координат в однородный поток $V_i=\text{const}$, причем $\frac{VR}{\nu}$, $\frac{\omega R^2}{\nu}<1$. На такой шар со стороны потока будет действовать сила, общее выражение для которой может быть получено уже из требования ковариантности. Действительно, вводя для удобства вместо псевдовектора угловой скорости ω_i дуальный ему истинный антисимметричный тензор $\beta_{ik}=\varepsilon_{ikl}\,\omega_l$, имеем (в предположении медленности движений $\frac{VR}{\nu}$, $\left.\frac{\omega R^2}{\nu}<1\right)$

$$F_i=\varphi V_i+\theta\ \beta_{ik}\cdot V_k+0(V_i,\ \ \beta_{ik}V_k), \tag{1.1}$$

где φ и θ — постоянные скаляры, зависящие от вязкости и плотности жидкости, размеров шара, а также от коэффициентов объемной и поверхностной проницаемости пористого шара.

Слагаемое φV_i представляет собой подправленную учетом пористости стоксову силу сопротивления, а слагаемое $\theta\beta_{ik}V_k$—подъемную силу. Подъемная сила является билинейным (перекрестным) эффектом, и поэтому ее вычисление требует такого решения задачи, которое учитывает перекрестные слагаемые в нелинейных членах уравнения Навье—Стокса и не требует (в рассматриваемом приближении медленных движений) учета членов, содержащих квадраты угловой скорости и скорости обтекания. Это позволяет с самого начала исключить из рассмотрения центробежные силы внутри пористого вращающегося шара.

Заметим, что в неустановившемся течении ($V_i=V_i(t)$, $\beta_{ik}=\beta_{ik}(t)$) вектор силы будет уже не функцией, а функционалом от $V_i\ (t)$, $\beta_{ik}\,(t)$ и от временных производных этих величин (функционал будет содержать, в частности, интеграл последействия). При этом φ и θ из (1.1) будут не постоянными коэффициентами, а зависящими от времени и стоящими под знаками интегралов в функционалах. А так как характер зависимости φ и θ от времени не может быть установлен из ковариантных или размерных соображений, то функциональный аналог выражения (1.1) для неустановившегося движения становится бесполезным.

Вернемся к случаю установившегося движения. Для определения явного вида силы (1.1), т. е. коэффициентов φ и θ, необходимо знать поля скоростей и давлений, возмущенных присутствием в потоке вращающегося шара. Для их расчета имеем две задачи. Первая, внешняя, требует решения уравнений Навье—Стокса

$$(1.2)\qquad v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\Delta v_i,\quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i}=0,\quad r>R,$$

$$v_i\to V_i \quad \text{при} \quad r\to\infty,$$

а вторая, внутренняя,— уравнения Дарси для фильтрационного течения жидкости в пористом шаре

$$(1.3)\qquad \Delta\Pi=0,\quad Q_i=-\frac{k}{\eta}\frac{\partial\Pi}{\partial x_i},\quad r<R.$$

(Как было указано выше, в рассматриваемом приближении центробежная сила должна быть опущена.)

Здесь v_i и p — скорость и давление жидкости вне шара, Q_i и Π — фильтрационная скорость и давление жидкости внутри шара, k — проницаемость материала, из которого сделан шар, η — динамическая вязкость жидкости.

На поверхности пористого шара ставятся три граничных условия: равенства нормальных составляющих наружной и фильтрационной скоростей

$$(1.4)\qquad n_iv_i=n_iQ_i,\quad r=R;$$

равенства внешних нормальных напряжений и давления внутри шара

$$(1.5)\qquad p-\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)n_in_k=\Pi,\quad r=R$$

и, наконец, граничное условие, связывающее градиент касательной составляющей наружной скорости с разностью касательных составляющих наружной и фильтрационной скоростей

$$(1.6)\qquad \frac{\partial v_m}{\partial r}-n_m\frac{\partial}{\partial r}(n_pv_p)=\frac{\alpha}{k^{1/2}}[v_m-Q_m-(\vec{\omega}\times\vec{R})_m],\quad r=R.$$

Граничное условие (1.6) предложено на основании экспериментов в [1] и теоретически обосновано в [2]. Его физический смысл станет ясным, если заметить, что в граничной с поверхностью пористого тела области скорость жидкости изменяется от v (вне тела) до Q (внутри тела), причем это изменение скорости происходит на некотором характерном расстоянии, зависящем от пористых свойств тела. Так как проницаемость k имеет размерность квадрата длины, то существует только одно характерное расстояние в пористом теле (помимо размеров самого тела), и оно пропорционально $\sqrt{k}$. Таким образом, изменение скорости в околоповерхностной области происходит на расстоянии $\Delta r\sim\sqrt{k}$, и, следовательно, для градиента скорости в этой области имеем $\frac{\Delta v}{\partial r}\sim\frac{v-Q}{\sqrt{k}}$ или $\frac{\partial v}{\partial r}=\alpha\frac{v-Q}{k^{1/2}}$. (Учет кривизны шара приводит к формуле (1.6).) Таким образом, коэффициент α, введенный в (1.6), отражает поверхностные свойства пористого тела подобно тому, как коэффициент k отражает его объемные свойства, и вместе с последним должен для каждого пористого материала определяться экспериментально. Решение задачи строится как разложение по безразмерным малым параметрам, пропорциональным соответственно V_i и β_{ik} (хоть ниже явно и не используются безразмерные переменные). Причем первое приближение линейно по V_i и β_{ik}, не содержит их произведения и не учитывает поэтому нелинейных членов в уравнении Навье—Стокса. Что же касается второго приближения, то в нем всюду (в том числе и в нелинейном члене $v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ уравнения Навье—Стокса) сохраняются лишь перекрестные члены, пропорциональные $\beta_{ik}V_m$, т. е. те, которые ответственны за появление подъемной силы.

2. Первое (линейное) приближение. Задача для первого приближения отличается от полной задачи (1.2) — (1.6) только тем, что вместо (1. 2) имеем

$$0 = -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} + \eta \cdot \Delta v_i^{(1)}, \quad \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_i} = 0, \quad v_i^{(1)} \to V_i \text{ при } r \to \infty. \tag{2.1}$$

Применяя к уравнению Навье—Стокса в (2.1) операцию div, получим

$$\Delta p^{(1)} = 0. \tag{2.2}$$

Решение (2.2), в котором возмущение поля давлений, вызванное присутствием шара, исчезает на бесконечности, имеет вид:

$$p^{(1)} = \eta\left[\frac{a}{r} + a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) + a_{ik}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right) + \ldots\right].$$

Тензоры a, a_i, a_{ik},...—постоянны и должны (в первом приближении, которое сейчас строится) линейно зависеть от постоянных же тензоров V_i и β_{ik}. Из требования ковариантности, а также замечая, что $\beta_{ik} = -\beta_{ki}$, получим $a=0$, $a_i = AV_i$. Все тензоры более высокого ранга обращаются в нуль. Таким образом,

$$p^{(1)} = \eta A V_m \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{2.3}$$

Подставляя полученное выражение для давления в уравнение (2.1), для скорости будем иметь

$$\Delta v_i^{(1)} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} = AV_m \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_m}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{2.4}$$

Учитывая, что $\Delta r = \frac{2}{r}$, находим частное решение уравнения (2.4) $v_{i\,\text{частн}}^{(1)} = \frac{AV_m}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_m}(r)$. Решение однородного уравнения (2.4), удовлетворяющее условию $v_i^{(1)} \to V_i$ при $r \to \infty$, имеет вид: $v_{i\,\text{одн}}^{(1)} = V_i + \frac{c_i}{r} + {} + c_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right) + c_{ikl}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\left(\frac{1}{r}\right) + \ldots$. Как и коэффициенты a, a_i, a_{ik},... коэффициенты c_i, c_{ik},... также должны быть линейными ковариантными комбинациями тензоров V_i и β_{ik}, что однозначно определяет их вид: $c_i = cV_i$, $c_{ik} = D\beta_{ik}$, $c_{ikl} = \varepsilon\delta_{ik}V_l$ (все тензоры более высокого ранга обращаются в нуль). Выписывая теперь выражение для скорости и удовлетворяя уравнению непрерывности, получим для скорости

$$v_i^{(1)} = V_i + \frac{AV_m}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_m}(r) - \frac{AV_i}{r} + D\beta_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right) + \varepsilon V_k \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{2.5}$$

Перейдем к внутренней задаче. Подставляя (2.3) и (2.5) в (1.3) и (1.5), получим для фильтрационного течения в шаре задачу Дирихле

$$\Delta\Pi^{(1)} = 0, \quad \Pi^{(1)}(R) = \eta V_m n_m\left(-\frac{3A}{R^2} + \frac{12\varepsilon}{R^4}\right). \tag{2.6}$$

Решение (2.6) ищем в виде ряда $\Pi^{(1)}=\gamma+\gamma_i x_i+\gamma_{ik}x_ix_k+\gamma_{ikl}\,x_ix_kx_l+\ldots$ Из граничного условия (2.6) следует $\gamma=\gamma_{ik}=\gamma_{ikl}=0$, $\gamma_i=\eta V_i\cdot\left(-\frac{3A}{R^3}+\frac{12\varepsilon}{R^5}\right)$. Уравнение $\Delta\Pi^{(1)}=0$ при этом удовлетворяется автоматически, так что имеем внутри шара

$$\Pi^{(1)}=\eta V_i\left(-\frac{3A}{R^3}+\frac{12\varepsilon}{R^5}\right)x_i;\quad Q_i=-\frac{k}{\eta}\frac{\partial\Pi}{\partial x_i}=kV_i\left(\frac{3A}{R^3}-\frac{12\varepsilon}{R^5}\right).$$

Удовлетворяя теперь оставшимся двум граничным условиям (1.4) и (1.6), получим систему уравнений, решая которую, находим коэффициенты

$$(2.7)\qquad A=\frac{3+3\dfrac{k^{1/2}}{\alpha R}}{\left(2+3\dfrac{k}{R^2}\right)+\dfrac{k^{1/2}}{\alpha R}\left(4+15\dfrac{k}{R^2}\right)}R,\quad D=\frac{R^3}{1+2\dfrac{k^{1/2}}{\alpha R}},$$

$$\varepsilon=\frac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{k^{1/2}}{\alpha R}}{\left(2+3\dfrac{k}{R^2}\right)+\dfrac{k^{1/2}}{\alpha R}\left(4+15\dfrac{k}{R^2}\right)}R^3.$$

3. Второе приближение для внешней задачи. Выпишем уравнение для внешней задачи во втором приближении, обозначая величины второго приближения индексом (2),

$$(3.1)\qquad v_k^{(1)}\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_k}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_i}+\nu\Delta v_i^{(2)},\quad \frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial x_i}=0,\quad r>R.$$

Подставляя в (3.1) выражения для $v_i^{(1)}$ из (2.5) и выбирая в соответствии с поставленной задачей в левой части (3.1) только перекрестные члены (пропорциональные тензору $\beta_{ik}V_m$), получим

$$(3.2)\qquad \Delta v_i^{(2)}=\frac{1}{\eta}\frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_i}+\frac{D\beta_{il}V_l}{\nu}\left(-\frac{1}{r^2}+\frac{A}{2r^4}+\frac{\varepsilon}{r^6}\right)+$$
$$+\frac{D\beta_{il}n_lV_mn_m}{\nu}\left(\frac{3}{r^3}-\frac{2A}{r^4}\right)+\frac{DV_k\beta_{km}n_mn_i}{\nu}\left(\frac{A}{2r^4}-\frac{3\varepsilon}{r^6}\right).$$

Применяя к (3.2) операцию div, получим уравнение для $p^{(2)}$

$$(3.3)\qquad \Delta p^{(2)}=\rho D\beta_{im}V_m\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{A}{4r^4}-\frac{3\varepsilon}{r^6}\right).$$

Частное решение уравнения (3.3)

$$(3.4)\qquad p^{(2)}_{\text{частн}}=\rho D\beta_{im}V_m\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{A}{8r^2}-\frac{\varepsilon}{4r^4}\right).$$

Решение однородного уравнения ищем в виде

$$(3.5)\qquad p_{\text{одн}}^{(2)}=\frac{s}{r}+s_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right)+s_{ik}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right)+\ldots$$

Из того, что постоянные тензоры s, s_i, s_{ik},... должны быть линейными ковариантными комбинациями тензора $\beta_{ik}V_m$ или его свертки, однозначно следует

$$(3.6)\qquad s=0,\quad s_i=\rho fDV_m\beta_{mi}.$$

Все тензоры более высоких рангов равны нулю (ρD введено для единообразия записи нижеследующих формул). Таким образом, из (3.4) — (3.6):

$$p^{(2)} = \rho D V_m \beta_{mk} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{f}{r} - \frac{A}{8r^2} + \frac{\varepsilon}{4r^4}\right). \tag{3.7}$$

Подставляя (3.7) в (3.2) и выполняя преобразования, упрощающие последующее интегрирование, получим уравнение

$$\Delta v_i^{(2)} = \frac{D\beta_{im}V_m}{\nu}\left(-\frac{A}{8r^4} + \frac{3\varepsilon}{2r^6}\right) + \frac{DV_m\beta_{mk}}{\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\left(\frac{f}{r} - \frac{A}{16r^2} + \frac{\varepsilon}{8r^4}\right) + \frac{DV_l\beta_{im}}{\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_l}\left(\frac{1}{r} - \frac{A}{4r^2}\right). \tag{3.8}$$

Выпишем частное решение этого уравнения:

$$v_{i\,\text{частн}}^{(2)} = \frac{D\beta_{im}V_m}{\nu}\left(-\frac{A}{16r^2} + \frac{\varepsilon}{8r^4}\right) + \frac{DV_m\beta_{mk}}{\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\left(\frac{fr}{2} - \frac{A\ln r}{16} + \frac{\varepsilon}{16r^2}\right) + \frac{DV_l\beta_{im}}{\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_l}\left(\frac{r}{2} - \frac{A}{4} - \ln r\right)$$

и решение однородного уравнения (3.8): $v_{i\,\text{одн.}}^{(2)} = \frac{\tau_i}{r} + \tau_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right) + \tau_{ikl}\cdot\frac{\partial}{\partial x_k \partial x_l}\left(\frac{1}{r}\right) + \ldots$, где постоянные тензоры τ_i, τ_{ik}, ... пропорциональны тензору $\beta_{ik}V_m$ или его свертке $\beta_{ik}V_k$. Удовлетворяя требованию ковариантности, получим: $\tau_i = \frac{D}{\nu}\Phi V_m\beta_{mi}$; $\tau_{ik} = 0$; $\tau_{ikl} = \frac{D}{\nu}\psi V_k\beta_{il} + \frac{D}{\nu}\tau\delta_{ik}V_m\beta_{ml}$. Тензоры более высоких рангов обращаются в нуль ($\frac{D}{\nu}$ введено для единообразия записи нижеследующих формул). Удовлетворяя теперь уравнению непрерывности, получаем для наружной скорости во втором приближении следующее выражение:

$$v_i^{(2)} = \frac{D\beta_{im}V_m}{\nu}\left(\frac{f+1}{2r} - \frac{A}{4r^2} + \frac{\tau-\psi}{r^3} + \frac{\varepsilon}{4r^4}\right) + \frac{DV_m\beta_{mk}n_in_k}{\nu}\left(-\frac{f}{2r} + \frac{A}{8r^2} + \frac{3\tau}{r^3} + \frac{\varepsilon}{2r^4}\right) + \frac{DV_l\beta_{im}n_mn_l}{\nu}\left(-\frac{1}{2r} + \frac{A}{2r^2} + \frac{3\psi}{r^3}\right). \tag{3.9}$$

4. Второе приближение для внутренней задачи. Выражения для силы сопротивления и подъемной силы. Выпишем уравнения для внутренней задачи и граничные условия на поверхности шара во втором приближении:

$$\Delta\Pi^{(2)} = 0, \quad Q_i^{(2)} = -\frac{k}{\eta}\frac{\partial\Pi^{(2)}}{\partial x_i}, \quad r < R, \tag{4.1}$$

$$n_iv_i^{(2)} = n_iQ_i^{(2)}, \quad r = R, \tag{4.2}$$

$$p^{(2)} - \eta\left(\frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k^{(2)}}{\partial x_i}\right)n_in_k = \Pi^{(2)}, \quad r = R, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial v_k^{(2)}}{\partial r} - n_k\frac{\partial}{\partial r}\left(n_mv_m^{(2)}\right) = \frac{\alpha}{k^{1/2}}\left(v_k^{(2)} - Q_k^{(2)}\right), \quad r = R. \tag{4.4}$$

Условие (4.4) не содержит явно угловой скорости, так как (4.4) представляет собой граничное условие (1.6), написанное для величин второго порядка малости (по отношению к V и ω). Член $\frac{\alpha}{k^{1/2}}(\vec{\omega}\times\vec{R})$ из (1.6), являющийся членом первого порядка, полностью учтен в первом приближении.

Подставляя (3.7) и (3.9) в (4.1) и (4.3), получим задачу Дирихле для второго приближения в фильтрационном течении:

$$\Delta\Pi^{(2)} = 0; \quad \Pi^{(2)}(R) = \rho D V_m \beta_{mk} n_k \left(-\frac{3f+1}{R^2} + \frac{7A}{4R^3} + \frac{12\tau + 6\psi}{R^4} + \frac{\varepsilon}{R^5}\right). \tag{4.5}$$

Решение ее ищем в виде ряда $\Pi^{(2)} = g + g_i x_i + g_{ik} x_i x_k + \ldots$ Из граничного условия (4.5) следует: $g = g_{ik} = g_{ikl} = \ldots 0$,

$$g_k = \rho D V_m \beta_{mk}\left(-\frac{3f+1}{R^3} + \frac{7A}{4R^4} + \frac{12\tau + 6\psi}{R^5} + \frac{\varepsilon}{R^6}\right).$$

Уравнение $\Delta\,\Pi^{(2)} = 0$ при этом удовлетворяется автоматически. Таким образом, для внутренней задачи во втором приближении имеем

$$\Pi^{(2)} = \rho D V_m \beta_{mk}\left(-\frac{3f+1}{R^3} + \frac{7A}{4R^4} + \frac{12\tau + 6\psi}{R^5} + \frac{\varepsilon}{R^6}\right) x_k, \tag{4.6}$$

$$Q_i^{(2)} = -\frac{k}{\eta}\frac{\partial \Pi^{(2)}}{\partial x_i} = \frac{k}{\nu} D V_m \beta_{mi}\left(\frac{3f+1}{R^3} - \frac{7A}{4R_4} - \frac{12\tau + 6\psi}{R^5} - \frac{\varepsilon}{R^6}\right).$$

Теперь осталось удовлетворить условиям (4.2) и (4.4). Подставляя в них (3.9) и (4.6), получим систему уравнений, решая которую, находим коэффициенты

$$f = \frac{\left(-8 - \frac{39}{2}\frac{k}{R^2}\right) + \frac{\alpha R}{k^{1/2}}\left(\frac{32}{3} + \frac{59}{2}\frac{k}{R^2} + 180\frac{k^2}{R^4}\right) + \frac{\alpha^2 R^2}{k}\left(-\frac{14}{3} + \frac{63}{2}\frac{k}{R^2} + 96\frac{k^2}{R^4}\right) + \frac{\alpha^3 R^3}{k^{3/2}}\left(\frac{2}{3} + \frac{13}{2}\frac{k}{R^2} + 12\frac{k^2}{R^4}\right)}{\left(32 + 240\frac{k}{R^2} + 450\frac{k^2}{R^4}\right) + \frac{\alpha R}{k^{1/2}}\left(\frac{128}{3} + 248\frac{k}{R^2} + 330\frac{k^2}{R^4}\right) + \frac{\alpha^2 R^2}{k}\left(\frac{56}{3} + 80\frac{k}{R^2} + 78\frac{k^2}{R^4}\right) + \frac{\alpha^3 R^3}{k^{3/2}}\left(\frac{8}{3} + 8\frac{k}{R^2} + 6\frac{k^2}{R^4}\right)}, \tag{4.7}$$

$$\tau = \frac{\left(\frac{4}{9} - \frac{161}{12}\frac{k}{R^2} - 50\frac{k^2}{R^4}\right) + \frac{\alpha R}{k^{1/2}}\left(-\frac{19}{9} + \frac{11k}{R^2}\right) + \frac{\alpha^2 R^2}{k}\left(-\frac{35}{18} - \frac{k}{4R^2} + \frac{12k^2}{R^4}\right) + \frac{\alpha^3 R^3}{k^{3/2}}\left(-\frac{7}{18} + \frac{2k}{3R^2} + 2\frac{k^2}{R^4}\right)}{\left(32 + 240\frac{k}{R^2} + 450\frac{k^2}{R^4}\right) + \frac{\alpha R}{k^{1/2}}\left(\frac{128}{3} + 248\frac{k}{R^2} + 330\frac{k^2}{R^4}\right) + \frac{\alpha^2 R^2}{k}\left(\frac{56}{3} + 80\frac{k}{R^2} + 78\frac{k^2}{R^4}\right) + \frac{\alpha^3 R^3}{k^{3/2}}\left(\frac{8}{3} + 8\frac{k}{R^2} + 6\frac{k^2}{R^4}\right)} \cdot R^2,$$

$$\psi = \frac{\left(-1 + \frac{15}{2}\frac{k}{R^2}\right) + \frac{\alpha R}{k^{1/2}}\left(-\frac{3}{2} + 9\frac{k}{R^2}\right) + \frac{\alpha^2 R^2}{k}\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{k}{R^2}\right)}{\left(36 + 135\frac{k}{R^2}\right) + \frac{\alpha R}{k^{1/2}}\left(30 + 72\frac{k}{R^2}\right) + \frac{\alpha^2 R^2}{k}\left(6 + 9\frac{k}{R^2}\right)} \cdot R^2.$$

Тем самым завершено определение полей давлений и скоростей с точностью, необходимой для определения действующих на пористый шар сил. Подставляя теперь в $F_i = \oint\limits_{r=R} \left[-p\delta_{ik} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right] ds_k$ найденные выше выражения $p=p^{(1)}+p^{(2)}$, $v=v^{(1)}+v^{(2)}$, в которых коэффициенты A, D, ε, f, τ и ψ определены отношениями (2.7) и (4.7), и выполняя интегрирование, приходим к следующему результату:

$$\vec{F} = s_1 6\pi R\eta\vec{V} + s_2\cdot\pi\rho R^3(\vec{V}\times\vec{\omega}), \quad \text{где} \tag{4.8}$$

$$s_1 = \frac{1+\dfrac{k^{1/2}}{\alpha R}}{\left(1+\dfrac{3}{2}\dfrac{k}{R^2}\right)+\dfrac{k^{1/2}}{\alpha R}\left(2+\dfrac{15}{2}\dfrac{k}{R^2}\right)},$$

$$s_2 = \frac{\left(1-\dfrac{47}{4}\dfrac{k}{R^2}-21\dfrac{k^2}{R^4}\right)+\dfrac{k^{1/2}}{\alpha R}\left(7-\dfrac{269}{4}\dfrac{k}{R^2}-183\dfrac{k^2}{R^4}\right)+\dfrac{k}{\alpha^2R^2}\left(16-\dfrac{425}{4}\dfrac{k}{R^2}-435\dfrac{k^2}{R^4}\right)+\dfrac{k^{3/2}}{\alpha^3R^3}\left(12-\dfrac{123}{4}\dfrac{k}{R^2}-225\dfrac{k^2}{R^4}\right)}{\left(1+3\dfrac{k}{R^2}+\dfrac{9}{4}\dfrac{k^2}{R^4}\right)+\dfrac{k^{1/2}}{\alpha R}\left(9+36\dfrac{k}{R^2}+\dfrac{135}{4}\dfrac{k^2}{R^4}\right)+\dfrac{k}{\alpha^2R^2}\times\left(30+153\dfrac{k}{R^2}+\dfrac{729}{4}\dfrac{k^2}{R^4}\right)+\dfrac{k^{3/2}}{\alpha^3R^3}\left(44+276\dfrac{k}{R^2}+\dfrac{1665}{4}\dfrac{k^2}{R^4}\right)+\dfrac{k^2}{\alpha^4R^4}\left(24+\dfrac{105k}{R^2}+\dfrac{675k^2}{2R^4}\right)}. \tag{4.9}$$

Первый член в (4.8) представляет собой модифицированную силу Стокса, действующую на пористый шар, второй член— подъемную силу. В предельном случае $k=0$ (непроницаемый шар) $s_1=s_2=1$, и (4.8) переходит в соответствующую формулу, полученную для непроницаемого шара в [3,4]. Выражение для стоксовой силы сопротивления, испытываемого в однородном потоке пористым шаром, найдено недавно в [5], где, однако, вместо граничного условия (1.6) было поставлено неверное (см. [1,2]) требование равенства касательных составляющих наружной и фильтрационной скоростей на поверхности пористого шара. Вместе с тем заметим, что формально к результату, полученному в [5], можно прийти из найденных выше выражений (4.8) и (4.9), если положить в них $\alpha=\infty$ и $\omega=0$ (в [5] рассматривался невращающийся шар).

Поступила 26 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Beavers, Joseph.* Boundary conditions at a naturally permeable wall, J. Fluid Mech. 1967, vol. 30, pt. 1, p. 197—207.
2. *Saffman.* On the boundary condition at the surface of a porous medium, Studies in Appl. Math., 1971, vol. N 2, June, pp. 93—101.
3. *Rubinow, Keller.* The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid, J. Fluid Mech., 1961, vol. 11, p. 447.
4. *Saffman.* The lift on a small sphere in a slow shear flow. J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, p. 385.
5. *Sutherland, Tan.* Sedimentation of a porous sphere. Chem. Eng. Sci., 1970, vol. 25, N 12, p. 1948—1950.