

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ С ЛОМАННОЙ ИЛИ ВЕТВЯЩЕЙСЯ ТРЕЩИНОЙ

П. Н. Осив, М. П. Саврук

(Львов)

При численном решении сингулярных интегральных уравнений двумерных задач теории упругости для тел с внутренними гладкими криволинейными разрезами применяется метод механических квадратур, основанный на квадратурных формулах Гаусса — Чебышева. Рассматривая кусочно-гладкую трещину как предельный случай системы гладких разрезов [1—3], имеющих общие точки, приходим к системе сингулярных интегральных уравнений с обобщенными сингулярными ядрами, содержащими, кроме ядра Коши, еще и неподвижные особенности. Решение этих уравнений также может быть получено методом механических квадратур, однако с привлечением более сложных квадратурных формул (например, формул Гаусса — Якоби), учитывающих особенность решения в узлах контура разреза. Ниже на примере ломаной ветвящейся трещины в бесконечной плоскости предложена упрощенная схема численного решения интегральных уравнений для кусочно-гладких разрезов с использованием формул Гаусса — Чебышева. При этом особенность решения в угловой точке или точке ветвления учитывается неточно, и, следовательно, такое решение эффективно в случае, когда не требуется определять напряженно-деформированное состояние в окрестности этих узлов. В частности, предложенная схема решения применяется ниже при определении коэффициентов интенсивности напряжений у вершин кусочно-гладкой трещины.

1. Исходные положения. Пусть в бесконечной плоскости, отнесенной к основной декартовой системе координат xOy , имеется система $N + 1$ прямолинейных разрезов L_n , размещенных вдоль отрезков $|x_n| \leq l_n$ локальных осей координат $O_n x_n$ ($n = 0, 1, \dots, N$). В системе xOy начала координат O_n находятся в точках $z = z_n^0$, а оси $O_n x_n$ образуют углы α_n с осью Ox . Берега трещин нагружены самоуравновешенной нагрузкой $p_n(x_n)$, а напряжения на бесконечности отсутствуют. Тогда плоская задача теории упругости для такой области сводится к системе сингулярных интегральных уравнений [4]:

$$(1.1) \quad \sum_{k=0}^N \int_{-l_k}^{l_k} [K_{nk}(t_k, x_n) g'_k(t_k) + L_{nk}(t_k, x_n) \overline{g'_k(t_k)}] dt_k = \\ = \pi p_n(x_n), \quad |x_n| \leq l_n, \quad n = 0, 1, \dots, N;$$

где

$$(1.2) \quad K_{nk}(t_k, x_n) = \frac{e^{i\alpha_k}}{2} \left(\frac{1}{T_k - X_n} + \frac{e^{-2i\alpha_n}}{\overline{T_k} - \overline{X_n}} \right); \\ L_{nk}(t_k, x_n) = \frac{e^{-i\alpha_k}}{2} \left(\frac{1}{\overline{T_k} - \overline{X_n}} - \frac{T_k - X_n}{(\overline{T_k} - \overline{X_n})^2} e^{-2i\alpha_n} \right); \\ T_k = t_k e^{i\alpha_k} + z_k^0; \quad X_n = x_n e^{i\alpha_n} + z_n^0.$$

Если разрезы L_n ($n = 0, 1, \dots, N$) изолированы, решение системы (1.1) должно удовлетворять дополнительным $N + 1$ условиям, обеспечивающим однозначность смещений при обходе каждого контура в отдельности. В случае системы пересекающихся контуров L_n ($n = 0, 1, \dots, N$), образующих незамкнутый контур $L_0 + L_1 + \dots + L_N$, получаем одно условие [2], обеспечивающее однозначность смещений при обходе контура $L_0 + L_1 + \dots + L_N$.

2. Двухзвенная ломаная трещина. Рассмотрим двухзвенную ломаную трещину ($N = 1$), образуемую двумя прямолинейными разрезами L_0 и L_1 . Вдоль отрезка $|x| \leq l$ ($l = l_0$) оси Ox имеется основной разрез L_0 , из правого конца которого под углом α к оси Ox выходит боковой разрез L_1 длиной $2l_1$ (фиг. 1). Условие однозначности смещений имеет вид

$$(2.1) \quad \int_{-l}^i g'_0(t_0) dt_0 + e^{i\alpha} \int_{-l_1}^{l_1} g'_1(t_1) dt_1 = 0.$$

Учитывая, что в данном случае $\alpha_0 = 0$, $z_0^0 = 0$, $\alpha_1 = \alpha$, $z_1^0 = l(1 + \varepsilon e^{i\alpha})$, $\varepsilon = l_1/l$, запишем систему (1.1) и условие (2.1) в нормализованной форме:

$$(2.2) \quad \int_{-1}^1 \left[\frac{\varphi(\xi)}{\xi - \eta} + M_{01}(\xi, \eta) \varphi_1(\xi) + N_{01}(\xi, \eta) \overline{\varphi_1(\xi)} \right] d\xi = \pi\sigma(\eta), \quad |\eta| < 1,$$

$$\int_{-1}^1 \left[M_{10}(\xi, \eta) \varphi(\xi) + N_{10}(\xi, \eta) \overline{\varphi(\xi)} + M_{11}(\xi, \eta) \varphi_1(\xi) + N_{11}(\xi, \eta) \overline{\varphi_1(\xi)} \right] d\xi = \pi\sigma_1(\eta), \quad |\eta| < 1;$$

$$(2.3) \quad \int_{-1}^1 \varphi(\xi) d\xi + \varepsilon e^{i\alpha} \int_{-1}^1 \varphi_1(\xi) d\xi = 0.$$

В формулах (2.2), (2.3) и далее приняты обозначения:

$$M_{nk}(\xi, \eta) = l_k K_{01}(l_k \xi, l_n \eta); \quad N_{nk}(\xi, \eta) = l_k L_{01}(l_k \xi, l_n \eta);$$

$$l_2 = l_3 = l_4 = l_1; \quad z_2^0 = -z_1^0; \quad z_3^0 = -\overline{z_1^0}; \quad z_4^0 = \overline{z_1^0};$$

$$\varphi(\xi) = g'_0(l\xi); \quad \varphi_1(\xi) = g'_1(l_1\xi); \quad \sigma(\eta) = p_0(l\eta); \quad \sigma_1(\eta) = p_1(l_1\eta).$$

Из соотношений (1.2) видно, что ядра $M_{01}(\xi, \eta)$, $N_{01}(\xi, \eta)$, $M_{10}(\xi, \eta)$ и $N_{10}(\xi, \eta)$ имеют неподвижные особенности, т. е. являются обобщенными ядрами. Следовательно, функции $\varphi(\eta)$ и $\varphi_1(\eta)$ соответственно в точках $\eta = 1$ и $\eta = -1$ имеют особенности.

Положим

$$\varphi(\eta) = \frac{v(\eta)}{(1+\eta)^{1/2}(1-\eta)^\beta}, \quad \varphi_1(\eta) = \frac{v_1(\eta)}{(1+\eta)^\beta(1-\eta)^{1/2}}$$

и будем считать, что $v(\pm 1)$ и $v_1(\pm 1)$ не равны нулю.

На основе формул Сохоцкого — Племеля для интеграла типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{g'(t)}{t-z} dt, \quad L = L_0 + L_1$$

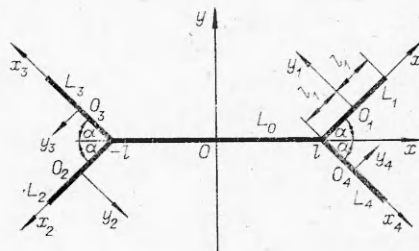
имеем соотношение

$$(2.4) \quad ig'(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t), \quad t \in L,$$

справедливое также и в угловой точке [5]. Из равенства (2.4) следует, что особенность функций $\varphi(\eta)$ и $\varphi_1(\eta)$ в точках $\eta = 1$ и $\eta = -1$ такая же, как и максимальная особенность комплексного потенциала $\Phi(z)$ в угловых точках клиновидных областей, на которые разбивается тело ломаной трещиной, т. е. для определения показателя β имеем характеристическое уравнение [6]:

$$\sin[(1-\beta)(\pi+\alpha)] = -(1-\beta) \sin(\pi+\alpha), \quad 0 < \beta < 1.$$

Анализ корней этого уравнения показывает (см., например, [7]), что $\beta < 1/2$. Следовательно, функции $\varphi(\eta)$ и $\varphi_1(\eta)$ можно представить в виде $\varphi(\eta) = u(\eta)/\sqrt{1-\eta^2}$, $\varphi_1(\eta) = u_1(\eta)/\sqrt{1-\eta^2}$, считая, что $u(1) = 0$, $u_1(-1) = 0$.



Ф и г. 1

Применив к интегральным уравнениям (2.2) и условию (2.3) квадратурные формулы Гаусса—Чебышева [8]

$$\int_{-1}^1 \frac{u(\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}(\xi-\eta_m)} = \frac{\pi}{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} \frac{u(\xi_k)}{\xi_k - \eta_m} \quad \left(\eta_m = \cos \frac{m\pi}{N_1}, m=1, 2, \dots, N_1-1 \right),$$

$$\int_{-1}^1 \frac{u(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \frac{\pi}{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} u(\xi_k), \quad \xi_k = \cos \frac{2k-1}{2N_1} \pi,$$

придем к системе $2N_1 - 1$ алгебраических уравнений для определения $2N_1$ неизвестных $u(\xi_k)$ и $u_1(\xi_k)$. Чтобы получить замкнутую систему, прибавим сюда одно из уравнений

$$(2.5) \quad u(1) = -\frac{1}{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} (-1)^k u(\xi_k) \operatorname{ctg} \frac{2k-1}{2N_1} \pi = 0,$$

$$u_1(-1) = \frac{1}{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} (-1)^{N_1+k} u_1(\xi_k) \operatorname{tg} \frac{2k-1}{2N_1} \pi = 0.$$

Расчеты показывают, что на эффективность численного решения практически не влияет, какое из равенств (2.5) используется для этой цели.

Коэффициенты интенсивности напряжений у левой $K_{1,2}^-$ и правой $K_{1,2}^+$ вершин ломаной трещины имеют вид [4]

$$K_1^+ - iK_2^+ = \frac{\sqrt{l_1}}{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} (-1)^k u_1(\xi_k) \operatorname{ctg} \frac{2k-1}{2N_1} \pi,$$

$$K_1^- - iK_2^- = \frac{\sqrt{l_1}}{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} (-1)^{N_1+k} u(\xi_k) \operatorname{tg} \frac{2k-1}{2N_1} \pi.$$

Получим решение задачи в случае, когда берега трещины свободны от нагрузки, а на бесконечности плоскость подвергнута растяжению внешними напряжениями p и q , действующими во взаимно перпендикулярных направлениях, причем напряжения p направлены под углом γ к оси Ox . Суперпозицией данная задача сводится к системе (2.2) с правой частью

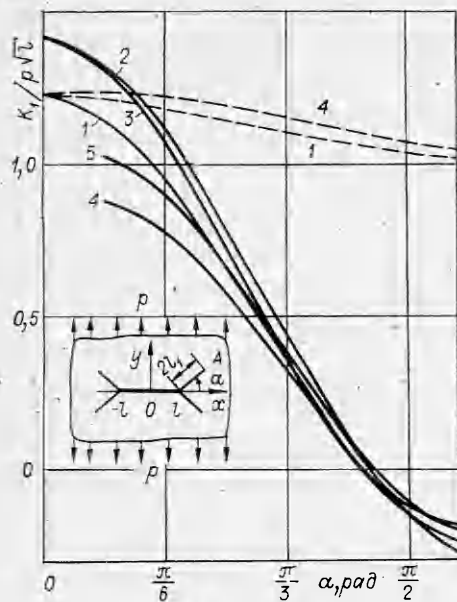
$$\sigma(\eta) = -(1/2)[p + q - (p - q)e^{2i\gamma}],$$

$$\sigma_1(\eta) = -(1/2)[p + q - (p - q)e^{2i(\gamma-\alpha)}].$$

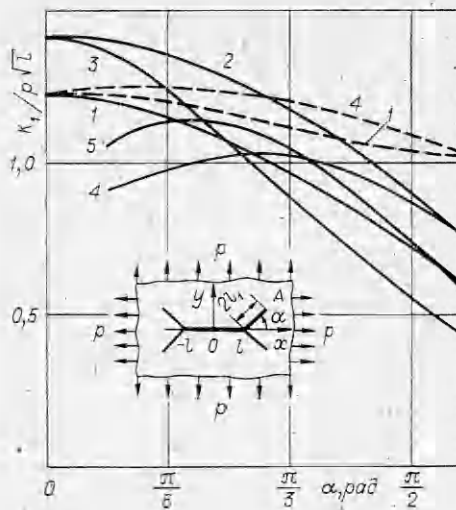
На фиг. 2—5 при $\epsilon = 0,5$ приведены зависимости коэффициентов интенсивности напряжений K_1 и K_2 , отнесенных к $p\sqrt{l_1}$, от угла ориентации боковой трещины α для случаев одноосного ($q = 0$, $\gamma = \pi/2$, фиг. 2, 3) и всестороннего ($p = q$, фиг. 4, 5) растяжения. Сплошные линии относятся к правой вершине трещины (вершине A), а штриховые — к левой. Кривые I соответствуют случаю двухзвенной ломаной трещины.

3. Трехзвенная ломаная трещина. Предположим, что ломаная трещина состоит из трех прямолинейных участков L_0 , L_1 и L_2 (фиг. 1). Так как в этом случае напряженное состояние тела симметрично относительно центра трещины ($z = 0$), получим $g_2'(t_2) = g_1'(t_1)$. Система трех ($N = 2$) интегральных уравнений (1.1) с учетом условия симметрии запишется в виде (2.2), где к ядрам $M_{01}(\xi, \eta)$, $N_{01}(\xi, \eta)$, $M_{11}(\xi, \eta)$ и $N_{11}(\xi, \eta)$ следует прибавить соответственно функции $M_{02}(\xi, \eta)$, $N_{02}(\xi, \eta)$, $M_{12}(\xi, \eta)$ и $N_{12}(\xi, \eta)$. При этом условии однозначности смещений примет вид

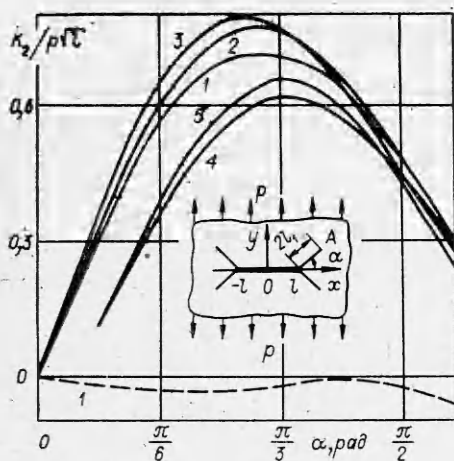
$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) d\xi = 0.$$



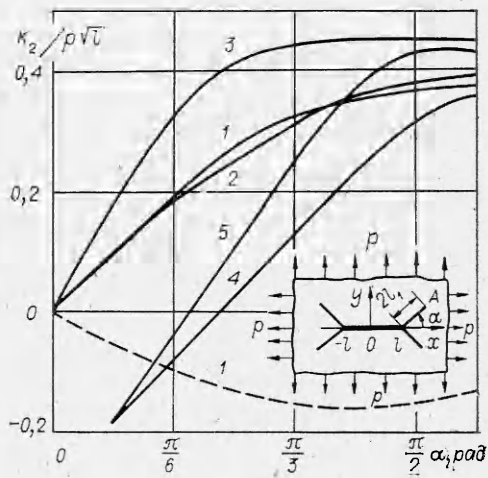
Ф и г. 2



Ф и г. 4



Ф и г. 3



Ф и г. 5

Численные результаты для рассматриваемой задачи проиллюстрированы на фиг. 2—5 (кривые 2).

Рассмотрим теперь ломаную трещину, состоящую из участков L_0 , L_1 и L_3 , когда боковые разрезы симметричны относительно оси Oy (фиг. 1).

Тогда из условий симметрии задачи следует $g'_3(x_3) = g'_1(x_1)$. В данном случае также приходим к системе (2.2), в которой к ядрам $M_{01}(\xi, \eta)$, $N_{01}(\xi, \eta)$, $M_{11}(\xi, \eta)$ и $N_{11}(\xi, \eta)$ добавляем соответственно $N_{03}(\xi, \eta)$, $M_{03}(\xi, \eta)$, $N_{13}(\xi, \eta)$ и $M_{13}(\xi, \eta)$. Условие однозначности запишется в форме

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) d\xi + 2\epsilon i \operatorname{Im} \left[e^{i\alpha} \int_{-1}^1 \varphi_1(\xi) d\xi \right] = 0.$$

Зависимости коэффициентов интенсивности напряжений K_1 и K_2 от угла α для рассматриваемой трехзвенной трещины изображены на на фиг. 2—5 (кривые 3).

4. Трещина ветвления. Пусть бесконечная плоскость ослаблена основным разрезом L_0 , из правого конца которого симметрично выходят два боковых разреза L_1 и L_4 (фиг. 1). Интегральные уравнения первой ос-

новой задачи для такой области имеют вид (1.1) при $N = 4$ и $g_2'(x_2) = g_3'(x_3) = 0$. Численное решение интегральных уравнений (1.1) получим таким же путем, как и в предыдущих случаях ломаных трещин.

Учитывая условие $g_4'(x_4) = g_1'(x_1)$, приходим к системе (2.2), решение которой должно удовлетворять равенству

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) d\xi + 2\varepsilon \operatorname{Re} \left[e^{i\alpha} \int_{-1}^1 \varphi_1(\xi) d\xi \right] = 0.$$

Здесь к ядрам $M_{01}(\xi, \eta)$, $N_{01}(\xi, \eta)$, $M_{11}(\xi, \eta)$ и $N_{11}(\xi, \eta)$ прибавлены соответственно $N_{04}(\xi, \eta)$, $M_{04}(\xi, \eta)$, $N_{14}(\xi, \eta)$ и $M_{14}(\xi, \eta)$. Кривые 4 на фиг. 2—5 относятся к рассматриваемому случаю.

Отметим, что задача об одноосном растяжении на бесконечности плоскости с трещиной ветвления подобным образом рассмотрена в [3]. При этом также использовалась система сингулярных интегральных уравнений (1.1), численное решение которой получено с помощью квадратурных формул Гаусса и Лобатто. Найденные выше результаты хорошо согласуются с данными [3].

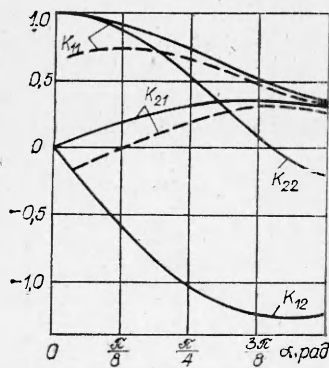
Рассмотрим более общий случай ветвящейся трещины, когда с обоих концов основной трещины L_0 симметрично выходят по два боковых разреза: L_1 , L_4 и L_2 , L_3 (см. фиг. 1). Из условий симметрии следует $g_2'(x_2) = g_3'(x_3) = g_4'(x_4) = g_1'(x_1)$. Тогда система (1.1) ($N = 4$) приводится к виду (2.2), где к ядрам $M_{01}(\xi, \eta)$, $N_{01}(\xi, \eta)$, $M_{11}(\xi, \eta)$ и $N_{11}(\xi, \eta)$ необходимо прибавить соответственно $M_{02}(\xi, \eta) + N_{03}(\xi, \eta) + N_{04}(\xi, \eta)$, $N_{02}(\xi, \eta) + M_{03}(\xi, \eta) + M_{04}(\xi, \eta)$, $M_{12}(\xi, \eta) + N_{13}(\xi, \eta) + N_{14}(\xi, \eta)$ и $N_{12}(\xi, \eta) + M_{13}(\xi, \eta) + M_{14}(\xi, \eta)$. Условие однозначности запишется в виде

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) d\xi = 0.$$

Полученные коэффициенты интенсивности напряжений для последнего случая трещины ветвления (кривые 5 на фиг. 2—5) при одноосном растяжении пластины практически совпадают с результатами [10].

5. Трещина с бесконечно малыми отрезками. В механике разрушения, в частности при построении энергетических критериев распространения трещин, принципиальное значение имеют решения рассмотренных выше задач в предельном случае, когда отношение длины отрезка к длине основной трещины бесконечно мало. При этом коэффициенты интенсивности напряжений у вершины отрезка могут быть представлены в виде $K_i = k_1 K_{i1}(\alpha) + k_2 K_{i2}(\alpha)$ ($i = 1, 2$), где k_1 и k_2 — коэффициенты интенсивности для основной трещины при отсутствии отрезков.

Сходимость численного решения системы интегральных уравнений (2.2) к точному ухудшается при уменьшении отношения длин боковой и основной трещин. Поэтому в предельном случае при $l_1/l \rightarrow 0$ числен-



Ф и г. 6

ное решение прямо не может быть получено. Для двухзвенной ломаной трещины (фиг. 6, сплошные линии) и трехзвенной трещины ветвления (фиг. 6, штриховые линии) величины $K_{ij}(\alpha)$ вычислялись экстраполяцией на основе численных данных, найденных при $l_1/l = 0,01; 0,02$.

В [11] приведены аналогичные зависимости функций $K_{ij}(\alpha)$. В случае ломаной трещины наблюдается достаточно хорошее согласие полученных результатов с данными [11] (максимальное относительное отклонение не превышает 6%), значительно большее различие имеет место для трещины ветвления. Для последнего случая в [12] приведены зависимости

коэффициентов интенсивности напряжений от угла α при $l_1/l = 0,1$. Отметим, что для такого же значения l_1/l рассчитанные на основе решения системы (2.2) коэффициенты интенсивности практически совпадают с данными [12].

Поступила 3 IV 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Линьков А. М. Интегральные уравнения теории упругости для плоскости с разрезами, нагруженными уравновешенными системами сил. — ДАН СССР, 1974, т. 218, № 6.
2. Саврук М. П. Система криволинейных трещин в упругом теле при различных граничных условиях на их берегах. — Физ.-хим. мех. материалов, 1978, т. 14, № 6.
3. Theocaris P. S., Ioakimidis N. I. The symmetrically branched crack in an infinite elastic medium. — Z. Angew. Math. und Phys., 1976, vol. 27, N 6.
4. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацишин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976.
5. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
6. Каландия А. И. Замечания об особенностях упругих решений вблизи углов. — ПММ, 1969, т. 33, № 1.
7. Зиновьев Б. М., Карманова Т. Ф. К учету особенностей при численном решении задач теории упругости. — Труды НИИЖТа, 1978, № 190/3.
8. Erdogan F., Gupta G. D. On the numerical solution of singular integral equations. — Quart. Appl. Math., 1972, vol. 29, N 4.
9. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
10. Бойко А. В., Карпенко Л. Н. Предельное состояние пластины, ослабленной трещиной сложной формы, при двухосном растяжении. — Проблемы прочности, 1980, № 8.
11. Bilby B. A., Cardew G. E., Howard I. C. Stress intensity factors at the tips of kinked and forked cracks. — In: Advances Research in Strength and Fracture of Materials. 4th Int. Conf. Fract., Waterloo, 1977. Vol. 3A. N. Y. e. a., 1978.
12. Китагава Х., Юки Р. Коэффициенты интенсивности напряжений в задачах о ветвящихся трещинах при плосконапряженном состоянии. — Нихон кикай гаккай ромбунсю, 1975, т. 41, № 346. — Яп.

УДК 539.375

О РАСКРЫТИИ БЕРЕГОВ ЕСТЕСТВЕННОЙ МАКРОТРЕЩИНЫ

А. П. Владимиров, В. В. Стружанов

(Свердловск)

Недостатки простейших моделей макротрещин неоднократно отмечались в литературе. Попытки более совершенных моделей сводились к подбору тех или иных гипотез относительно поведения среды у концов щели [1, 2], однако не было уделено должного внимания процессу образования реальных макротрещин.

В [3, 4] предложена модель естественной макротрещины, учитывающая наличие остаточных сжимающих напряжений, возникающих у вершины трещины в процессе ее образования и препятствующих раскрытию макротрещины. Цель данного исследования — экспериментальное обоснование выдвинутой модели.

1. Для исследования закономерностей раскрытия естественных макротрещин был изготовлен прямоугольный образец из оргстекла СО-95, который матировали абразивом со средним размером частиц 20 мкм. Для увеличения коэффициента отражения на поверхность образца напыляли алюминий до образования пленки толщиной $(5-10) \cdot 10^{-6}$ мм. Макротрещину выращивали, помещая предварительно надрезанный образец в нагружающее устройство и постепенно растягивая его до появления трещины, затем для остановки трещины нагрузку снимали. На фиг. 1 приведены вид и размеры образца, начало координат совпадает с вершиной трещины. Часть А образца прижималась к неподвижному захвату нагружающего устройства, часть Б — к подвижному захвату.

Эксперимент проводили следующим образом. Сначала голографировали образец при нулевой нагрузке. Затем, перемещая подвижный захват, деформировали его на величину $0,39 \cdot 10^{-3}$ и голографировали второй раз.