

ОЦЕНКА ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Ю. М. Волчков, С. Н. Коробейников
(Новосибирск)

Численному решению задач определения осесимметричного напряженно-деформированного состояния упругопластических оболочек вращения посвящен ряд работ (см., например, [1—4]). В процессе решения возникает необходимость вычисления интегралов от напряжений по толщине оболочки, что увеличивает в отличие от упругого решения размерность обрабатываемой и хранимой информации о напряженно-деформированном состоянии.

В работах [5, 6] получены приближенные соотношения упругопластического течения оболочек при условии текучести Мизеса на основе аппроксимации конечного соотношения между усилиями и моментами. При использовании этих соотношений значительно уменьшается объем информации, требуемой для хранения в памяти ЭВМ, так как отпадает необходимость в вычислении интегралов по толщине оболочки. В работах [7, 8] приближенная поверхность текучести, полученная в [5, 6], была использована для определения предельных нагрузок оболочек, находящихся под действием растягивающих усилий. Отмечается хорошее совпадение предельных нагрузок, полученных на основе приближенной поверхности текучести и поверхности текучести Мизеса.

В данной работе численными экспериментами показано, что для определения предельных нагрузок оболочек вращения в условиях осесимметричного нагружения всесторонним внешним давлением с достаточной для практических целей точностью можно использовать приближенные соотношения, полученные в [5, 6], которые связывают непосредственно скорости усилий и моментов со скоростями деформаций и изменениями кривизн срединной поверхности оболочки.

1. Определяющие соотношения упругопластического осесимметричного деформирования оболочек. Для идеального упругопластического материала в случае плоского напряженного состояния и осевой симметрии определяющие соотношения, связывающие скорости напряжений $\dot{\sigma}_i$ со скоростями деформаций \dot{e}_i (точка обозначает дифференцирование по некоторому параметру деформирования), имеют вид

$$(1.1) \quad \dot{\sigma}_1 = \gamma A_{ij} \dot{e}_j, \quad A_{ii} = 1 - cf_i^2/P, \quad A_{ij} = \nu - cf_i f_j/P \quad (i \neq j),$$

$$c = \begin{cases} 1, & \text{если } J = 1/3 \text{ и } \dot{\omega} > 0, \\ 0, & \text{если } J < 1/3 \text{ или } J = 1/3 \text{ и } \dot{\omega} \leq 0, \end{cases}$$

$$J = (\sigma'_1)^2 + (\sigma'_2)^2 + \sigma'_1 \sigma'_2, \quad \dot{\omega} = f_i \dot{e}_i,$$

$$f_1 = \sigma'_1 + \nu \sigma'_2, \quad \sigma'_1 = (2\sigma_1 - \sigma_2)/3 \quad (1 \neq 2),$$

$$P = (\sigma'_1)^2 + (\sigma'_2)^2 + 2\nu \sigma'_1 \sigma'_2, \quad \gamma = E/[\sigma_T(1 - \nu^2)],$$

где E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; σ_i — компоненты напряжений, отнесенные к пределу текучести при одноосном растяжении (сжатии) σ_T ; здесь и далее индексы (если особо не оговаривается) принимают значения 1, 2, по повторяющимся индексам проводится суммирование.

При использовании кинематических гипотез Кирхгоффа — Лява скорости деформаций в оболочке выражаются по формулам

$$(1.2) \quad \dot{e}_i = \dot{\epsilon}_i + 2\zeta \dot{k}_i,$$

где ϵ_i , k_i — соответственно деформации и изменения кривизн срединной

поверхности ($k_i = K_i h/4$, K_i — соответствующая размерная величина); $\zeta = 2z/h$; z — расстояние по нормали от срединной поверхности оболочки, $-h/2 \leq z \leq h/2$; h — толщина оболочки.

Усилия n_i и моменты m_i ($n_i = N_i/(\sigma_\tau h)$, $m_i = 4M_i/(\sigma_\tau h^2)$, где N_i , M_i — размерные усилия и моменты) в срединной поверхности оболочки вычисляются по формулам

$$(1.3) \quad n_i = \frac{4}{2} \int_{-1}^1 \sigma_i d\zeta, \quad m_i = \int_{-1}^1 \sigma_i \zeta d\zeta.$$

Связь между скоростями усилий, моментов и скоростями деформаций срединной поверхности оболочки можно представить в виде

$$(1.4) \quad [\dot{n}_1, \dot{n}_2, \dot{m}_1, \dot{m}_2]^T = [B_{ij}] [\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2, \dot{k}_1, \dot{k}_2]^T \quad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

где верхний индекс T обозначает операцию транспонирования.

Из формул (1.1)–(1.3) следует, что элементы симметричной матрицы $[B_{ij}]$ определяются выражениями

$$(1.5) \quad B_{i+2k, j+2l} = 2^{(k+l-1)\gamma} \int_{-1}^1 A_{ij} \zeta^{(k+l)} d\zeta \quad (i, j = 1, 2; k, l = 0, 1).$$

В работе [6] построены соотношения, связывающие непосредственно скорости усилий и моментов со скоростями деформаций срединной поверхности оболочки. При выводе этих соотношений предполагается, что элемент оболочки полностью находится либо в пластическом, либо в упругом состоянии, откуда следует, что в этом случае между усилиями и моментами существует конечное соотношение. В [5] предложена аппроксимация этого соотношения, на основе которой в [6] построены уравнения, связывающие непосредственно скорости усилий и моментов со скоростями деформаций срединной поверхности оболочки. Для случая осесимметричного деформирования оболочки эти соотношения можно представить в виде (1.4), где

$$(1.6) \quad B_{11} = \gamma \left(1 - \alpha \frac{\gamma_1^2}{S} \right), \quad B_{12} = \gamma \left(\nu - \alpha \frac{\gamma_1 \gamma_2}{S} \right),$$

$$B_{13} = -\frac{4}{3} \gamma \alpha \frac{\theta_1 \gamma_1}{S}, \quad B_{14} = -\frac{4}{3} \gamma \alpha \frac{\theta_2 \gamma_1}{S}, \quad B_{22} = \gamma \left(1 - \alpha \frac{\gamma_2^2}{S} \right),$$

$$B_{23} = -\frac{4}{3} \gamma \alpha \frac{\theta_1 \gamma_2}{S},$$

$$B_{24} = -\frac{4}{3} \gamma \alpha \frac{\theta_2 \gamma_2}{S}, \quad B_{33} = \frac{4}{3} \gamma \left(1 - \alpha \frac{4}{3} \frac{\theta_1^2}{S} \right),$$

$$B_{34} = -\frac{4}{3} \gamma \left(\nu - \alpha \frac{4}{3} \frac{\theta_2 \theta_1}{S} \right), \quad B_{44} = \frac{4}{3} \gamma \left(1 - \alpha \frac{4}{3} \frac{\theta_2^2}{S} \right),$$

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } f = 1 \text{ и } \dot{\Omega} > 0, \\ 0, & \text{если } f < 1 \text{ или } f = 1 \text{ и } \dot{\Omega} \leq 0. \end{cases}$$

$$\dot{\Omega} = \gamma_i \dot{\varepsilon}_i + \frac{4}{3} \theta_i \dot{k}_i, \quad \gamma_1 = \alpha_1 + \nu \alpha_2, \quad \theta_1 = \beta_1 + \nu \beta_2 \quad (1 \neq 2),$$

$$\alpha_i = \frac{\partial f}{\partial n_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial f}{\partial m_i}, \quad S = \gamma_i \alpha_i + \frac{4}{3} \theta_i \beta_i,$$

$$f = Q_n + \frac{1}{2} Q_m - \frac{0,25(Q_n Q_m - Q_{nm}^2)}{Q_n + 0,48 Q_m} + \frac{1}{2} \sqrt{Q_m^2 + 4 Q_{nm}^2}$$

$$Q_n = n_1^2 - n_1 n_2 + n_2^2, \quad Q_m = m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2,$$

$$Q_{nm} = n_1 m_1 - \frac{1}{2} (n_1 m_2 + n_2 m_1) + n_2 m_2.$$

2. Постановка задачи и метод решения. Постановка и метод численного решения задачи упругоупругого осесимметричного деформирования оболочек вращения изложены в работе [4].

В данной работе за основу взяты геометрически нелинейные уравнения оболочек Сандерса с малыми деформациями и умеренными поворотами. Для оболочек вращения при осесимметричном деформировании основная система уравнений сводится к системе шести нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно скоростей искомых смещений и усилий в срединной поверхности оболочки. На каждом из торцов оболочки ставятся по три краевых условия.

При численном решении производные по меридиональной координате аппроксимируются центральными разностями второго порядка точности. При фиксированных коэффициентах уравнений после дискретизации получается система линейных алгебраических уравнений, которая решается методом матричной прогонки.

По отношению к параметру деформирования эта задача является задачей Коши. При интегрировании по параметру деформирования используется метод предиктор — корректор второго порядка точности [2]. Вследствие геометрической и физической нелинейностей на каждом шаге по параметру деформирования применяется итерационный процесс.

За параметр деформирования взято осевое смещение торца оболочки. Предельная нагрузка определяется как максимум на кривой: внешняя сила \sim осевое смещение.

3. Численные результаты. По алгоритму, описанному в п. 2, были вычислены предельные нагрузки для оболочки, состоящей из цилиндрического и конического участков и находящейся под действием внешнего гидростатического давления (фиг. 1). Расчеты проведены для оболочки со следующими параметрами: $R/h = 100$, $L_{\text{ц}}/L_{\text{к}} = 1$, $L/R = 0,2$, $E/\sigma_T = 250$, $\nu = 0,3$, угол θ варьируется в пределах $90^\circ \leq \theta \leq 130^\circ$. Здесь R — радиус срединной поверхности цилиндрического участка оболочки; $L_{\text{ц}}$, $L_{\text{к}}$ — соответственно длины меридианов цилиндрического и конического участков; $L = L_{\text{ц}} + L_{\text{к}}$ — общая длина меридиана срединной поверхности оболочки; θ — угол между осью вращения и нормалью к срединной поверхности конического участка оболочки.

В данной работе представлены результаты расчетов для следующих краевых условий:

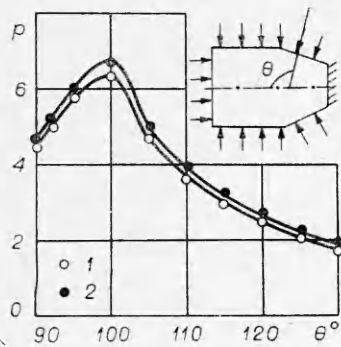
$$(3.1) \quad \dot{n}_1 = b^2 R p / 2h, \quad \dot{w} = \dot{\Phi} = 0 \text{ при } s = 0,$$

$$(3.2) \quad \dot{u} = \dot{w} = \dot{\Phi} = 0 \text{ при } s = L,$$

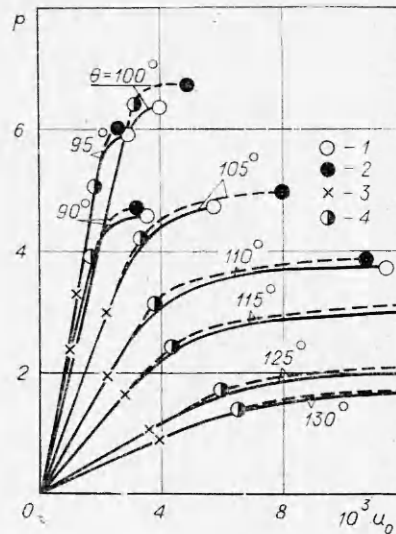
где $w = W/h$; $u = U/L$; W — смещение по нормали к срединной поверхности оболочки; U — смещение вдоль меридиана; Φ — угол поворота нормали к срединной поверхности; s — длина дуги вдоль меридиана ($0 \leq s \leq L$); $p = P/(b^2 \sigma_T)$; P — величина гидростатического давления; $b = h/L$.

Краевые условия (3.1), (3.2) соответствуют тому, что левый торец оболочки перемещается в осевом направлении с приложенным осевым усилием n_1 , а правый торец неподвижен. Относительно угла поворота нормали и смещения в направлении нормали к срединной поверхности краевые условия для обоих торцов соответствуют условиям защемления.

При аппроксимации дифференциальных уравнений конечными разностями цилиндрический и конический участки оболочки разбивались на 16 интервалов каждый. Предварительные расчеты показывают, что



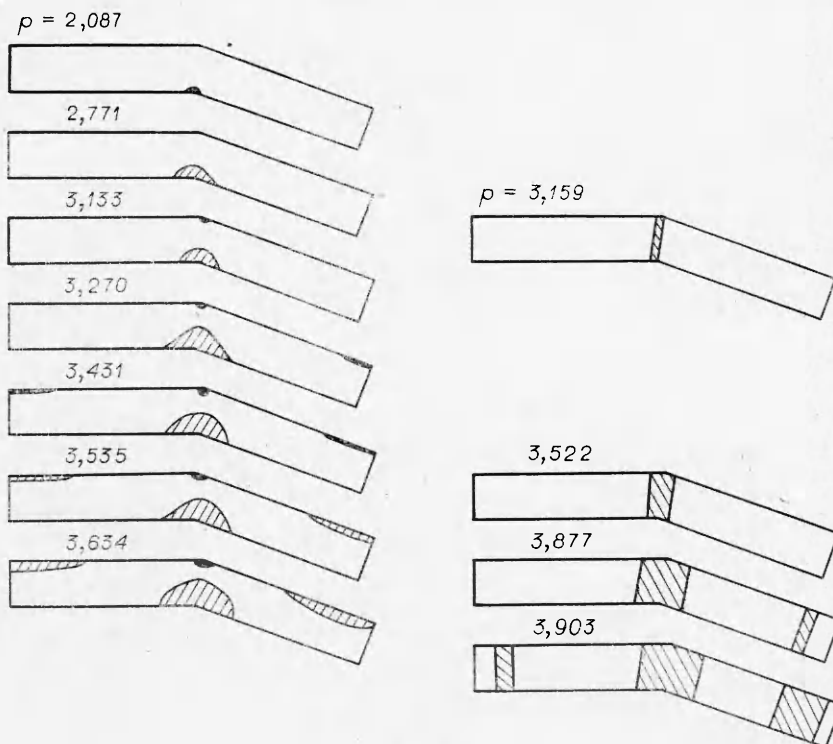
Ф и г. 1



Ф и г. 2

если шаг по параметру деформирования выбран таким образом, что до момента появления пластических деформаций пройдено порядка 10 шагов, а до предельной нагрузки порядка 30 шагов, то дальнейшее уменьшение шага практически не приводит к изменению предельной нагрузки.

При расчетах элементы матрицы $[B_{ij}]$ в формуле (1.4) вычисляются как по соотношениям (1.5), так и по соотношениям (1.6). При использовании соотношений (1.5) интегралы вычислялись по формуле Симпсона с разбиением толщины оболочки на 8 интервалов.



Ф и г. 3

На фиг. 1 представлены зависимости предельной нагрузки от величины угла θ (точки 1 — предельные нагрузки, вычисленные по соотношениям (1.5), а точки 2 — по соотношениям (1.6)). Как видно из графиков, соотношения (1.6) дают оценку предельных нагрузок сверху. Однако максимальное расхождение в результатах не превышает 6%.

На фиг. 2 представлены кривые $p \sim u_0$ (u_0 — безразмерное осевое смещение левого торца оболочки), вычисленные по соотношениям (1.5) (сплошные линии) и соотношениям (1.6) (штриховые линии), точки 1, 2 — предельные нагрузки, 3 — значения давлений, при которых впервые появляются зоны пластических деформаций по соотношениям (1.5), 4 — по соотношениям (1.6).

Согласно гипотезам, при которых получены соотношения (1.6), сечение оболочки полностью находится либо в пластическом, либо в упругом состоянии. Было проведено сравнение характера распространения зон пластических деформаций по соотношениям (1.5), (1.6) для оболочек с различными углами θ . На фиг. 3 для оболочки с $\theta = 110^\circ$ с левой стороны представлен характер развития зон пластических деформаций при использовании соотношений (1.5), а с правой стороны — по соотношениям (1.6). Из проведенных расчетов следует, что соотношения (1.6) правильно отражают характер локализации зон пластических деформаций.

Таким образом, проведенное сравнение показывает, что определение предельных нагрузок и зависимости давления от характерного перемещения может быть с достаточной точностью проведено по соотношениям (1.6). Использование соотношений вида (1.6) может существенно облегчить реализацию численного решения неосесимметричных задач упругопластического деформирования оболочек.

Поступила 6 VI 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Волчков Ю. М., Павлов А. В. Упругопластическое деформирование цилиндрической оболочки с поперечными ребрами под действием гидростатического давления. — В кн.: Труды VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1970.
2. Shindo A., Segucki Y., Shirai T., Denpo K. A numerical approach to finite elastic-plastic deflections of circular plates. — Bulletin of the JSME, 1972, vol. 15, N 80.
3. Бурого Н. Г., Кукуджанов В. Н. Численный метод решения геометрически нелинейных осесимметричных задач для упругопластических оболочек вращения. — Строительная механика и расчет сооружений, 1976, № 5.
4. Волчков Ю. М., Коробейников С. Н. Численное решение упругопластических задач теории оболочек. — В сб.: Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Ч. II. Новосибирск, 1977.
5. Иванов Г. В. Аппроксимация конечного соотношения между усилиями и моментами оболочек при условии пластичности Мизеса. — Инж. журн. МТТ, 1967, № 6.
6. Иванов Г. В. Упругопластическое течение оболочек при условии текучести Мизеса. — Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 3.
7. Robinson M. A comparison of yield surfaces for thin shells. — Intern. J. Mech. Sci., 1974, vol. 13, N 4.
8. Хейдл Х. М., Шербрен А. Н. Предельные нагрузки для круглых пластин при комбинированном нагружении. — Труды Америк. об-ва инж.-мех., сер. Е. Прикладная механика, 1973, т. 40, № 3.