

щегося вдоль выбранной трубки тока. В задачах, где комбинированный разрыв имеет существенное значение, выполняется условие $[m_2] \sim m_2 \sim 1$, следовательно, необходим учет правой части в (13). Из (13) получим оценку поверхностной силы через средние параметры газа в виде формулы $F^0 \approx [m_1] \rho_{11} (u_1 - D)^2$, что позволяет вычислить ускорение частицы на разрыве как $g = -F^0/M^0$, где $h \approx d$, $M^0 = \rho_{22} m_2 d$, а характерное время смещения частицы на $\Delta x \approx d$ равно $\tau \approx \sqrt{\frac{2m_2 \rho_{22}}{[m_2] \rho_{11}} \frac{d}{(u_1 - D)}}$, следовательно, введенные выше гипотезы выполняются.

В заключение укажем, что для определения p^σ необходимо использовать данные эксперимента либо эмпирические соотношения, приведенные, например, в [4].

Поступила 20 I 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами. — ПММ, 1965, т. 29, № 3.
2. Яненко Н. Н., Солоухин Р. И., Папырин А. Н., Фомин В. М. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц. Новосибирск: Наука, 1980.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973.
4. Крайко А. Н., Миллер Л. Г., Ширковский П. А. О течениях газа в пористой среде с поверхностями разрыва пористости. — ПМТФ, 1982, № 1.
5. Крайко А. Н. К теории двухжидкостных течений газа и диспергированных в нем частиц. — В кн.: Гидродинамика и теплообмен в двухфазных средах. Материалы II Всесоюз. школы по теплофизике. Новосибирск, 1981.
6. Стернин Л. Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М.: Машиностроение, 1974.
7. Крайко А. Н. К двухжидкостной модели течений газа и диспергированных в нем частиц. — ПММ, 1982, т. 46, вып. 1.
8. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
9. Ильин Ю. П. Взаимодействие ударной волны с полубесконечной пористой средой. — В кн.: Прикладная математика. Вып. 2. Тула: изд. ТПИ, 1975.
10. Гринь В. Т., Крайко А. Н., Миллер Л. Г. К распаду произвольного разрыва на перфорированной перегородке. — ПМТФ, 1981, № 3.
11. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970.

УДК 621.01 : 531.66

МЕТАНИЕ ВОЗДУШНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ НЕЗАКРЕПЛЕННОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ВБЛИЗИ ПЛОСКОЙ ПРЕГРАДЫ

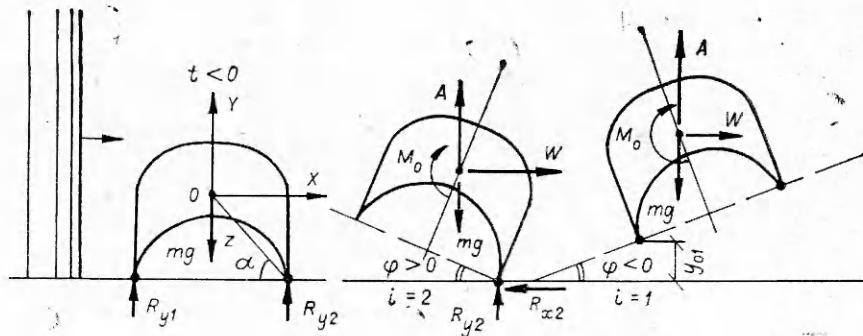
В. А. КОТЛЯРЕВСКИЙ

(Москва)

Дается формулировка задачи о метании тела ударной волной вблизи твердой плоской преграды. Считается, что выполняются условия [1] взаимодействия с телом длинной ударной волны и силовая картина представима двумя фазами: дифракции и квазистационарного обтекания. Для двух вариантов представления дифракционных нагрузок рассмотрены начальные условия возникновения различных форм движения, а также переходные условия, связанные с переменной форм при ударном взаимодействии с преградой. Решение получено численным методом.

1. Рассматривается тело, имеющее плоскость Ω материальной симметрии, в которой действуют силы от ударной волны и реакции односторонних связей, что соответствует плоскопараллельному движению тела с переменным числом (от 1 до 3) степеней свободы. Совместим плоскость Ω с инерциальной системой координат XOY с началом в центре массы тела, при $t \leq 0$ симметричного относительно Y и имеющего две точки контакта с преградой (фиг. 1). Ударная волна распространяется вдоль оси X и при $t = 0$ соприкасается с телом. Параметры невозмущенной волны ассоциируются с точкой $X = 0$.

Полагается, что система сил в фазе дифракции не зависит от смещений тела, являющихся несущественными, а в фазе обтекания определяется соотношениями стационарной аэродинамики, в которых время t является параметром [1]. Соударение опор тела с преградой считается абсолютно неупругим, а сопротивление смещению — под-



Фиг. 1

чиняющимся закону Кулона. Возможны четыре формы движения: 1) ($E = 1$) — вращение в комбинации со скольжением вдоль преграды; 2) ($E = 2$) — вращение вокруг неподвижной оси; 3) ($E = 3$) — скольжение; 4) ($E = 4$) — полет без контакта с преградой. При движении допустимо чередование форм. Для состояния покоя вводится признак $E = 0$.

2. Нагрузку в фазе дифракции можно аппроксимировать мгновенным импульсом или функцией времени, что важно для оценки ускорений тела в период его наиболее интенсивного нагружения. Считается, что известны импульсы S_W , S_A по осям X , Y и момент импульса M_S . Тогда для второго случая запишем аппроксимирующие выражения для лобовой W , подъемной A сил и момента M_0

$$W(t) = W_m(1 - t/\tau_0) \quad (0 < t \leq \tau < \tau_0),$$

$$A(t) = A_m t/\tau_1 \quad (0 < t \leq \tau_1/2), \quad A(t) = A'_m(1 - t/\tau_A) \quad (\tau_1 < t \leq \tau),$$

$$M_0 = \bar{m} \bar{m}' (i - t/\tau_M) \quad (0 < t \leq \tau),$$

в которых константы определяются через компоненты импульса с учетом сопряжения к концу фазы дифракции $t = \tau$ с функциями нагрузки в фазе квазистационарного обтекания

$$W_m = K_\Phi F_\delta \Delta p_{отр}, \quad A_m = 2S_A/\tau - (1/2)\bar{A}, \quad A'_m = \bar{A}\tau_A/(\tau_A - \tau),$$

$$M_m = \begin{cases} (2M_S - \tau\bar{M}_0)/\tau & (M_S\bar{M}_0 > 0), \\ \frac{M_S}{\tau} - \text{sgn } \bar{M}_0 \sqrt{\left(\frac{M_S}{\tau}\right)^2 - \left(\frac{2M_S}{\tau} + \bar{M}_0\right)\bar{M}_0} & (M_S\bar{M}_0 < 0, M_S^2 \equiv \\ \equiv |M_S/(\bar{M}_0\tau)| \geq \sqrt{2} - 1). \end{cases}$$

Условие $M_S^2 \geq \sqrt{2} - 1$ означает отсутствие существенного различия в эксцентриситетах аэродинамического (h^c) и импульса (h).

Для второй фазы в предположении, что числа Рейнольдса Re находятся в закритической области, т. е. имеет место автомодельность по Re , что характерно для плохо-обтекаемых тел, нагрузки определяются соотношениями

$$W = \Delta p_{скф} f(\Delta p_\Phi, t) l^2 \hat{C}_W(\Phi, y) \alpha_W(\Phi, y, M(t)),$$

$$A = \Delta p_{скф} f(\Delta p_\Phi, t) l^2 \hat{C}_A(\Phi, y) \alpha_A(\Phi, y, M(t)),$$

$$M_0 = \Delta p_{скф} f(\Delta p_\Phi, t) i^2 \hat{C}_M(\Phi, y) \alpha_M(\Phi, y, M(t)),$$

где Δp_Φ , $\Delta p_{скф}$, $\Delta p_{отр}$ — давление, скоростной напор на фронте волны и давление отражения от твердой стенки; f — функция угасания скоростного напора ($f(\Delta p_\Phi, 0) = 1$); $\hat{C}_{W,A,M}$ — функции для аэродинамических коэффициентов, зависящие от обобщенных координат тела (Φ, y) для чисел Маха $M \ll 1$; $\alpha_{W,A,M}$ — поправки на сжимаемость воздуха; F_δ — мидель; $K_\Phi \leq 1$ — коэффициент формы; l — характерный размер тела.

Время τ определяется из условия сопряжения выражений для функции W решением уравнения

$$W(\tau) \equiv W_m(1 - \tau/\tau_0) = Q(\tau),$$

$$Q(t) = \Delta p_{скф} f(\Delta p_\Phi, t) l^2 \hat{C}_W(0, 0) \alpha_W(0, 0, M(t)), \quad \tau_0 = (1/2)\tau(1 - S_W/(W_m\tau)).$$

Из условия непрерывности для A при $t = \tau$, $t = \tau_1$, а также для M_0 при $t = \tau$ имеем (M_Φ — число Маха на фронте ударной волны)

$$\tau_A = (A_m - (1/2)\bar{A})/(A_m - \bar{A}), \quad \bar{A} = \Delta p_{скф} l^2 \hat{C}_A(0, 0) \alpha_A(0, 0, M(0)),$$

$$\tau_M = M_m\tau/(M_m - \bar{M}_0), \quad \bar{M}_0 = \Delta p_{скф} l^2 \hat{C}_M(0, 0) \alpha_M(0, 0, M(0)), \quad M(0) = M_\Phi.$$

Функции \hat{C} , α получают методами экспериментальной аэродинамики, а f , M — из решения задачи о точечном взрыве [2]. Импульсы S_W , S_A , S_M измеряются с помощью динамических весов [3, 4].

3. Поведение тела под нагрузкой описывается уравнениями динамического равновесия и уравнениями связей. Уравнения плоского движения тела в проекциях на оси X , Y имеют вид

$$(3.1) \quad mX'' = \sum_j F_{xj}, \quad mY'' = \sum_j F_{yj}, \quad I\varphi'' = \sum_j \text{mom}_z F_j,$$

где φ — угол поворота тела вокруг центра; m — масса тела; I — его центральный момент инерции относительно оси z ; $\sum_j F_{xj}$, $\sum_j F_{yj}$ — проекции главного вектора активных и реактивных сил; $\sum_j \text{mom}_z F_j$ — момент главного вектора относительно оси z . Точка означает производную по t .

Реакции связей в общем случае представим в виде (неотрицательных) вертикальных R_{yi} и горизонтальных R_{xi} составляющих ($i = 1, 2$). При $E = 1$ на тело наложена связь, удерживающая одну из опор на преграде. Зафиксируем ненулевые реакции R_{xi} , R_{yi} с помощью индекса i :

$$(3.2) \quad i = 1 \text{ (sgn } \varphi = -1), \quad i = 2 \text{ (sgn } \varphi = 1).$$

Обозначая через x_i , y_i возможные перемещения опорных точек, имеем дающее соотношение $Y(\varphi)$ уравнение связи

$$(3.3) \quad y_i = 0.$$

Для тела с двумя степенями свободы из (3.1) имеем уравнения движения и соотношение для вертикальной реакции

$$(3.4) \quad I\varphi'' = M_0 + z(R_{xi} \sin \gamma - R_{yi} \cos \gamma) \text{sgn } \varphi, \quad \gamma = \varphi + \alpha \text{sgn } \varphi, \quad \alpha < \pi/2;$$

$$(3.5) \quad mX'' = W - R_{xi};$$

$$(3.6) \quad R_{yi} = mY'' - \hat{A}, \quad \hat{A} = A - mg.$$

Для горизонтальной реакции запишем

$$(3.7) \quad |R_{xi}| = \mu_0 R_{yi},$$

где z — радиус опрокидывания; α — угловая координата центра инерции; μ_0 — коэффициент трения; g — ускорение свободного падения.

Из (3.3)–(3.7), учитывая знак скорости \dot{x}_i опорной точки, имеем систему уравнений для случая $E = 1$ ($\varphi \neq 0$, $\dot{x}_i \neq 0$, $R_{yi} > 0$), $\beta = mz^2/I$:

$$(3.8) \quad \varphi'' = f_1(M_0, \hat{A}, \varphi', \gamma, \mu),$$

$$f_1 = [M_0 + (1/2)\beta I \varphi'^2 (\sin 2\gamma - 2\mu \sin^2 \gamma) - \hat{A}z(\mu \sin \gamma - \cos \gamma) \text{sgn } \varphi] [1 - (1/2)\beta(\mu \sin 2\gamma - 2 \cos^2 \gamma)]^{-1/I},$$

$$X'' = W/m - \mu[-\hat{A}/m + z(f_1(M_0, \hat{A}, \varphi', \gamma, \mu) \cos \gamma - \varphi'^2 \sin \gamma) \text{sgn } \varphi],$$

$$\dot{x}_i = X z \varphi' \sin \gamma \text{sgn } \varphi, \quad Y = z(\sin \gamma \text{sgn } \varphi - \sin \alpha),$$

$$R_{yi} = -\hat{A} + mz[f_1(M_0, \hat{A}, \varphi', \gamma, \mu) \cos \gamma - \varphi'^2 \sin \gamma] \text{sgn } \varphi,$$

$$R_{xi} = \mu R_{yi}, \quad \mu = \mu_0 \text{sgn } \dot{x}_i.$$

При $E = 2$ имеем уравнения для двух связей: (3.3) и $\dot{x}_i = 0$, дающие соотношения $Y(\varphi)$, $X(\varphi)$. Из (3.1) с учетом правила (3.2) имеем систему уравнений для $E = 2$ ($\varphi \neq 0$, $R_{yi} > 0$, $|R_{xi}| < \mu_0 R_{yi}$), $I_\beta = I(1 + \beta)$:

$$(3.9) \quad \varphi'' = f_2(M_0, W, \hat{A}, \gamma), \quad f_2 = [M_0 + z(W \sin \gamma + \hat{A} \cos \gamma) \text{sgn } \varphi] I_\beta^{-1};$$

$$(3.10) \quad X = x_i + z(\cos \alpha - \cos \gamma) \text{sgn } \varphi, \quad Y = z(\sin \gamma \text{sgn } \varphi - \sin \alpha);$$

$$(3.11) \quad R_{xi} = W - mz[f_2(M_0, W, \hat{A}, \gamma) \sin \gamma + \varphi'^2 \cos \gamma] \text{sgn } \varphi;$$

$$(3.12) \quad R_{yi} = -\hat{A} + mz[f_2(M_0, W, \hat{A}, \gamma) \cos \gamma - \varphi'^2 \sin \gamma] \text{sgn } \varphi,$$

где $x_i = \text{const}$ — смещение опоры в начале данной формы движения.

При $E = 3$ (две связи) на поверхности преграды удерживаются обе точки контакта, т. е. имеем уравнение связей (3.3). Это дает $\varphi = Y = 0$, $\dot{x}_i = X'$, т. е. уравне-

ния для случая $E = 3$ ($X' \neq 0$, $R_{yi} > 0$, $i = 1, 2$) следующие:

$$(3.13) \quad X'' = (W + \mu \hat{A})m^{-1}, \quad Y = \varphi = 0;$$

$$(3.14) \quad R_{yi} = \frac{1}{2} \left[-\hat{A} (1 \mp \mu \operatorname{tg} \alpha) \mp \frac{1}{z} M_0 \operatorname{sec} \alpha \right].$$

Для четвертой формы характерно отсутствие связей. С учетом (3.2) для $E = 4$ ($y_i > 0$) имеем систему уравнений

$$\varphi'' = M_0 I^{-1}, \quad X'' = Wm^{-1}, \quad Y'' = \hat{A}m^{-1}.$$

Формула для вертикального перемещения y_i опорной точки

$$y_i = Y - z(\sin \gamma \operatorname{sgn} \varphi - \sin \alpha).$$

Системы уравнений интегрируются при начальных и переходных условиях, определяемых в зависимости от представления дифракционных нагрузок и чередования форм движения.

4. При аппроксимации эффекта фазы дифракции мгновенным импульсом (и пренебрежении смещениями за период удара) начальными условиями являются нулевые перемещения и ненулевые скорости, определяемые компонентами импульса, зависящими от реализуемой формы движения.

Импульс, действующий на тело, складывается из активного импульса S от ударной волны за период фазы дифракции и импульсов реакций связей. В силу предположения об абсолютно неупругом характере соударения реактивный импульс возникнет в контактной точке с нулевой вертикальной скоростью после удара. Начальные скорости $\dot{\varphi}_0$, \dot{X}_0 , \dot{Y}_0 (после воздействия импульса) определяются уравнениями связей и следующими уравнениями количеств движения, в которых учтены нулевые скорости до приложения импульса:

$$(4.1) \quad m\dot{X}_0 = \sum_j S_{jx}, \quad m\dot{Y}_0 = \sum_j S_{jy}, \quad I\dot{\varphi}_0 = \sum_j \operatorname{mom}_0 S_j.$$

Здесь $\sum_j S_{jx}$, $\sum_j S_{jy}$ — компоненты главного вектора активного S и реактивных импульсов; $\sum_j \operatorname{mom}_0 S_j$ — момент главного вектора импульсов относительно центральной оси z , а постоянно действующими силами пренебрегается.

Пусть импульс S коллинеарен оси X и приложен с эксцентриситетом h относительно центра массы. Момент импульса $M_S = Sh$. Рассмотрим условия возникновения первой формы движения при $\dot{\varphi}_0 > 0$. Положив $\varphi = 0$, $\operatorname{sgn} \varphi = 1$, а для начальных скоростей контактных точек $y_{01} > 0$, $y_{02} = 0$, имеем

$$(4.2) \quad \dot{Y}_0 = z\dot{\varphi}_0 \cos \alpha \operatorname{sgn} \varphi$$

и соотношения для импульсов реакций $S_{x1} = S_{y1} = 0$, $S_{x2} = \mu S_{y2}$, $\mu = \mu_0 \operatorname{sgn} \dot{x}_{02}$. Из (4.1)

$$(4.3) \quad \dot{\varphi}_0 \equiv \dot{\varphi}_{0(1)} = \frac{hS}{I} \left[1 - \frac{1}{2} \beta (\mu \operatorname{sgn} \varphi \sin 2\alpha - 2 \cos^2 \alpha) \right]^{-1} > 0, \quad \beta = \frac{mz^2}{I};$$

$$(4.4) \quad \dot{X}_0 \equiv \dot{X}_{0(1)} = \frac{S}{m} - \mu z \dot{\varphi}_{0(1)} \operatorname{sgn} \varphi \cos \alpha, \quad \mu = \mu_0 \operatorname{sgn} \dot{x}_{02} (\dot{\varphi}_0 > 0).$$

Неравенство (4.3) эквивалентно следующим ($v = h/(z \sin \alpha) > -1$):

$$(4.5) \quad \mu_0 < \lambda_1 \equiv 2(1 + \beta \cos^2 \alpha) / (\beta \sin 2\alpha) > 0 (v > 0), \quad \mu_0 > \lambda_1 (v < 0).$$

Для скорости контактной точки имеем ($\mu = \mu_0 \operatorname{sgn} \dot{x}_{02}$)

$$\dot{x}_{02} \equiv \dot{X}_0 - z\dot{\varphi}_0 \sin \alpha = \frac{S}{m} \left\{ 1 - 2\beta v \left(\sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \mu \sin 2\alpha \right) [2(1 + \beta \cos^2 \alpha) - \beta \mu \sin 2\alpha]^{-1} \right\},$$

причем для случая $\dot{x}_{02} > 0$, согласно (4.5), знаменатель дроби при $v > 0$ положительный, а при $v < 0$ — отрицательный. Если $\dot{x}_{02} < 0$, то при $v > 0$ знаменатель неотрицательный, и можно показать, что условиями, достаточными для реализации первой формы движения при $\dot{\varphi}_0 > 0$, являются ($\lambda_0 \equiv \lambda_2 - v \operatorname{tg} \alpha / (v + 1)$)

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \mu_0 < \lambda_0 < \lambda_1, \quad 0 < v < \lambda_2 \operatorname{ctg} \alpha \dots \operatorname{sgn} \dot{x}_{02} = 1, \\ \mu_0 > \lambda_0 > \lambda_1, \quad -1 < v < 0 \dots \operatorname{sgn} \dot{x}_{02} = 1, \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 < 0, \quad v > \lambda_1 \operatorname{ctg} \alpha \\ \mu_0 < |\lambda_0| < \lambda_1 \quad \text{или} \quad \mu_0 < \lambda_1 < |\lambda_0| \end{aligned} \right\} \dots \operatorname{sgn} \dot{x}_{02} = -1.$$

Для реальных значений α и β параметр $\lambda_1 > 1$ и области $\mu_0 > \lambda_0 > \lambda_1$, $-1 < v < 0$ (4.6) соответствуют значения коэффициента $\mu_0 > 1$. Условие $\mu_0 < \lambda_1 < |\lambda_0|$ при $\lambda_0 < 0$ практически означает, что $\mu_0 < 1$.

Чтобы возникла первая форма движения при $\dot{\varphi}_0 < 0$, приняв $\varphi = 0$, $\operatorname{sgn} \varphi = -1$, $y_{01} = 0$, $y_{02} > 0$, $S_{x1} = \mu S_{y1}$, $S_{x2} = S_{y2} = 0$, получим (4.2) — (4.4), а также $\dot{x}_{01} = \dot{X}_0 - z\dot{\varphi}_0 \sin \alpha$. Из (4.3) видно, что неравенство $\dot{\varphi}_0 < 0$ удовлетворяется при любых μ_0 и условии $v < 0$. При этом для скорости контактной точки имеем

$$\dot{x}_{01} = \frac{S}{m} \left\{ 1 - 2\beta v \left(\sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \mu_0 \sin 2\alpha \right) \left[2(1 + \beta \cos^2 \alpha) + \beta \mu_0 \sin 2\alpha \right]^{-1} \right\}.$$

Неравенство $\dot{x}_{01} > 0$ при $\mu_0 > -\lambda_0$ выполняется автоматически также при любых μ_0 , так как $\lambda_0 > 0$. Таким образом, первая форма движения с начальными скоростями по (4.3), (4.4) реализуется при условиях

$$\begin{aligned} \mu_0 < |\lambda_0| < 1, \\ 0 < v < \lambda_1 \operatorname{ctg} \alpha \quad (\operatorname{sgn} \varphi = 1, \operatorname{sgn} \dot{x}_{02} = 1), \\ v > \lambda_1 \operatorname{ctg} \alpha \quad (\operatorname{sgn} \varphi = 1, \operatorname{sgn} \dot{x}_{02} = 1), \\ -1 < v < 0 \quad (\operatorname{sgn} \varphi = -1, \operatorname{sgn} \dot{x}_{01} = 1). \end{aligned}$$

Рассмотрим условия возникновения второй формы, для которой $S_{x1} = S_{y1} = -\dot{x}_{02} = \dot{y}_{02} = 0$, т. е. имеем (4.2) и $X_0 = X_{0(2)} = z\dot{\varphi}_0 \sin \alpha$. Подставляя значения скоростей X_0 , Y_0 в (4.1), получим

$$(4.7) \quad \dot{\varphi}_0 \equiv \dot{\varphi}_{0(2)} = hS(v+1)/[Iv(\beta+1)].$$

Реализация данной формы возможна при условиях

$$(4.8) \quad \dot{\varphi}_0 > 0, \quad |S_{x2}| < \mu_0 S_{y2},$$

причем первое из них, как видно из (4.7), выполняется всегда ($v > -1$).

Для импульсов реакций запишем

$$S_{x2} = S - mz \sin \alpha \cdot S(h + z \sin \alpha)/I_\beta,$$

$$S_{y2} = mz \cos \alpha \cdot S(h + z \sin \alpha)/I_\beta.$$

В случае $S_{x2} > 0$ второе неравенство (4.8) дает $\mu_0 > \lambda_0$ при $v < \lambda_1 \operatorname{ctg} \alpha$, причем, чтобы иметь $\mu_0 < 1$, должно быть $v > 0$, а если $S_{x2} < 0$, то $\mu_0 > -\lambda_0$ при $v > \lambda_1 \operatorname{ctg} \alpha$, $\lambda_0 < 0$. На линии $v = \lambda_1 \operatorname{ctg} \alpha$ имеем $S_{x2} = 0$. Таким образом, вторая форма движения с начальной угловой скоростью по (4.7) реализуется, когда $|\lambda_0| < \mu_0 < 1$, $v > 0$.

Возникновение третьей формы возможно при $Y_0 = \dot{\varphi}_0 = 0$, $X_0 > 0$. Уравнения (4.1) дают $\sum_i S_{xi} > 0$, $\sum_i S_{yi} = \sum_i \operatorname{mom}_0 S_i = 0$, т. е. $S_{y1} + S_{y2} = 0$ и по закону Кулона

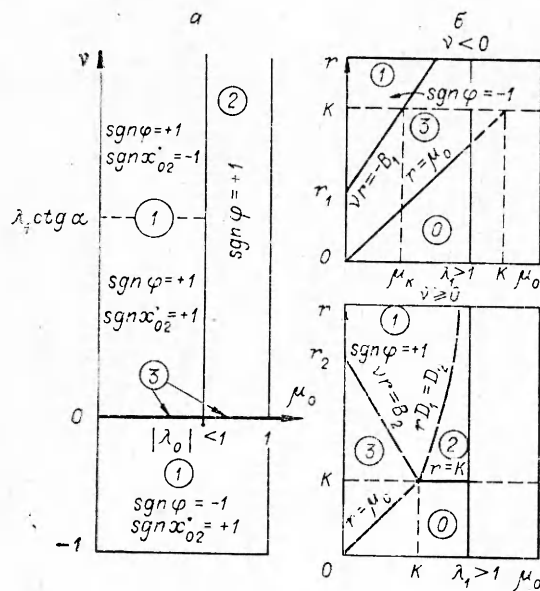
на $S_{x1} + S_{x2} = 0$. Поэтому в начале скольжения не возникает горизонтальных реактивных импульсов и начальная скорость определяется (без потерь за счет соударений) полным активным импульсом $X_0 = S/m$.

Из уравнения баланса момента импульса $hS + z(S_{y1} - S_{y2}) \cos \alpha = 0$, т. е., учитывая, что $S_{y1} + S_{y2} = 0$, получим значения вертикальных импульсов $S_{y1} = -S_{y2} = -hS/(2z \cos \alpha)$. Этот результат не противоречит односторонним свойствам связей лишь при $h = 0$, т. е. форма 3 возникает при единственном условии $v = 0$, причем начальная скорость соответствует телу, совершенно свободному от связей.

Случаи возникновения различных форм движения при действии мгновенного импульса показаны в плоскости $\mu_0 - v$ на фиг. 2, а.

5. Рассмотрим условия движения, представляя фазу дифракции процессом конечной длительности, в котором максимальные нагрузки вдоль оси X соответствуют моменту $t = 0$. Это позволит, в частности, выяснить условия неподвижности тела при малых давлениях Δp_Φ , когда нагрузки от ударной волны уравновешены статически. В данном случае на тело наложено три связи ($X = Y = \varphi = 0$) и уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} M_0 - z[(R_{y2} - R_{y1}) \cos \alpha - R_x \sin \alpha] &= 0, \\ R_x \equiv R_{x1} + R_{x2} = W, \quad R_y \equiv R_{y1} + R_{y2} &= -A. \end{aligned}$$



Фиг. 2

Для возникновения формы 1 при $\text{sgn } \varphi = 1$ должно быть $\varphi'' > 0$, а горизонтальное ускорение центра инерции должно превышать ускорение, которое возникло бы без скольжения, т. е. в силу соотношения (3.10) должно быть $X''(0) > z\varphi''(0) \sin \alpha$. Раскрывая неравенства с помощью уравнений для первой формы, в которых примем $\mu = \mu_0$, $\text{sgn } \varphi = 1$, получим

$$rD_1 > D_2, \quad vr > B_2(v > 0); \quad rD_1 > D_2, \quad \mu_0 > K \quad (v = 0);$$

$$D_1 = 1 + \beta[1 - (v + 1)(\sin^2 \alpha + (1/2)\mu_0 \sin 2\alpha)];$$

$$D_2 = \mu_0(1 + \beta \sin^2 \alpha) - (1/2)\beta \sin 2\alpha; \quad B_2 = \text{ctg } \alpha - \mu_0.$$

Для обратного вращения, полагая $\varphi'' < 0$, $x_{01}'' > 0$, из тех же уравнений при $\text{sgn } \varphi = -1$ получим $-vr > B_1 = \text{ctg } \alpha + \mu_0(v < 0)$. Это условие справедливо, пока знаменатель в правой части (3.8) остается положительным, т. е. при $\mu_0 > \lambda_1$.

Вращательное движение вокруг правой опорной точки возникает при $\varphi'' > 0$, $R_{x2} < \mu_0 R_{y2}$, $R_{y2} > 0$. Раскрывая эти неравенства с помощью уравнений (3.9)–(3.12) для формы 2 при $\text{sgn } \varphi = 1$, будем иметь $rD_1 < D_2$, $r > K(v \geq 0)$.

Скольжение (форма 3) осуществляется при $X'' > 0$, $R_{yi} > 0$. С помощью уравнений (3.13), (3.14) получим условия реализации данной формы

$$\mu_0 < r < B_2/v(v > 0), \quad r > \mu_0, \quad \mu_0 < K(v = 0), \quad \mu_0 < r < B_1/|v| \quad (v < 0).$$

Условия смещения в плоскости $\mu_0 - r$ показаны на фиг. 2, б областями, номера которых соответствуют формам движения, а границы определяются параметрами K , v , β , причем K фиксирует область неподвижности <0> и является показателем склонности тела к определенной форме движения. С ростом K область неподвижности расширяется, а склонность к неустойчивости уменьшается. Вертикальная граница $\mu_0 = \lambda_1$ для начальных значений параметров перекрывает величину $\mu_0 = 1$. При $v < 0$ и $\alpha < \pi/4$ имеем $K > 1$.

6. Определим переходные условия. Переход от формы 1 к форме 2 (1–2) осуществляется при торможении контактной точки, что при численном решении фиксируется изменением знака скорости, т. е. условием $\dot{x}_0 - \dot{x}_c < 0$, где \dot{x}_0 — скорость на прошлом шаге времени (при численном интегрировании систем уравнений). Переход 2–1 связан с превышением горизонтальной реакцией предельной (по Кулону) величины согласно условию $R_{xi} > \mu_0 R_{yi}$. Переход 3–1 фиксируется при появлении отрицательного знака у одной из вертикальных реакций $R_{yi} < 0$, а 1–4 и 2–4 — отрицательного знака реакции R_{yi} для единственной контактной точки. Указанные переходы являются безударными.

Рассмотрим ударные переходы 1–3, 2–3, 4–1, 4–2, а также 1–1, 1–2, 2–1, 2–2, связанные с изменением знака угла φ . Признаком переходов 4–1, 4–2 является исчезновение расстояния y_i между одной из опорных точек и преградой. При переходе с одной формы движения на другую, не связанном с ударами опорных точек о преграду, перемещения и скорости остаются непрерывными. При ударных переходах на движущееся тело внезапно накладываются связи, вследствие чего возникают реактивные импульсы. Как и выше, соударение считается мгновенным и абсолютно неупругим

Отсюда получаем формулу для вертикальных реакций

$$R_{yi} = -\frac{1}{2} \left(\hat{A} \pm W \text{tg } \alpha \pm \frac{M_0}{z} \sec \alpha \right).$$

Условиями неподвижности в силу одностороннего характера вертикальных связей и закона Кулона являются $R_{yi} > 0$, $R_x < \mu_0 R_y$ или после подстановки значений нагрузок для $t = 0$ из п. 2 $M_0 = M_m$, $W = W_m$, $A = 0$, $-r < K$, $r < \mu_0$, $K = \text{ctg } \alpha / (v + 1)$, $r = M_m / (mgh^0)$, $v = h^0 / (z \sin \alpha)$, $h^0 = M_m / W_m$.

Далее рассмотрим условия смещения в момент $t = +0$, для которого примем $X = Y = \varphi = X' = Y' = \varphi' = 0$. Положим, что при $h^0 < 0$ $\alpha < \pi/4$, а значения $\mu_0 < \lambda_1$. Величина $\lambda_1 > 1$, и коэффициент μ_0 может варьироваться до 1. Параметр α при $h^0 > 0$ может иметь значения $\alpha > \pi/4$.

(коэффициент восстановления равен нулю), поэтому пренебрегается перемещениями и импульсами от постоянно действующих сил. Соотношение между компонентами реактивных импульсов соответствует закону Кулона с коэффициентом μ_0 . В результате действия реактивных импульсов S_x, S_y при ударе изменяется (уменьшается) количество движения системы, т. е. происходит скачкообразное уменьшение скоростей или прекращение движения.

Рассмотрим случай падения тела под углом $\varphi \neq 0$ на одну из опор в момент $t = t_*$. Перед ударом ($t = -t_*$) скорости имели значения X^*, Y^*, φ^* , а после удара ($t = +t_*$) $X_*^*, Y_*^*, \varphi_*^*$. Уравнения моментов импульсов и импульсов с уравнением связи $y_{0i}^*(+t_*) = 0$ неупругого удара

$$(6.1) \quad I(\varphi_*^* - \varphi^*) = z(S_x \sin \gamma - S_y \cos \gamma \operatorname{sgn} \varphi), \\ m(X_*^* - X^*) = -S_x, \quad m(Y_*^* - Y^*) = S_y, \quad Y_*^* = z\varphi_*^* \cos \gamma \operatorname{sgn} \varphi$$

содержат пять искоемых величин $S_x, S_y, \varphi_*^*, X_*^*, Y_*^*$, причем реактивные импульсы можно выразить через угловую скорость φ_*^* :

$$(6.2) \quad S_x = \frac{I \operatorname{sgn} \varphi}{z \sin \gamma} \left[\varphi_*^* (1 + \beta \cos^2 \gamma) - \varphi^* - \frac{\beta}{z} Y^* \cos \gamma \operatorname{sgn} \varphi \right]; \\ S_y = m(z\varphi_*^* \cos \gamma \operatorname{sgn} \varphi - Y^*).$$

Эти выражения справедливы в случаях возникновения формы 1 или 2. Добавим соотношение, зависящее от ожидаемой формы. Если после удара возникает форма 2, то $x_{0i}^*(+t_*) = 0$ или

$$X_*^* = z\varphi_*^* \sin \gamma \operatorname{sgn} \varphi \quad (\mu_0 > |\lambda|, \lambda = S_x/S_y)$$

и из (6.1) получаем

$$\varphi_*^* = \frac{1}{\beta + 1} \left[\varphi^* + \frac{\beta}{z} (X^* \sin \gamma + Y^* \cos \gamma) \operatorname{sgn} \varphi \right].$$

Если при проверке окажется, что условие $\mu_0 > |\lambda|$ не выполняется, то в результате удара возникает форма 1, причем

$$S_x = \mu_0 S_y \operatorname{sgn} x_{0i}^*, \quad x_{0i}^* = X^* - z\varphi^* \sin \gamma \operatorname{sgn} \varphi,$$

и с учетом (6.1), (6.2) получаем следующие формулы для скоростей:

$$X_*^* = X^* - \mu_0 (z\varphi_*^* \cos \gamma \operatorname{sgn} \varphi - Y^*) \operatorname{sgn} x_{0i}^*, \\ \varphi_*^* = \varphi_*^* = \frac{\varphi^* - \frac{\beta}{z} Y^* (\mu_0 \sin \gamma \operatorname{sgn} x_{0i}^* - \cos \gamma) \operatorname{sgn} \varphi}{1 + \frac{1}{2} \beta (1 + \cos 2\gamma - \mu_0 \sin 2\gamma \operatorname{sgn} x_{0i}^*)}.$$

Далее рассмотрим случаи ударных переходов с изменением знака угла φ (кантование). При этом импульс возникнет под опорой, которая до удара не имела контакта с преградой (иначе вследствие неупругого удара движение прекращается). Отсюда следует, что приведенные формулы справедливы и для данного случая, если в них положить $\gamma = \alpha$, а значение $\operatorname{sgn} \varphi$ брать для $t = +t_*$, т. е. для вновь возникающей формы движения. Знаки скоростей, вычисляемых по указанным формулам, должны соответствовать формам движения, появляющимся после удара. Без такого соответствия, очевидно, будет происходить скольжение (форма 3) или торможение (остановка) тела.

Если вращений после удара не возникает, то необходимо допустить наличие импульсов под обеими опорами. Введем четыре импульса $S_{y1} > 0, S_{y2} > 0, S_{x1}, S_{x2}$, полагая, что после удара ($t = +t_*$) $\varphi_*^* = Y_*^* = 0$, и обозначая $S_x = S_{x1} + S_{x2}$, запишем уравнения для удара с переходом к скольжению при $\gamma = \alpha$

$$-I\varphi^* = z[(S_{y1} - S_{y2}) \cos \alpha + S_x \sin \alpha], \\ m(X_*^* - X^*) = -S_x, \quad -mY^* = S_{y1} + S_{y2}, \quad S_x = \mu_0 (S_{y1} + S_{y2}) \operatorname{sgn} X_*^*.$$

Отсюда имеем ($i = 1, 2$)

$$(6.3) \quad S_x = -\mu_0 m Y^* \operatorname{sgn} X_*^*;$$

$$(6.4) \quad S_{yi} = \mp (I\varphi^* \pm m z Y^* \cos \alpha + z S_x \sin \alpha) / (2z \cos \alpha);$$

$$(6.5) \quad X_*^* = \mu_0 Y^* \operatorname{sgn} X_*^* + X^*.$$

Пусть $X_*^* > 0$ ($\text{sgn } X_*^* = 1$). Тогда из (6.5), учитывая, что $Y^* < 0$, получим

$$(6.6) \quad \mu_0 < -X^*/Y^*,$$

а из (6.3) — выражение

$$(6.7) \quad S_x = -\mu_0 m Y^* > 0.$$

Заметим, что при численной реализации задачи признаком удара является изменение на $i+1$ временном шаге ($t_i < t_* < t_{i+1}$) знака произведения $\text{sgn } \varphi(t_i) \times \text{sgn } \varphi(t_{i+1})$ с плюса на минус. Введем $\text{sgn } \varphi_* \equiv \text{sgn } \varphi(t_{i+1}) = -\text{sgn } \varphi(t_i)$ для фиксации перемены формы движения. Используя функцию $\text{sgn } \varphi_*$ для $t = t_*$ и учитывая (6.7), исключим S_x и скорость $Y^* = -z\varphi^* \text{sgn } \varphi_* \cos \alpha$ из (6.4); получим

$$S_{yi} = I\varphi^* \left[\beta \text{sgn } \varphi_* \left(\cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \mu_0 \sin 2\alpha \right) \mp 1 \right] / (2z \cos \alpha).$$

Раскрыв неравенства $S_{yi} > 0$, учитывая, что для обоих вариантов перехода к скольжению $\varphi^* \text{sgn } \varphi < 0$ ($\varphi^* \text{sgn } \varphi_* > 0$), получим условие

$$\mu_0 < \lambda^0, \quad \lambda^0 = 2(\beta \cos^2 \alpha - \text{sgn } \varphi_*) / (\beta \sin 2\alpha).$$

Если теперь предположить, что $X_*^* < 0$, то, повторяя процедуру, имеем вместо

(6.6)

$$(6.8) \quad \mu_0 < X^*/Y^*,$$

а для вертикальных импульсов выражение

$$S_{yi} = I\varphi^* \left[\beta \text{sgn } \varphi_* \left(\cos^2 \alpha \mp (1/2) \mu_0 \sin 2\alpha \right) \mp 1 \right] / (2z \cos \alpha).$$

Из неравенств $S_{yi} > 0$ теперь получим

$$2(-\beta \cos^2 \alpha + \text{sgn } \varphi_*) / (\beta \sin 2\alpha) < \mu_0 < 2(\beta \cos^2 \alpha + \text{sgn } \varphi_*) / (\beta \sin 2\alpha) \equiv \lambda^{00}.$$

Для реальных значений α и β левое неравенство выполняется автоматически и достаточно записать $\mu_0 < \lambda^{00}$. Так как перед ударом всегда $Y^* < 0$, а $\mu_0 > 0$, то неравенства (6.6), (6.8) выполняются лишь при условии $\text{sgn } X^* = \text{sgn } X_*^*$. Это позволяет обобщить результаты в виде

$$(6.9) \quad \mu_0 < |X^*/Y^*|, \quad \mu_0 < \kappa = 2(\beta \cos^2 \alpha - \text{sgn } X^* \text{sgn } \varphi_*) / (\beta \sin 2\alpha),$$

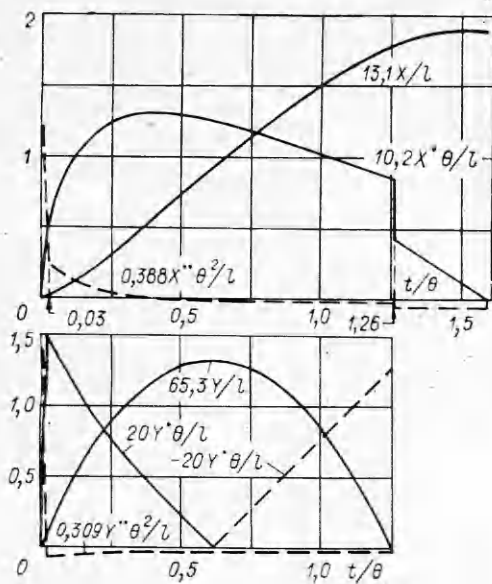
причем, как и выше, знак величины φ_* противоположен знаку угла φ перед ударом, а скорость после удара с переходом на форму 3 определяется выражением (6.5), в котором $\text{sgn } X_*^*$ надлежит заменить на $\text{sgn } X^*$.

При невыполнении условий (6.9) тело прекратит движение. Потеря устойчивости фиксируется выполнением условия $|\gamma| > \pi/2$.

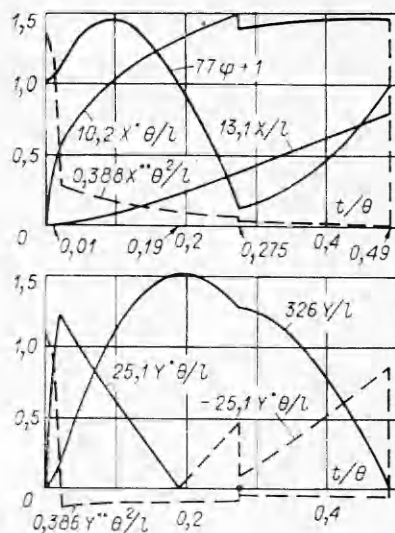
Сформулированная задача запрограммирована для ЕС ЭВМ. Интегрирование систем уравнений ведется методом Рунге — Кутты.

7. Приводятся примеры расчета движения тела в форме параллелепипеда, нагруженного ударной волной с параметрами $\Delta p_\phi = 0,1$ МПа, длительность положительной фазы скоростного напора $\theta = 0,065$ с. Параметры волны ($\Delta p_{\text{сф}}$, $\Delta p_{\text{отр}}$, D_ϕ , $f(t/\theta)$) вполне определяются давлением Δp_ϕ [2]. Рассматривались две одинаковые по размерам модели параллелепипеда высотой l_y , длиной l_z , шириной (размер вдоль потока) B с опорами, обуславливающими расстояние H_0 от нижней грани модели до преграды: $B/l = 0,707$; $H_0/l = 0,156$; $l_y/l = 0,448$; $l^2/F_\delta = l_y l_z / (B l_z) = 0,633$; l^2 — площадь тела в плане. Центр инерции расположен на вертикальной оси симметрии и у тела 1 находится ниже, а у тела 2 — выше геометрического центра. Координаты центра инерции тела 1 $\alpha = 0,606$ рад, $z/l = 0,43$, а тела 2 $\alpha = 0,903$ рад, $z/l = 0,571$. Функции \hat{C} , $\alpha_{W.A.M}$ (см. п. 1) получены продувками моделей в аэродинамической трубе. Компоненты импульса фазы дифракции приняты по данным [5]: $K_W = S_W/S_* = 1,55$, $\gamma_A \equiv S_A/S_W = 0,55$, $\chi_0 = M_S/(l S_W) = 0,35$ для модели 1 и 0,14 для модели 2, $S_* = \frac{3B}{2D_\phi} (\Delta p_{\text{отр}} F_\delta + Q(0))$ — характерный импульс, D_ϕ — скорость фронта волны, $\Delta p_\phi l^2 / (mg) = 16,1$, $g\theta^2/l = 0,195$, $\mu_0 = 0,67$, $g = 9,81$ м/с². Параметр $\beta = mz^2/I = 3,24$ для модели 1 и 5,47 для модели 2.

На фиг. 3 приведены графики горизонтального и вертикального движения тела 1. Значительные градиенты ускорений наблюдаются в фазе дифракции, к концу которой вертикальное ускорение становится отрицательным. При $t/\theta \leq 0,03$ происходит вращение тела вокруг правой опоры (форма 2). При $0,03 < t/\theta \leq 1,26$ происходит скольжение с вращением (форма 1), а затем при соударении левой опоры с преградой вертикальная скорость исчезает, горизонтальная уменьшается в 2 раза и тело переходит к



Фиг. 3



Фиг. 4

скольжению при $\varphi = 0$ (форма 3). Максимум скорости $X_m^- \theta/l = 0,132$ достигается к моменту $t/\theta = 0,42$, т. е. торможение начинается задолго до окончания действия ударной волны. Максимум вертикального смещения центра инерции $Y_m/l = 0,02$ достигается к моменту времени $t/\theta = 0,61$. Полное торможение (остановка) происходит при $t/\theta = 1,6$, когда горизонтальное смещение достигло максимума $X_m/l = 0,146$.

На фиг. 4 даны параметры движения тела 2. Здесь в интервале $0 < t/\theta \leq 0,01$ тело движется по форме 2 ($\varphi > 0$), а затем теряет контакт с преградой (переход на форму 4), причем в момент $t/\theta = 0,19$ меняется знак угла φ . Удар о преграду при $\varphi < 0$, $t/\theta = 0,275$ приводит к падению скоростей и переходу на форму 2. Соударение второй опоры с преградой при $t/\theta = 0,49$, $X_m/l = 0,061$ вызывает остановку тела. Таким образом, изменение координаты центра инерции привело к существенному различию как в качественной картине смещений тел вблизи преграды, так и в количественных показателях параметров движения. В значительной степени это различие определилось изменением со смещением центра инерции момента импульса и аэродинамических сил относительно центра, а также реакций связей.

Расчеты проведены для варианта аппроксимации эффекта фазы дифракции согласно соотношениям п. 5.

8. Дадим оценку возможных смещений поверхности преграды, ограничивающей линейно-упругое полупространство с акустическим сопротивлением A_1 (например, грунт). Приняв граничное давление в виде $\Delta p(t) = \Delta p_\Phi (1 - t/\theta)^n$, имеем формулу для смещения $u(t)$ поверхности в одномерном приближении

$$U = u(t)A_1(n+1)/(\Delta p_\Phi \theta) = 1 - (1 - t/\theta)^{n+1} \quad (0 \leq t/\theta \leq 1), \quad U = 1 \quad (t/\theta \geq 1).$$

Максимум смещения к концу действия давления равен

$$u_m = \Delta p_\Phi \theta / [A_1(n+1)].$$

Приняв $A_1 = 1,6 \cdot 10^6$ кг/(м²·с) (грунт средней плотности), $\Delta p_\Phi = 0,1$ МПа, $\theta = 0,065$ с, $n = 2$, получим $u_m/l = 6,4 \cdot 10^{-3}$. Учитывая значения максимумов смещений, указанные в п. 7, приходим к выводу, что смещение поверхности является пренебрежимо малым, т. е. в данном случае для поверхности грунта допустима предпосылка как о твердой преграде.

Автор выражает глубокую благодарность Л. А. Бродецкой и Е. Г. Майоровой, разработавшим по данной задаче программу для ЭВМ.

Поступила 26 I 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. С. О действии длинных ударных волн на твердое тело. — ПМТФ, 1963, № 3.
2. Кестенбойм Х. С., Росляков Г. С., Чудов Л. А. Точечный взрыв. М.: Наука, 1974.
3. Королев А. С., Бошнятов Б. В., Друкер И. Г., Затолока В. В. Импульсные трубы в аэродинамических исследованиях. Новосибирск: Наука, 1978.

4. Мейер П. В., Котляревский В. А., Барабенев В. П., Мальков А. В. Тензосвесы.— БИ, 1968, № 3.
 5. Котляревский В. А., Зищенко Ж. Ф., Олехвер А. И., Тимохин В. И. Аэродинамические характеристики автомобилей.— Автомобильная промышленность, 1980, № 7.

УДК 534.222.2—662.215.4

ЛОКАЛЬНЫЙ РАЗОГРЕВ МАТЕРИАЛА В ОКРЕСТНОСТИ ПОРЫ ПРИ ЕЕ СХЛОПЫВАНИИ

А. В. АТТЕТКОВ, Л. Н. ВЛАСОВА, В. В. СЕЛИВАНОВ,
 В. С. СОЛОВЬЕВ

(Москва)

Локализация деформации в окрестности неоднородностей при высокоскоростном нагружении пористого вещества может приводить к возникновению локальных областей, для которых характерны большие градиенты скорости, вязкостные эффекты и значительные разогревы. На неравновесный характер тепловыделения при ударном сжатии пористых веществ указывалось в [1—3]. Экспериментальное подтверждение существования значительных температурных градиентов в окрестности пор при вязкопластическом течении вещества в процессе ударно-волнового нагружения можно найти в [4—6]. В [7—10] показана существенная зависимость неравновесной температуры контактов частиц пористого материала от величины его фракции при одинаковых условиях нагружения и начальной плотности. Существенное влияние размера частиц при ударно-волновом инициировании прессованного тротила на условия образования очагов локальных разогревов обнаружено в [11, 12].

Теоретический подход к описанию процесса изменения пористости при динамическом нагружении среды предложен в [13, 14] на основании исследования динамики деформирования сферической ячейки, соотношение между внутренним и внешним радиусом которой характеризует пористость вещества. Вязкопластический разогрев материала сферической ячейки в процессе схлопывания поры рассмотрен в [15—17].

В [15] изменение температуры получено из анализа изменения удельной внутренней энергии материала в предположении, что время тепловой релаксации значительно превышает время схлопывания поры. В [16, 17] температурные профили построены в результате решения нестационарного уравнения теплового баланса, однако анализ ограничен малыми значениями числа Рейнольдса (в области, соответствующей плавному сжатию поры до равновесного радиуса). Анализ характера кумуляции энергии и эффектов плавления в окрестности неоднородностей проведен в [18] исходя из характера распределения внутренней энергии.

В данной работе исследуются закономерности схлопывания поры в вязкопластическом материале и динамика разогрева материала в окрестности поры в процессе схлопывания. Показано влияние противодавления газа на характер деформирования последней. Получены соотношения, определяющие предельные значения максимально возможного разогрева материала вследствие вязкопластических диссипативных процессов.

Рассмотрим процесс схлопывания сферической поры под действием постоянного внешнего давления p . Пусть a и b — текущие значения радиусов поры и сферической ячейки. Материал ячейки принимается однородным, изотропным, несжимаемым, удовлетворяющим соотношениям вязкопластической среды.

Уравнения неразрывности и движения для случая центральной симметрии запишутся в виде

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{\partial}{\partial r}(r^2 v) = 0; \\ (2) \quad & \rho(\partial v / \partial t + v \partial v / \partial r) = \partial \sigma_r / \partial r + (2/r)(\sigma_r - \sigma_\theta), \end{aligned}$$

а определяющее уравнение вязкопластического материала имеет вид [17, 18]

$$(3) \quad \sigma_r - \sigma_\theta = \sigma_s + 2\eta(\partial v / \partial r - v/r).$$

Разогрев материала сферической ячейки при схлопывании поры описывается дифференциальным уравнением теплопроводности при наличии объемных источников тепловыделения

$$(4) \quad c\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\lambda}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) - 2\sigma_s \frac{v}{r} + 12\eta \left(\frac{v}{r} \right)^2,$$

где t — время; r — эйлерова координата; v — радиальная составляющая вектора скорости; σ_r и $\sigma_\theta = \sigma_\phi$ — компоненты тензора напряжений; T — температура; ρ , λ , c — плотность и коэффициенты теплопроводности и теплоемкости материала; σ_s — динамический предел текучести; η — коэффициент эффективной вязкости.