

нению со случаем, когда индуцированным магнитным полем пренебрегается, плотность плазмы меньше, а пикирование плотности у границы больше.

Картина распределения полного магнитного поля: сумма приложенного и индуцированного в струе и окружающем пространстве поля при $R_a = 50$ см показана на рис. 4. Видно, что наибольшее возмущение приложенного магнитного поля проявляется в плазменной струе и ее окрестности. На удалении ($r = 200$) возмущение магнитного поля незначительно. Для полного магнитного поля можно выделить три области с характерной для каждой из них картиной распределения:

1) начальный участок течения, где струя сильно расширяется; на нем происходит вытеснение приложенного магнитного поля из струи, что обусловлено большими значениями токов, особенно в приграничной области, которые протекают здесь;

2) средняя ($z = 150-350$) приосевая часть струи, где магнитное поле очень мало;

3) удаленная часть струи, где магнитное поле начинает активнее проникать в слабо расширяющуюся струю с более слабыми электрическими токами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев В. В. Динамика плазменной струи в магнитном поле.— М., 1989.— (Препр./Ин-т прикл. матем. им. М. В. Келдыша АН СССР).
2. Гуськов К. Г., Райзер Ю. П., Суржиков С. Т. Пространственные МГД-модели разлета плазмы в разреженную ионизированную среду, находящуюся в магнитном поле.— М., 1989.— (Препр./Ин-т пробл. механики АН СССР).
3. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика.— М.: Атомиздат, 1978.
4. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы.— М.: Атомиздат, 1963.— Вып. 1.
5. Sack Ch., Schamel H. Plasma expansion into vacuum — a hydrodynamic approach // Phys. Reports.— 1987.— V. 156, N 6.
6. Авдучевский В. С., Ашратов Э. А., Иванов А. В., Пирумов У. Г. Сверхзвуковые не-изобарические струи газа.— М.: Машиностроение, 1985.
7. Турчак Л. И. Основы численных методов.— М.: Наука, 1987.
8. Colgate S. A. The phenomenology of the mass motion of a high altitude nuclear explosion // J. Geophys. Research.— 1965.— V. 70, N 13.

г. Солнечногорск

Поступила 27/VII 1992 г.

УДК 537.21

Ю. П. Емец, Ю. В. Обносов, Ю. П. Онофрийчук

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СИЛЫ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕД ПРИ НАЛИЧИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КРУГОВОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

1. Введение. На поверхности диэлектрических тел, находящихся в электрическом поле, действуют механические силы. Они имеют электрическую природу и существуют, даже если отсутствуют свободные заряды. Причиной появления сил в этом случае выступают поляризационные явления. Эти силы пропорциональны градиенту диэлектрической проницаемости и квадрату напряженности электрического поля. Поэтому они заметно проявляются в тех областях, где претерпевает резкие изменения диэлектрическая проницаемость и возникают сильные электрические поля. Такие условия наиболее характерны для поверхностей кусочно-однородных материалов, имеющих изломы, разрывы и содержащих различные неоднородности.

© Ю. П. Емец, Ю. В. Обносов, Ю. П. Онофрийчук, 1993

В настоящей работе изучается распределение сил на плоской поверхности, разделяющей диэлектрические среды с различными свойствами, когда на граничной поверхности имеется включение. Рассматриваются, таким образом, силы, обусловленные поляризационными явлениями, в трехкомпонентной кусочно-однородной среде. Включение цилиндрической формы с круговым поперечным сечением расположено параллельно граничной поверхности, касаясь последней вдоль образующей цилиндра. Внешнее электрическое поле направлено поперечно к оси цилиндрического тела.

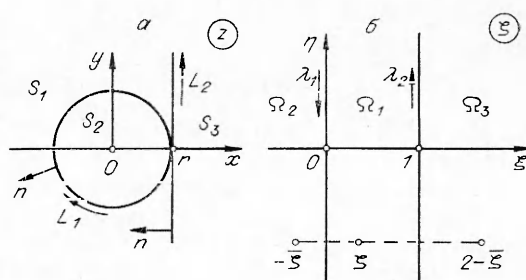


Рис. 1

Такая система характерна для ряда изоляционных конструкций и, кроме того, служит теоретической моделью для описания электрофизических процессов в некоторых устройствах (например, сепараторах) при действии электрического поля на дисперсные материалы.

Наличие включения на граничной поверхности приводит к местной неоднородности электрического поля, что, в свою очередь, вызывает неравномерное распределение сил. При этом включение испытывает действие интегральной силы, которая стремится «приклеить» включение к граничной поверхности либо «оторвать» его от последней. Направление действия интегральной силы зависит от соотношения между диэлектрическими проницаемостями всех материалов, образующих изучаемую систему.

Вычислению сил должен предшествовать расчет электрического поля. В рассматриваемом случае для решения полевой задачи могут быть использованы методы теории функций комплексного переменного. Таким путем удается получить точное решение краевой задачи и затем вычислить распределение сил в системе при общих предположениях относительно диэлектрических характеристик материалов.

2. Краевая задача. Пусть на граничной поверхности двух различных диэлектрических материалов имеется диэлектрическое включение, диэлектрическая проницаемость которого отлична от проницаемостей указанных материалов. Предполагается, что радиусы областей, занимаемых различными по электрическим свойствам материалами, значительно превосходят радиус цилиндрического тела. В этом случае для изучения электрических явлений в окрестности включения можно принять следующую расчетную модель. Диэлектрические материалы с разными проницаемостями занимают полупространства, разделенные плоскостью; включение с отличной диэлектрической проницаемостью имеет цилиндрическую форму и касается этой плоскости (рис. 1, а). Рассматривается, следовательно, трехкомпонентная кусочно-однородная среда, заполняющая все пространство. Вся эта система помещена в однородное электрическое поле, которое перпендикулярно оси цилиндрического включения. При этих условиях электрическое поле в системе является плоскопараллельным.

При отсутствии свободных зарядов в каждом из трех материалов стационарное электрическое поле удовлетворяет уравнениям

$$(2.1) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E},$$

где \mathbf{E} — вектор напряженности электрического поля; \mathbf{D} — вектор смещения электрического поля; ϵ — диэлектрическая проницаемость.

Двумерные уравнения (2.1) позволяют ввести голоморфные в плоскости переменных (x, y) функции

$$(2.2) \quad E(z) = E_x - iE_y, D(z) = D_x - iD_y \quad (z = x + iy).$$

Связь между векторами \mathbf{E} , \mathbf{D} и функциями (2.2) осуществляется операцией комплексного сопряжения, которая обозначается чертой:

$$\mathbf{E} = \overline{E(z)}, \quad \mathbf{D} = \overline{D(z)}.$$

В каждой из трех областей S_p ($p = 1, 2, 3$), которые заполняют материалы с различными электрическими характеристиками, диэлектрическая проницаемость ε_p сохраняет постоянное значение.

На границе разнородных диэлектриков при чисто электрическом контакте сохраняют непрерывность нормальная к граничной поверхности составляющая вектора \mathbf{D} и касательная составляющая вектора \mathbf{E} . С учетом последнего соотношения (2.1) эти условия запишем в виде

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} \{n(t) \varepsilon_1 E_1(t)\} &= \operatorname{Re} \{n(t) \varepsilon_m E_m(t)\}, \\ \operatorname{Im} \{n(t) E_1(t)\} &= \operatorname{Im} \{n(t) E_m(t)\}, \end{aligned} \quad t \in L_{m-1}, \quad m = 2, 3.$$

Здесь L_1 и L_2 — ориентированные граничные контуры, разделяющие плоскость z на области S_p (рис. 1, а); $n(t)$ — единичная нормаль:

$$(2.4) \quad n(t) = t/r, \quad t \in L_1; \quad n(t) = -1, \quad t \in L_2$$

(r — радиус кругового включения).

Внешнее электрическое поле задано своим значением в бесконечно удаленной точке (если стремиться к ней из области S_1)

$$(2.5) \quad E_1(\infty) = E_0 - E_{0x} - iE_{0y} - \text{const.}$$

Если же переход в бесконечно удаленную точку осуществляется из области S_3 , то

$$(2.6) \quad E_3(\infty) = \frac{1}{2\varepsilon_3} [(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) E_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \overline{E_0}].$$

Выражение (2.6) следует из соотношений (2.3), (2.4) при $m = 3$ с учетом условия (2.5).

Таким образом, для нахождения функции $E(z) = \{E_1(z), E_2(z), E_3(z)\}$ пришли к краевой задаче (2.3), (2.4) и одному из двух дополнительных эквивалентных условий (2.5) или (2.6). Исходя из физических соображений, в точке $z = r$ у функции $E(z)$ можно допустить наличие интегрируемой особенности.

Граничные условия (2.3) с использованием (2.4) перепишем в развернутой форме

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 E_1(t) + \varepsilon_1 \left(\frac{r}{t}\right)^2 \overline{E_1(t)} &= \varepsilon_2 E_2(t) + \varepsilon_2 \left(\frac{r}{t}\right)^2 \overline{E_2(t)}, & t \in L_1; \\ E_1(t) - \left(\frac{r}{t}\right)^2 \overline{E_1(t)} &= E_2(t) - \left(\frac{r}{t}\right)^2 \overline{E_2(t)}, \\ \varepsilon_1 E_1(t) + \varepsilon_1 \overline{E_1(t)} &= \varepsilon_3 E_3(t) + \varepsilon_3 \overline{E_3(t)}, & t \in L_2. \\ E_1(t) - \overline{E_1(t)} &= E_3(t) - \overline{E_3(t)}. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $\overline{t} = r^2/t$ при $t \in L_1$, и, следовательно, $\overline{n(t)} = r/t$.

Из каждой пары равенств (2.7) можно исключить одну из функций, например $\overline{E_1(t)}$, тогда

$$(2.8) \quad \begin{aligned} 2\varepsilon_1 E_1(t) &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) E_2(t) - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \left(\frac{r}{t}\right)^2 \overline{E_2(t)}, \quad t \in L_1; \\ 2\varepsilon_1 E_1(t) &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) E_3(t) - (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \overline{E_3(t)}, \quad t \in L_2. \end{aligned}$$

В дальнейших вычислениях удобно оперировать относительными величинами диэлектрической проницаемости, определенными следующим образом:

$$(2.9) \quad \Delta_{1m} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_m}{\varepsilon_1 + \varepsilon_m}, \quad -1 < \Delta_{1m} < 1 \quad (m = 2, 3).$$

С учетом формул (2.9) граничные соотношения (2.8) записываются в эквивалентной форме

$$(2.10) \quad (1 + \Delta_{12}) E_1(t) = E_2(t) - \Delta_{12} \left(\frac{r}{t}\right)^2 \overline{E_2(t)}, \quad t \in L_1;$$

$$(1 + \Delta_{13}) E_1(t) = E_3(t) - \Delta_{13} \overline{E_3(t)}, \quad t \in L_2,$$

а условие в бесконечно удаленной точке (2.5) или (2.6) принимает вид

$$(2.11) \quad E_1(\infty) = E_0 \quad \text{или} \quad E_3(\infty) = \frac{E_0 + \Delta_{13} \overline{E_0}}{1 - \Delta_{13}}.$$

Таким образом, проблема расчета электрического поля в рассматриваемой неоднородной системе сводится к решению задачи (2.10), (2.11), которая является частным случаем обобщенной краевой задачи Римана (в последнее время эту задачу чаще называют задачей R -линейного сопряжения).

3. Электрическое поле в системе. Сформулированная в предыдущем разделе краевая задача имеет точное решение. При его получении используются метод конформных отображений и принцип аналитического продолжения. Решение задачи (2.10), (2.11) изложено в приложении. Ниже приведен окончательный результат.

Общее решение. Относительно системы координат, зафиксированной на рис. 1, а, электрическое поле в соответствующих компонентах системы определяется следующими формулами:

$$(3.1) \quad E_1(z) = E_0 + r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{(\Delta_{12} \Delta_{13})^k}{k^2} \left[E_0 \left(z - \frac{k+1}{k} r \right)^{-2} - \frac{\overline{E_0}}{\Delta_{13}} \left(z - \frac{k-1}{k} r \right)^{-2} \right] \right\}, \quad |z| > r, \quad \text{Re } z < r;$$

$$E_2(z) = E_0 (1 + \Delta_{12}) \left\{ 1 + r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(\Delta_{12} \Delta_{13})^k}{k^2} \left(z - \frac{k+1}{k} r \right)^{-2} \right) \right\}, \quad |z| < r;$$

$$E_3(z) = \frac{E_0 + \Delta_{13} \overline{E_0}}{1 - \Delta_{13}} - \overline{E_0} (1 + \Delta_{13}) \frac{r^2}{\Delta_{13}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(\Delta_{12} \Delta_{13})^k}{k^2} \left(z - \frac{k-1}{k} r \right)^{-2} \right], \quad \text{Re } z > r.$$

Решение, как видно, представлено рядами, членами которых являются выражения плоских диполей. Одна серия диполей расположена на отрезке $[0, r)$ действительной оси, а другая — зеркально-симметрично ей относительно точки $x = r$ на отрезке $(r, 2r]$. С увеличением порядкового номера k координаты диполей сгущаются к точке $x = r$ (точка касания включения с границей раздела разнородных диэлектриков).

Частные решения. Из общих формул (3.1) можно получить некоторые простейшие решения для двухкомпонентных систем.

1. При выполнении условия $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$ ($\Delta_{13} = 0$) формулы (3.1) преобразуются к виду

$$E_1(z) = E_3(z) = E_0 - \frac{\overline{E_0} \Delta_{12} r^2}{z^2}, \quad E_2(z) = E_0 (1 + \Delta_{12}).$$

Это известное решение задачи об электрическом поле диэлектрического цилиндра с проницаемостью ε_2 , погруженного в неограниченную диэлектрическую среду, имеющую проницаемость ε_1 , во внешнем однородном электрическом поле E_0 .

2. Если положить $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ($\Delta_{12} = 0$), то из формул (3.1) следует решение

$$E_1(z) = E_0, \quad \text{Re } z < r; \quad E_3(z) = \frac{E_0 + \Delta_{13} \overline{E_0}}{1 - \Delta_{13}}, \quad \text{Re } z > r.$$

Эти выражения определяют однородное электрическое поле в среде, состоящей из двух диэлектрических материалов, которые заполняют полупространства, разделенные плоскостью. Приведенные выражения совпадают, как и должно быть, с соотношениями (2.11).

Приближенные решения. Моменты диполей в формулах (3.1) содержат параметры $(\Delta_{12}\Delta_{13})^k$ и $1/k^2$, которые с ростом k резко уменьшаются по абсолютной величине. Поэтому члены дипольных рядов, входящих в формулы (3.1), быстро убывают с увеличением порядка. В практических расчетах это позволяет удерживать в рядах небольшое число членов. Достигаемую при этом точность вычислений можно оценить следующим образом.

Пусть $E_l(z) = E_{lm}(z) + Q_{lm}(z)$, $l = 1, 3$, где $E_{lm}(z)$ — отрезок соответствующего ряда (3.1), объединяющий первые его m членов. Тогда для остаточных членов $Q_{lm}(z)$ в окрестности $|z - r| < r$ справедливы точные оценки

$$(3.2) \quad \begin{aligned} |Q_{1l}(z)| &\leq |E_0| \frac{|\Delta_{12}|^{l+1} |\Delta_{13}|^l (1 + |\Delta_{13}|)}{1 - |\Delta_{12}\Delta_{13}|}, \\ |Q_{2l}(z)| &\leq |E_0| \frac{|\Delta_{12}\Delta_{13}|^{l+1} (1 + \Delta_{12})}{1 - |\Delta_{12}\Delta_{13}|}, \\ |Q_{3l}(z)| &\leq |E_0| \frac{|\Delta_{12}|^{l+1} |\Delta_{13}|^l (1 + \Delta_{13})}{1 - |\Delta_{12}\Delta_{13}|}, \quad |z - r| < r. \end{aligned}$$

Вне указанной окрестности точки $z = r$ несколько более грубые оценки имеют вид

$$(3.3) \quad \begin{aligned} |Q_{1l}(z)| &< |E_0| \left(1 + \frac{\frac{1}{3}}{|\Delta_{13}|}\right) |\Delta_{12}\Delta_{13}|^{l+1} \delta, \\ |Q_{2l}(z)| &< |E_0| (1 + \Delta_{12}) |\Delta_{12}\Delta_{13}|^{l+1} \delta, \\ |Q_{3l}(z)| &< |E_0| (1 + \Delta_{13}) |\Delta_{12}|^{l+1} |\Delta_{13}|^l \delta, \quad |z - r| \geq r. \end{aligned}$$

где

$$(3.4) \quad \delta = \min \left(\frac{1}{l}, \frac{1}{(l+1)^2 (1 - |\Delta_{12}\Delta_{13}|)} \right).$$

Для качественного анализа электрических процессов в системе (а иногда и для получения необходимых количественных соотношений) достаточно пользоваться первым приближением формул (3.1), которые учитывают диполи только в точках $z = 0$ и $z = 2r$:

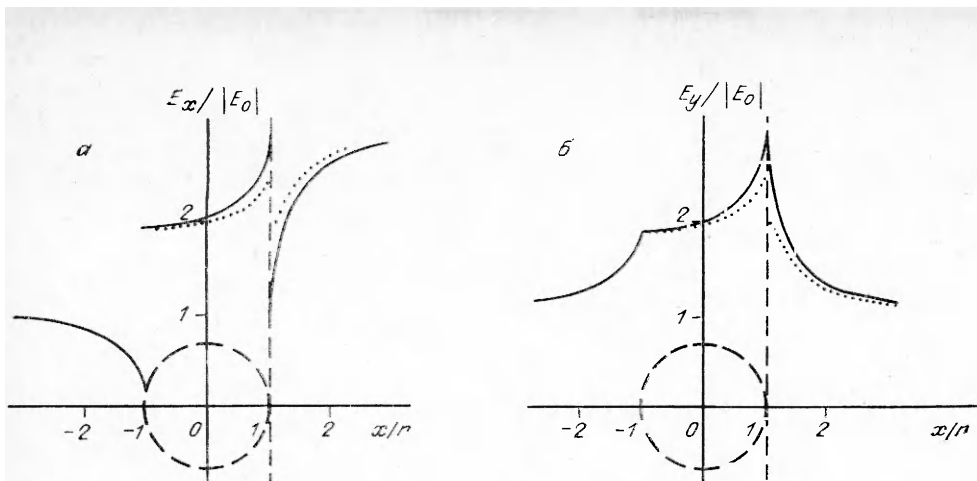
$$(3.5) \quad E_{11}(z) = E_0 - \frac{\bar{E}_0 \Delta_{12} r^2}{z^2} + \frac{E_0 \Delta_{12} \Delta_{13} r^2}{(z - 2r)^2}, \quad |z| > r, \quad \operatorname{Re} z < r;$$

$$E_{21}(z) = E_0 (1 + \Delta_{12}) \left[1 + \frac{\Delta_{12} \Delta_{13} r^2}{(z - 2r)^2} \right], \quad |z| < r;$$

$$E_{31}(z) = \frac{E_0 + \Delta_{13} \bar{E}_0}{1 - \Delta_{13}} - \bar{E}_0 \Delta_{12} (1 + \Delta_{13}) \frac{r^2}{z^2}, \quad \operatorname{Re} z > r.$$

Это приближение имеет точность, которая в соответствующей окрестности может быть определена по формулам (3.2) — (3.5) при $l = 1$.

Об особенностях формирования электрического поля в изучаемой системе можно судить по виду изменения электрического поля вдоль оси x . Соответствующие зависимости относительной величины напряженности электрического поля $E_{x,y}/|E_0|$ ($|E_0|$ — модуль функции напряженности внешнего электрического поля) приведены на рис. 2 для случая, когда относительные диэлектрические проницаемости неоднородной среды $\epsilon_r = \{\epsilon_{r1}, \epsilon_{r2}, \epsilon_{r3}\} = \{9, 1, 3\}$ (графики построены для относительных диэлектрических проницаемостей $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$, где ϵ_0 — электрическая постоянная). В рассмотренном примере функция напряженности внешнего электрического поля E_0 на рис. 2, а имеет только составляющую вдоль оси x



Р и с. 2

($\theta = 0$, θ — угол между E_0 и осью x), а на рис. 2, б — вдоль оси y ($\theta = \pi/2$). Для этих условий в силу структурной симметрии системы на оси x справедливы соотношения

$$\begin{aligned} E_x &= E_x(x), & E_y &= 0 & \text{при } \theta = 0; \\ E_x &= 0, & E_y &= E_y(x) & \text{при } \theta = \pi/2. \end{aligned}$$

Сплошные кривые на рис. 2 построены по точным формулам (3.1), точками представлены эти же зависимости, но вычисленные с помощью приближенных формул (3.5) (штриховыми линиями изображены граничные контуры системы).

При рассмотрении кривых на рис. 2 обращает на себя внимание резкое изменение напряженности электрического поля в окрестности точки касания цилиндрического тела с плоской границей диэлектриков. В физическом плане такой ход зависимостей напряженностей электрического поля объясняется неоднородной структурой среды в зоне контакта диэлектрических материалов с различными проницаемостями. С теоретической точки зрения особенности формирования электрического поля в этой зоне можно объяснить тем, что точка касания цилиндрического тела с плоской границей является точкой сгущения диполей, рядами которых представлено решение краевой задачи.

Для более точных расчетов в непосредственной окрестности точки $z = r$ необходимо, учитывая (3.2), брать большее число членов в рядах (3.1). Вне этой окрестности точные и приближенные значения в соответствии с формулами (3.3) и (3.4) практически совпадают.

Следует отметить еще одну характерную особенность формирования электрического поля в системе. Известно, что внутри отдельно взятого диэлектрического изотропного цилиндра, помещенного в поперечное однородное электрическое поле, поле также однородно. Эта тенденция проявляется и в данном случае — в большей части цилиндрического тела электрическое поле близко к однородному и только вблизи точки его касания с плоской границей оно становится существенно неоднородным.

4. Силы в электрическом поле. Согласно исходным условиям, в рассматриваемой неоднородной системе отсутствуют свободные заряды. Предполагается также, что в диэлектрических материалах не проявляются электрострикционные эффекты. В этом случае единственной причиной возникновения сил в системе являются поляризационные процессы. В неоднородных диэлектриках вектор плотности силы \mathbf{f} определяется формулой [1, 2]

$$(4.1) \quad \mathbf{f} = \frac{1}{2} E^2 \text{grad } \epsilon.$$

Если диэлектрическая проницаемость изменяется не непрерывно, а кусочно-однородно, как в рассматриваемой системе, то сила f действует только на поверхностях, разделяющих диэлектрические материалы с

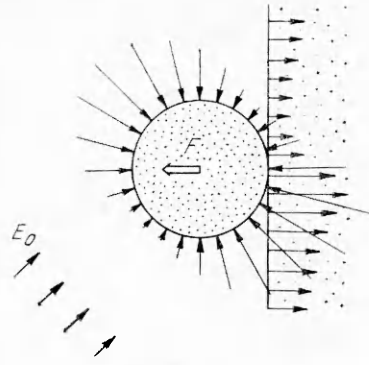


Рис. 3

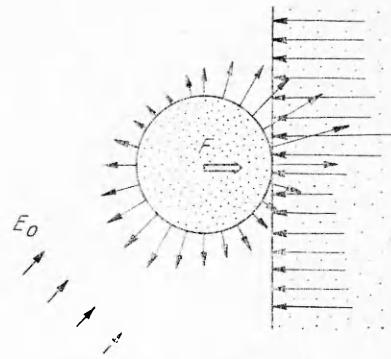


Рис. 4

различными проницаемостями. Вектор силы \mathbf{f} совпадает с направлением нормали к граничной поверхности, имея следующее выражение [2]:

$$(4.2) \quad \mathbf{f} = \frac{1}{2} \mathbf{n} (\epsilon_{(-)} - \epsilon_{(+)}) \left[E_{(-)i}^2 + \frac{\epsilon_{(-)}}{\epsilon_{(+)}} E_{(-)n}^2 \right] = \\ = \frac{1}{2} \mathbf{n} (\epsilon_{(-)} - \epsilon_{(+)}) \left[E_{(+)t}^2 + \frac{\epsilon_{(+)}}{\epsilon_{(-)}} E_{(+)n}^2 \right].$$

Здесь \mathbf{n} — вектор единичной нормали к граничному контуру, направленный в сторону той среды, параметры которой зафиксированы индексом (+); $\epsilon_{(+)}$ и $\epsilon_{(-)}$ — диэлектрические проницаемости смежных диэлектриков; $E_{(\pm)n}$ и $E_{(\pm)t}$ — нормальные и касательные составляющие вектора напряженности электрического поля на граничном контуре. Согласно формуле (4.2), для определения вектора \mathbf{f} необходимо знать вектор напряженности электрического поля на граничных контурах. Это значение поля известно из полученного решения (3.1); причем, для того чтобы перейти от функции $E(z)$, в терминах которой представлено решение, к вектору \mathbf{E} , фигурирующему в формуле (4.2), необходимо воспользоваться простыми соотношениями

$$E_n = \text{Re}(E\bar{n}) = \text{Re}(En) = (En + \bar{E}\bar{n})/2, \\ E_t = -\text{Im}(E\bar{n}) = \text{Im}(En) = (En - \bar{E}\bar{n})/2i,$$

где n — единичная нормаль, а черта, как и прежде, обозначает комплексное сопряжение.

Для иллюстрации характера действия сил в системе на рис. 3 и 4 представлены результаты вычисления распределения плотности сил на граничных контурах, когда диэлектрические проницаемости материалов $\epsilon_r = \{9, 1, 3\}$ и $\epsilon_r = \{1, 5, 9\}$, а функция E_0 имеет аргумент $\theta = \pi/4$. Эпюры векторов плотности сил изображены на рисунках для относительных величин

$$(4.3) \quad f_* = f/f_0, \quad f_0 = \epsilon_0 |F_0|^2.$$

В зависимости от соотношения между диэлектрическими проницаемостями включения ϵ_2 и окружающей его среды ϵ_1 на включение действуют силы давления (при $\epsilon_1 > \epsilon_2$, рис. 3) и растяжения (при $\epsilon_1 < \epsilon_2$, рис. 4). Эти силы, как видно, стремятся вытянуть включение вдоль направления вектора напряженности внешнего электрического поля.

Неравномерность распределения плотности сил f на поверхности включения, вызванная наличием плоской границы диэлектрика, приводит к появлению интегральной силы

$$(4.4) \quad F = \int_0^{2\pi} f_* d\theta,$$

где сила f_* определена формулами (4.2) и (4.3).

Во всех случаях (при произвольной ориентации внешнего электрического поля в системе и произвольных диэлектрических параметрах неоднородной среды) сила F направлена нормально к плоской границе разнородных диэлектриков с положительным или отрицательным знаком. Если выполняется неравенство $\epsilon_1 > \epsilon_2$ (как на рис. 3), то интегральная сила действует на включение таким образом, чтобы оторвать его от плоской границы. Если же справедливо неравенство $\epsilon_1 < \epsilon_2$ (см. рис. 4), то сила F имеет направление, противоположное предыдущему случаю, и своим действием стремится закрепить включение у граничной поверхности.

Из анализа формул (3.1), (4.1) — (4.4) следует, что интегральная сила принимает тем большие значения, чем больше разница между диэлектрическими проницаемостями материалов, образующих неоднородную систему. Это подтверждается конкретными расчетами.

Рассмотренная неоднородная система моделирует электрические процессы в некоторых электрофизических установках. Реальные условия, близкие к расчетным, существуют, например, в системах, где твердые диэлектрики граничат с жидкими и газовыми средами, которые содержат примесные включения.

Благодаря аналитическому решению полевой задачи вопрос о вычислении сил упрощается и требует лишь выполнения однотипных алгебраических действий. Расчеты, проведенные с широкой вариацией всех параметров системы, позволили выявить общие особенности формирования сил. Они сводятся к следующему.

1. Вектор плотности сил \mathbf{f} на границе разнородных диэлектриков всегда направлен в сторону того диэлектрика, проницаемость которого меньше.

2. На поверхности включения силы распределяются таким образом, чтобы своим действием (давлением или растяжением) вытянуть включение вдоль направления вектора внешнего электрического поля E_0 .

3. Вектор интегральной силы F всегда направлен нормально к плоской границе диэлектрика (имея положительный или отрицательный знак) и не зависит от направления вектора внешнего электрического поля E_0 .

4. Вектор интегральной силы F всегда направлен противоположно вектору плотности сил \mathbf{f} на плоской границе диэлектрических материалов.

5. Интегральная сила F тем больше, чем большие значения принимают относительные параметры Δ_{12} и Δ_{13} .

Следует отметить, что утверждения 1 и 2 вытекают из общих физических представлений; в частности, они усматриваются из формулы (4.2). Особенности действия интегральной силы не столь очевидны и для своего определения требуют полного расчета электрического поля в системе и последующего вычисления распределения плотности сил на граничных контурах.

Приложение. Ниже дается точное решение краевой задачи (2.10). (2.11). В результате рассчитывается электрическое поле в рассматриваемой системе. Для решения привлекаются метод конформных отображений и принцип аналитического продолжения. В результате задача сводится к одному функциональному уравнению. Последнее удается решить в замкнутой форме, что и позволяет получить явные значения искомого поля во всех компонентах системы.

С помощью дробно-линейной функции

$$(П.1) \quad z = T(\zeta) = r \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \quad (\zeta = \xi + i\eta)$$

плоскость z отображается на плоскость ζ . При этом контуры L_1 и L_2 переходят в прямые $\lambda_1 = \{\zeta: \operatorname{Re} \zeta = 0\}$ и $\lambda_2 = \{\zeta: \operatorname{Re} \zeta = 1\}$ соответственно, а область S_p отображается на область Ω_p ($p = 1, 2, 3$), как показано на рис. 1.

Отображение, обратное (П.1), осуществляется функцией

$$(П.2) \quad \zeta = T^{-1}(z) = \frac{z+r}{z-r}.$$

Для функции $f(\zeta) = E(T(\zeta))$ граничные соотношения (2.10) принимают вид

$$(П.3) \quad \begin{aligned} (1 + \Delta_{12}) f_1(\tau) &= f_2(\tau) - \Delta_{12} \left(\frac{r}{T(\tau)} \right)^2 \overline{f_2(\tau)}, \quad \tau \in \lambda_1; \\ (1 + \Delta_{13}) f_1(\tau) &= f_3(\tau) - \Delta_{13} \overline{f_3(\tau)}, \quad \tau \in \lambda_2. \end{aligned}$$

Вместе с граничными условиями должно учитываться одно из равенств

$$(П.4) \quad f_1(1) = E_0, \quad f_3(1) = \frac{E_0 + \Delta_{13} \overline{E_0}}{1 - \Delta_{13}}.$$

Последние вытекают из (2.11) и являются следствием друг друга и второго равенства (П.3). Решение задачи (П.3), (П.4) надо отыскивать в классе функций, имеющих в бесконечно удаленной точке $(T^{-1}(r) = \infty)$ разве лишь интегрируемые особенности.

Для функции $f_1(\zeta)$ справедливо представление

$$(П.5) \quad f_1(\zeta) = f_1^+(\zeta) + f_1^-(\zeta),$$

где функция $f_1^+(\zeta)$ ($f_1^-(\zeta)$) голоморфна в полуплоскости $\text{Re } \zeta < 1$ ($\text{Re } \zeta > 0$). Для однозначности представления (П.5) (с учетом (П.4)) принимается

$$(П.6) \quad f_1^+(1) = 0, \quad f_1^-(1) = E_0.$$

С помощью (П.5) соотношения (П.3) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} (1 + \Delta_{12}) f_1^+(\tau) - f_2(\tau) &= -\Delta_{12} \left(\frac{r}{T(\tau)} \right)^2 \overline{f_2(\tau)} - (1 + \Delta_{12}) f_1^-(\tau), \quad \tau \in \lambda_1; \\ (1 + \Delta_{13}) f_1^-(\tau) - f_3(\tau) &= -\Delta_{13} \overline{f_3(\tau)} - (1 + \Delta_{13}) f_1^+(\tau), \quad \tau \in \lambda_2. \end{aligned}$$

Отсюда в соответствии с принципом аналитического продолжения по непрерывности можно утверждать, что функции

$$(П.7) \quad \begin{aligned} \Phi(\zeta) &= \begin{cases} (1 + \Delta_{12}) f_1^+(\zeta) - f_2(\zeta), & \text{Re } \zeta \leq 0; \\ -(1 + \Delta_{12}) f_1^-(\zeta) - \Delta_{12} \left(\frac{r}{T(\zeta)} \right)^2 \overline{f_2(-\bar{\zeta})}, & \text{Re } \zeta \geq 0, \end{cases} \\ \Psi(\zeta) &= \begin{cases} (1 + \Delta_{13}) f_1^-(\zeta) - f_3(\zeta), & \text{Re } \zeta \geq 1; \\ -(1 + \Delta_{13}) f_1^+(\zeta) - \Delta_{13} \overline{f_3(2 - \bar{\zeta})}, & \text{Re } \zeta \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

голоморфны в плоскости ζ , так как функция $r/T(\zeta) = (\zeta - 1)/(\zeta + 1)$ голоморфна при $\text{Re } z > 0$. В бесконечно удаленной точке функции (П.7) могли бы иметь разве лишь интегрируемые особенности, поэтому на основании теоремы Лиувилля

$$\Phi(\zeta) = C_1 = \text{const}, \quad \Psi(\zeta) = C_2 = \text{const}.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются подстановкой равенств (П.4), (П.6) в выражения (П.7), что приводит к следующему результату:

$$(П.8) \quad \Phi(\zeta) = -(1 + \Delta_{12}) E_0, \quad \Psi(\zeta) = -\Delta_{13} \frac{\overline{E_0} + \Delta_{13} E_0}{1 - \Delta_{13}}.$$

Из формул (П.1) и (П.8) можно получить две пары тождеств:

$$(П.9) \quad \begin{aligned} f_2(\zeta) - (1 + \Delta_{12}) f_1^+(\zeta) &= (1 + \Delta_{12}) E_0, \quad \text{Re } \zeta \leq 0; \\ (1 + \Delta_{12}) f_1^-(\zeta) + \Delta_{12} \left(\frac{r}{T(\zeta)} \right)^2 \overline{f_2(-\bar{\zeta})} &= (1 + \Delta_{12}) E_0, \quad \text{Re } \zeta \geq 0; \end{aligned}$$

$$f_3(\zeta) - (1 + \Delta_{13})f_1^-(\zeta) \equiv \Delta_{13} \frac{\bar{E}_0 + \Delta_{13}E_0}{1 - \Delta_{13}}, \quad \operatorname{Re} \zeta \geq 1;$$

$$\Delta_{13} \overline{f_3(2 - \bar{\zeta})} + (1 + \Delta_{13})f_1^+(\zeta) \equiv \Delta_{13} \frac{\bar{E}_0 + \Delta_{13}E_0}{1 - \Delta_{13}}, \quad \operatorname{Re} \zeta \leq 1.$$

В соответствии с формулами (П.5), (П.9) имеют место представления

$$\begin{aligned} \text{(П.10)} \quad f_1(\zeta) &= f_1^+(\zeta) + f_1^-(\zeta), \quad 0 < \operatorname{Re} \zeta < 1; \\ f_2(\zeta) &= (1 + \Delta_{12})f_1^+(\zeta) + (1 + \Delta_{12})E_0, \quad \operatorname{Re} \zeta < 0; \\ f_3(\zeta) &= (1 + \Delta_{13})f_1^-(\zeta) + \Delta_{13} \frac{\bar{E}_0 + \Delta_{13}E_0}{1 - \Delta_{13}}, \quad \operatorname{Re} \zeta > 1. \end{aligned}$$

Следовательно, для нахождения функций $f_p(\zeta)$ ($p = 1, 2, 3$) необходимо определить только две функции: $f_1^+(\zeta)$ и $f_1^-(\zeta)$.

Прежде всего исключим из соотношений (П.9) функции $f_2(\zeta)$ и $f_3(\zeta)$. Применение преобразования симметрии относительно прямых λ_1 и λ_2 соответственно в первой и второй паре тождеств (П.9) приводит их к виду

$$\begin{aligned} \text{(П.11)} \quad f_2(-\bar{\zeta}) - (1 + \Delta_{12})\overline{f_1^+(-\bar{\zeta})} &= (1 + \Delta_{12})\bar{E}_0, \quad \operatorname{Re} \zeta \geq 0; \\ (1 + \Delta_{12})f_1^-(\zeta) + \Delta_{12} \left(\frac{\zeta - 4}{\zeta + 4} \right)^2 \overline{f_2(-\bar{\zeta})} &= (1 + \Delta_{12})E_0, \quad \operatorname{Re} \zeta \geq 0; \\ f_3(\zeta) - (1 + \Delta_{13})f_1^-(\zeta) &= \Delta_{13} \frac{\bar{E}_0 + \Delta_{13}E_0}{1 - \Delta_{13}}, \quad \operatorname{Re} \zeta \geq 1, \\ \Delta_{13}f_3(\zeta) + (1 + \Delta_{13})\overline{f_1^+(2 - \bar{\zeta})} &= \Delta_{13} \frac{\bar{E}_0 + \Delta_{13}E_0}{1 - \Delta_{13}}, \quad \operatorname{Re} \zeta \geq 1. \end{aligned}$$

Из равенств (П.11) следует

$$\begin{aligned} \text{(П.12)} \quad f_1^-(\zeta) + \Delta_{12} \left(\frac{\zeta - 4}{\zeta + 4} \right)^2 \overline{f_1^+(-\bar{\zeta})} &= E_0 - \Delta_{12} \left(\frac{\zeta - 4}{\zeta + 4} \right)^2 \bar{E}_0, \quad \operatorname{Re} \zeta \geq 0; \\ \Delta_{13}f_1^-(\zeta) + \overline{f_1^+(2 - \bar{\zeta})} &= \Delta_{13}E_0, \quad \operatorname{Re} \zeta \geq 1. \end{aligned}$$

Исключая из (П.12) функцию $f_1^-(\zeta)$, получим

$$\overline{f_1^+(2 - \bar{\zeta})} - \Delta_{12}\Delta_{13} \left(\frac{\zeta - 4}{\zeta + 4} \right)^2 \overline{f_1^+(-\bar{\zeta})} = \Delta_{12}\Delta_{13} \left(\frac{\zeta - 4}{\zeta + 4} \right)^2 \bar{E}_0, \quad \operatorname{Re} \zeta \geq 1.$$

Заменив теперь ζ на $2 - \bar{\zeta}$ и переходя к комплексно-сопряженным величинам, окончательно найдем

$$\text{(П.13)} \quad f_1^+(\zeta) = \Delta_{12}\Delta_{13} \left(\frac{\zeta - 4}{\zeta - 3} \right)^2 [E_0 + f_1^+(\zeta - 2)], \quad \operatorname{Re} \zeta \leq 1.$$

Выражение (П.13) представляет собой функциональное уравнение относительно неизвестной функции $f_1^+(\zeta)$.

Последовательная подстановка

$$f_1^+(\zeta - 2) = \Delta_{12}\Delta_{13} \left(\frac{\zeta - 3}{\zeta - 5} \right)^2 [E_0 + f_1^+(\zeta - 4)],$$

$$f_1^+(\zeta - 4) = \Delta_{12}\Delta_{13} \left(\frac{\zeta - 5}{\zeta - 7} \right)^2 [E_0 + f_1^+(\zeta - 6)] \quad \text{и т. д.}$$

в правую часть (П.13) позволяет на n -м шаге получить

$$\begin{aligned} \text{(П.14)} \quad f_1^+(\zeta) &= E_0(\zeta - 1)^2 \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{(\Delta_{12}\Delta_{13})^k}{(\zeta - 2k - 1)^2} \right\} + (\Delta_{12}\Delta_{13})^n \left(\frac{\zeta - 1}{\zeta - 2n - 1} \right)^2 f_1^+(\zeta - 2n), \\ &\operatorname{Re} z \leq 1. \end{aligned}$$

Последний член в правой части равенства (П.14) при неограниченном увеличении n стремится к нулю. Действительно, из второго равенства (П.10) следует, что в бесконечно удаленной точке u функции $f_1^+(\zeta)$ интегрируемая особенность, значит, для достаточно большого n справедлива оценка

$$|f_1^+(\zeta - 2n)| < |\zeta - 2n|^\alpha,$$

где $\alpha < 1$, поэтому для $\operatorname{Re} z \leq 1$

$$\left| (\Delta_{12}\Delta_{13})^n \left(\frac{\zeta - 1}{\zeta - 2n - 1} \right)^2 f_1^+(\zeta - 2n) \right| < |\Delta_{12}\Delta_{13}|^n \frac{|\zeta - 1|^2 |\zeta - 2n|^\alpha}{|\zeta - 1 - 2n|^2} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ и любом конечном значении ζ . Следовательно, переход к пределу $n \rightarrow \infty$ в выражении (П.14) приводит к представлению

$$(П.15) \quad f_1^+(\zeta) = E_0 (\zeta - 1)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\Delta_{12}\Delta_{13})^k}{(\zeta - 2k - 1)^2}, \quad \operatorname{Re} z \leq 1.$$

Поскольку ряд (П.15) для указанных значений ζ мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\Delta_{12}\Delta_{13})^k}{(2k)^2},$$

то тем самым найдена одна из двух искомых функций.

Вторая неизвестная функция $f_1^-(\zeta)$ определяется из второго соотношения (П.12). Подстановка в это соотношение выражения (П.15) дает

$$(П.16) \quad f_1^-(\zeta) = E_0 - \frac{E_0}{\Delta_{13}} (\zeta - 1)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\Delta_{12}\Delta_{13})^k}{(\zeta + 2k - 1)^2}, \quad \operatorname{Re} z \geq 1.$$

Формулы (П.15), (П.16) и (П.10) позволяют записать явные выражения функций $f_p(\zeta)$, $p = 1, 2, 3$. Затем с помощью обратного отображения (П.2) находятся приведенные в п. 3 выражения для электрического поля (3.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Тамм И. Е. Основы теории электричества.— М.: Наука, 1976.
2. Durand E. Electrostatique. T. 3. Methodes de calcul dielectriques.— Paris: Masson, 1966.

г. Киев, г. Казань

Поступила 4/IV 1992 г.

УДК 533.952

П. И. Зубков

ГЕНЕРАЦИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ ПРИ ВОЗНИКНОВЕНИИ И РАЗВИТИИ СИЛОВЫХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ ПЛАЗМЫ

В предоставленном самому себе контуре с током электромагнитные силы действуют в направлении увеличения индуктивности. Это следствие общего принципа: система развивается в направлении уменьшения потенциальной энергии. Запасенная вначале в электромагнитном поле, она переходит во внутреннюю и кинетическую энергии движущихся проводников. Контур с током неустойчив по отношению к росту индуктивности.

© П. И. Зубков, 1993