

В. Н. Солодовников

## О НАПРЯЖЕНИЯХ В ПЛАСТИНЕ, УДЕРЖИВАЕМОЙ В РАВНОВЕСИИ ШТИФТОМ

Напряженное состояние пластин, соединяемых посредством болтов или штифтов, анализируется в нескольких работах. Например, в [1] рассматриваются бесконечные упругие ортотропные пластины с круглым отверстием, нагружаемые через вставленный в это отверстие штифт. Решение ищется для двух контактирующих упругих тел (пластины и штифта) в виде комплексных рядов Фурье. Показано, что влияние упругости штифта на напряжения в пластине несущественно. Исследуется также влияние параметров ортотропии пластины, трения и зазора между штифтом и краем пластины. Во всех рассмотренных случаях область контакта занимает менее половины края отверстия, максимальное окружное напряжение достигается на участке, где нет контакта, около точки схода пластины со штифта.

Напряжения около одиночного болта или штифта в пластинах конечных размеров вычислялись методом конечных элементов в [2—4]. В [2] найдено распределение напряжений в слоистом композите около отверстия, нагружаемого через упругий штифт. Определяется зона контакта. Радиальное давление на штифт отличается от синусоидального. В работах [3, 4], в которых штифт считается абсолютно жестким, краевые условия на краю отверстия не ищутся, а назначаются произвольно. Предполагается, что область контакта занимает половину края отверстия. В [3] на ней задается косинусоидально распределенное радиальное давление, в [4] в соответствии с иным, чем в [3], способом нагружения задаются нулевые радиальные смещения. Эксперименты, проведенные в [5, 6], в общем подтверждают характер распределения напряжений в пластине около штифта, найденный теоретически в [4]. Однако границы области контакта при этом не даются. Ненулевые радиальные напряжения, которые могут быть на краю отверстия только в области контакта, в [5] отмечены на половине, а в [6] — более чем на половине края отверстия.

В данной работе форма пластины (круглая) выбирается из-за удобства вычислений. Рассматривается способ нагружения, представляющий практический интерес. На внешнем краю пластины задаются условия одностороннего одноосного нагружения. Штифт считается неподвижным. Формулируется задача типа Синьорини с неизвестной областью контакта пластины со штифтом. Методом конечных элементов найдено напряженное и деформированное состояние пластины.

**1. Основные уравнения.** Рассматриваются плоские напряженные состояния в полярной системе координат. Выражения деформаций через смещения, уравнения равновесия и соотношения закона Гука принимаются в виде [7]

$$\begin{aligned} e_{11} &= u_{1,1}, \quad e_{22} = \frac{1}{r}(u_{2,2} + u_1), \quad e_{12} = \frac{1}{2r}(u_{1,2} + ru_{2,1} - u_2), \\ (r\sigma_{11})_{,1} + \sigma_{12,2} - \sigma_{22} + rp_1 &= 0, \\ \sigma_{22,2} + (r\sigma_{12})_{,1} + \sigma_{12} + rp_2 &= 0, \\ e_{11} &= \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}), \quad e_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}), \quad e_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12}. \end{aligned}$$

Здесь  $u_i$  — смещения,  $e_{ik}$  — деформации,  $\sigma_{ik}$  — напряжения,  $p_i$  — объемные силы ( $i, k = 1, 2$ ) в полярной системе координат  $(r, \theta)$ ;  $r$  — радиус;  $\theta$  — угол;  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Индексами 1, 2 помечены величины, относимые к осям координат  $r, \theta$ ; индексы 1, 2 после запятой означают частное дифференцирование по  $r, \theta$  соответственно. Интенсивность касательных напряжений

$$J = \left[ \frac{1}{3}(\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2) + \sigma_{12}^2 \right]^{1/2}.$$

Введем функционал

$$\begin{aligned} (1.1) \quad \Phi &= \iint_{\Omega} \left\{ \frac{E}{2(1-\nu^2)} [e_{11}^2 + 2\nu e_{11}e_{22} + e_{22}^2 + 2(1-\nu)e_{12}^2] - \right. \\ &\quad \left. - p_1 u_1 - p_2 u_2 \right\} r dr d\theta - \int_{\Gamma} [\sigma_{nn}(u_1 l_2 - u_2 l_1) + \sigma_{nl}(u_1 l_1 + u_2 l_2)] dl \end{aligned}$$

на области  $\Omega$ , занятой телом и ограниченной контуром  $\Gamma$ . Интегрирование по  $\Gamma$  осуществляется при расположении области  $\Omega$  слева от  $\Gamma$ ;  $\sigma_{nn}$ ,  $\sigma_{nl}$  — нормальное и касательное напряжения, определяемые по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_{nn} &= \sigma_{11}l_2^2 - 2\sigma_{12}l_1l_2 + \sigma_{22}l_1^2, \\ \sigma_{nl} &= (\sigma_{11} - \sigma_{22})l_1l_2 + \sigma_{12}(l_2^2 - l_1^2), \quad l_1 = dr/dl, \\ l_2 &= rd\theta/dl, \quad dl = [(dr)^2 + (rd\theta)^2]^{1/2}\end{aligned}$$

( $l_1$ ,  $l_2$  — компоненты единичного вектора, касательного к  $\Gamma$ ).

В данном функционале  $\Phi$  деформации следует выразить через смещения. Варьируются смещения. Значения напряжений  $\sigma_{nn}$  и  $\sigma_{nl}$ , стоящих под интегралом по контуру  $\Gamma$ , при варьировании  $\Phi$  фиксируются.

Из условия стационарности  $\Phi$  вытекают уравнения равновесия и выражения нормального и касательного напряжений на контуре  $\Gamma$  через смещения. При заданных краевых условиях из решения этих уравнений можно найти смещения, а по ним — и все другие искомые функции задачи.

**2. Постановка задачи.** Дана кольцевая упругая изотропная пластина с отношением внешнего радиуса к внутреннему  $R/\rho = 5$  (рис. 1). Внутри отверстия находится штифт того же радиуса  $\rho$ , что и радиус отверстия. На правой половине внешнего края пластины задаются условия одноосного нагружения вдоль оси  $x$  при напряжении  $\sigma_{xx} = S$  (на рис. 1 стрелками на краю пластины показаны векторы нагрузки), левая половина внешнего края не нагружена. Объемных сил нет ( $p_1 = p_2 = 0$ ). Штифт при нагружении не смещается. Деформацией штифта и трением между ним и краем пластины пренебрегаем.

Учитывая симметрию задачи относительно оси  $x$ , рассматриваем только верхнюю половину пластины (рис. 1) при следующих краевых условиях:

$$(2.1) \quad \begin{aligned}\sigma_{11} &= S\cos^2\theta, \quad \sigma_{12} = -S\sin\theta\cos\theta \text{ при} \\ r &= R, \quad 0 \leq \theta \leq 0,5\pi;\end{aligned}$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0 \text{ при } r = R, \quad 0,5\pi \leq \theta \leq \pi;$$

$$(2.2) \quad u_2 = 0, \quad \sigma_{12} = 0 \text{ при } \rho \leq r \leq R, \quad \theta = 0 \text{ и } \theta = \pi;$$

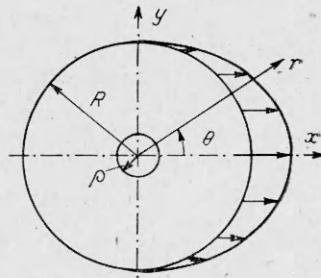
$$(2.3) \quad \begin{aligned}u_1 = 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{11} \leq 0 \text{ или } \sigma_{11} = \sigma_{12} = 0, \quad u_1 \geq 0 \\ \text{при } r = \rho, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.\end{aligned}$$

В краевых условиях (2.3) в точках контакта пластины со штифтом радиальные смещения  $u_1 = 0$ , край пластины должен прижиматься к штифту и потому радиальные напряжения  $\sigma_{11}$  не могут быть растягивающими ( $\sigma_{11} \leq 0$ ). В точках, где нет контакта, край пластины не нагружается ( $\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0$ ), расстояние от края пластины до центра штифта должно быть не меньше радиуса штифта, значит,  $u_1^2 + u_2^2 + 2\rho u_1 \geq 0$ , что при линеаризации задачи заменяется неравенством  $u_1 \geq 0$ . Имеем задачу типа Синьорини [8] с неизвестной областью контакта пластины со штифтом. Отыскание этой области облегчается простотой геометрии задачи. Естественно предположить, что область занимает некоторый отрезок  $r = \rho$ ,  $\theta_c \leq \theta \leq \pi$ . Тогда на внутреннем краю пластины получаем краевые условия вида

$$(2.4) \quad \begin{aligned}\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0 \text{ при } r = \rho, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_c; \\ u_1 = 0, \quad \sigma_{12} = 0 \text{ при } r = \rho, \quad \theta_c \leq \theta \leq \pi.\end{aligned}$$

В точке  $r = \rho$ ,  $\theta = \theta_c$  имеем  $\sigma_{11} = 0$ .

**3. Конечноеэлементная формулировка и решение задачи с фиксированной областью контакта.** Пусть область контакта пластины со штифтом известна. Тогда конечноэлементное решение задачи о равновесии пласти-



Р и с. 1

ны с краевыми условиями (2.1), (2.2), (2.4) находится следующим образом. Область  $\Omega$ , в которой ищется решение, разбивается на четырехугольные девятиузловые изопараметрические элементы [9] с аппроксимацией смещений в элементе квадратичными полиномами по каждой из переменных  $r$  и  $\theta$ . Конечноэлементные уравнения формулируются относительно смещений узлов на основе принципа минимума потенциальной энергии (1.1). Для вычисления интегралов по площади элемента и интегралов по стороне элемента, проходящей по контуру  $\Gamma$ , применяется трехточечная квадратурная формула Гаусса [9]. На границах между элементами удовлетворяются условия непрерывности смещений. В каждом узле сумма всех действующих на него сил (определяемых из принципа возможных перемещений [9]) полагается равной нулю.

Полная система конечноэлементных уравнений решается методом компактного исключения Гаусса с учетом симметричности и ленточности глобальной матрицы жесткости [9—11].

**4. Результаты счета.** Угловая координата  $\theta_c$  крайней точки области контакта пластины со штифтом находится методом деления отрезка пополам как корень радиального напряжения  $\sigma_{11}$ , вычисляемого при  $r = \rho$ ,  $\theta = \theta_c$  из решения задачи о равновесии пластины с краевыми условиями (2.1), (2.2), (2.4) и рассматриваемого как функция от  $\theta_c$ . В нашем решении последовательно проверялись значения  $\theta_c/\pi = 0,5; 0,52; 0,525; 0,5225$ . Найдено, что равенство  $\sigma_{11} = 0$  при  $r = \rho$ ,  $\theta = \theta_c$  выполняется с требуемой точностью, если  $\theta_c = 0,5225 \pi$ . Тогда удовлетворяются и условия (2.3).

Опишем результаты решения задачи о равновесии пластины с краевыми условиями (2.1), (2.2), (2.4), когда  $\theta_c = 0,5225 \pi$ . Коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ .

Далее в тексте и на рисунках даются безразмерные величины

$$r' = \frac{1}{\rho} r, (\sigma'_{11}, \sigma'_{22}, \sigma'_{12}, J') = \frac{1}{S} (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, J),$$

причем штрих у безразмерных величин для краткости опускается.

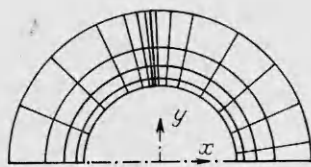
Пластина разбивается на четырехугольные девятиузловые изопараметрические лагранжевы элементы двумя семействами координатных линий: 1) радиальными линиями, начиная от  $\theta = 0$ , с интервалами по углу  $\theta$ , равными  $\pi (0,04; 0,08; 0,1; 0,1025; 0,1; 0,05; 0,03; 0,015; 0,01; 0,015; 0,03; 0,06; 0,12; 0,12; 0,1275)$  и 2) окружными линиями, начиная от края  $r = 1$ , с интервалами по радиусу  $r$ , равными  $0,1; 0,15; 0,25; 0,5; 1; 1; 1$ . На рис. 2 показано разбиение внутренней части пластины  $1 \leq r \leq 2$ . Размеры элементов уменьшаются при приближении к крайней точке области контакта  $r = 1$ ,  $\theta = \theta_c = 0,5225 \pi$ . Всего получается 105 элементов и 886 искомых переменных — компонент смещений.

На рис. 3 изображено деформированное состояние той части пластины, которая показана на рис. 2. Декартовы координаты  $x, y$  любого узла в деформированном состоянии на рис. 3 определяются по формулам

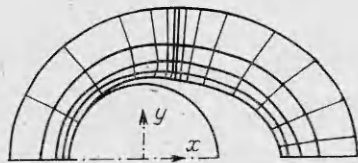
$$x = (r + u_1)\cos\theta - u_2\sin\theta, y = (r + u_1)\sin\theta + u_2\cos\theta.$$

Здесь  $r, \theta$  — начальные координаты узла; подставляются значения  $u_1, u_2$ , нормированные (т. е. умноженные на одно и то же для всех компонент смещений положительное число) так, что их максимальная абсолютная величина по всем узлам равна 1. Отметим, что вследствие линеаризации задачи отрезок края отверстия  $\theta_c \leq \theta \leq \pi$ , представленный как область контакта пластины со штифтом, на рис. 3 не лежит полностью на штифте (полукруг с центром в начале координат).

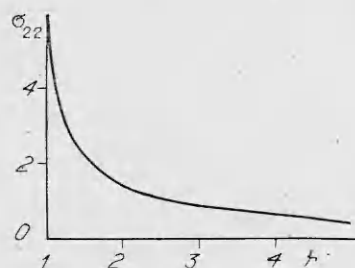
На рис. 4 сплошными кривыми даны графики напряжений на краю отверстия. Радиальное напряжение  $\sigma_{11}$  с принятой точностью равно нулю на участке  $\theta \leq \theta_c$ , где нет контакта пластины со штифтом, и отрицательное — на участке контакта  $\theta > \theta_c$ . Распределение  $\sigma_{11}$  на участке контакта заметно отличается от косинусоидального  $(20/\pi)\cos\theta$ , представленного на рис. 4 штрихпунктирной кривой. Окружное напряжение  $\sigma_{22}$  резко воз-



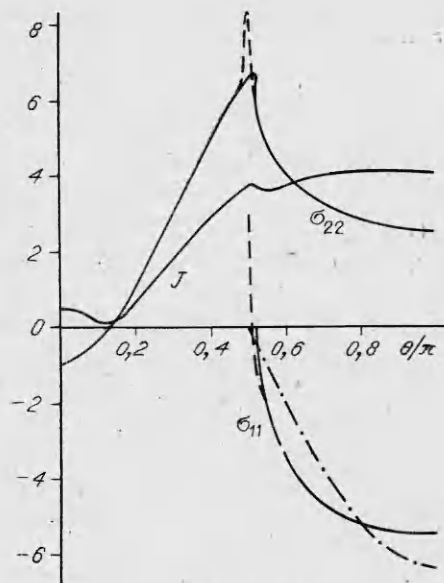
Р и с. 2



Р и с. 3



Р и с. 5



Р и с. 4

растает при  $\theta < \theta_c$  перед точкой схода пластины со штифта  $\theta = \theta_c$ . На участке контакта  $\theta > \theta_c$  величина  $\sigma_{22}$  уменьшается. Интенсивность касательных напряжений  $J$  принимает максимальное значение на участке контакта. Она не имеет таких пиков, как возрастание  $\sigma_{22}$  у точки схода пластины со штифта. Во всей пластине максимальные по абсолютной величине значения  $\sigma_{11} = -5,4696$ ,  $\sigma_{22} = 6,7639$  и  $J = 4,1073$  достигаются на краю отверстия.

На рис. 5 дан график окружного напряжения  $\sigma_{22}$  в радиальном сечении  $\theta = \theta_c$ .

Отметим, что задание большей области контакта ведет к увеличению максимальных значений напряжений. На рис. 4 штриховыми кривыми показаны изменения графиков напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ , получающиеся при решении задачи с краевыми условиями (2.1), (2.2), (2.4), если  $\theta_c = 0,5 \pi$ . Для области контакта меньшей длины, чем должно быть, напряжение  $\sigma_{11}$  в ее крайней точке принимает ненулевые отрицательные значения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hyer M. W., Klang E. C. Contact stresses pin-loaded orthotropic plates // Intern. J. Solids and Struct.— 1985.— V. 21, N 9.
2. Hong C. S. Stresses around pin-loaded hole in finite orthotropic laminates // Trans. Jap. Soc. Compos. Mater.— 1980.— V. 6, N 2.
3. Tsujimoto J., Wilson D. Elasto-plastic failure analysis of composite bolted joints // J. Compos. Mater.— 1986.— V. 20, N 3.
4. Agarwal B. L. Static strength prediction of bolted joint in composite material // AIAA J.— 1980.— V. 18, N 11.
5. Кожевников В. Ф., Виданов Н. А. Напряженное состояние пластины, нагружаемой через штифт // Пробл. прочности.— 1986.— № 10.
6. Hyer M. W., Liu D. Stresses in a quasi-isotropic pin-loaded connector using photoelasticity // Exper. Mech.— 1984.— V. 24, N 1.
7. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости.— М.: Наука, 1975.
8. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости.— М.: Мир, 1974.
9. Батз К. Ю., Вильсон Е. Л. Численные методы анализа и метод конечных элементов.— М.: Стройиздат, 1982.

10. Фадеев Д. К., Фадеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — М.; Л.: Физматгиз, 1963.
11. Солодовников В. Н. Изгиб консоли со встроенным концом // Динамика упруго-пластических систем. — Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1987. — Вып. 80.

г. Новосибирск

Поступила 30/VIII 1988 г.

УДК 517.946:531.36

К. С. Матвийчук

## О ТЕХНИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ТРУБОПРОВОДА С ТРАНСПОРТИРУЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В работе впервые решена задача о технической устойчивости на конечном, бесконечном промежутках времени, асимптотической технической устойчивости [1—18] пространственного движения магистрального трубопровода с прямолинейной осью при свободном или шарнирном его закреплении, через который протекает жидкость при заданном давлении [19—22]. Трубопровод имеет по всей длине переменную регулярную площадь сечения [21]. Жидкость считается идеальной. Изучаемая динамическая система описывается нелинейной краевой задачей, включающей систему трех дифференциальных уравнений в частных производных [23—25] с переменными коэффициентами, которые получены на основе применения теории плоских сечений длинных цилиндрических оболочек (пустотелых стержней) в предположении, что поперечные движения слабо влияют на продольные. Указаны достаточные условия технической устойчивости по заданной векторной мере, выраженные через параметры, содержащие заданные давление в жидкости и скорость жидкости на входе трубопровода. Заранее задаваемый как угодно большой конечный промежуток времени динамического поведения трубопровода зависит от малого параметра, который в свою очередь зависит от основных параметров системы, в том числе от внутреннего давления движущейся жидкости и ее скорости на входе трубы. Найдены условия, при которых заведомо наступает потеря устойчивости системы с фиксированным давлением внутри жидкости. Соответствующее критическое значение скорости жидкости на входе трубопровода выражено через основные параметры динамического процесса. Для решения задачи применен прямой метод Ляпунова [20, 25—27] совместно с методом сравнения [6—18, 28].

Проблема устойчивости магистральных трубопроводов имеет важное практическое значение, ей посвящены многие научные исследования [19—22, 27]. Так как такие задачи весьма сложны, то во многих работах прибегают к упрощающим предположениям и свойства устойчивости таких систем в большинстве случаев изучаются на основе применения различных методов непосредственного интегрирования. Однако нет сведений об исследованиях по технической устойчивости трубопроводов. Достаточные условия устойчивости в смысле Ляпунова сходных систем получены в [20, 27]. Результаты настоящей работы существенно отличаются от свойств устойчивости [20, 27] не только тем, что условия технической устойчивости рассматриваемого динамического процесса изучаются в пространственной нелинейной постановке и на любом конечном, наперед заданном промежутке времени, но и тем, что ограничения на начальные состояния процесса не зависят от условий мажорации последующих состояний процесса в течение заданного промежутка времени. Предложенный здесь подход можно применить для изучения технической устойчивости в более сложных задачах о динамике трубопроводов, не прибегая к упрощающим предположениям, например в случае искривленных с различными способами граничных закреплений трубопроводов, при наличии параметрических нагружений или турбулентности транспортируемой по трубопроводу жидкости и др. При этом необязательность условий отрицательной определенности полной производной функционала Ляпунова в силу исходной краевой задачи в данном подходе в отличие от устойчивости в смысле Ляпунова расширяет область значений на параметры исследуемого процесса. Метод сравнения позволяет полнее учесть факторы, влияющие на устойчивость.

**1. Нелинейная краевая задача о движении трубопровода с протекающей жидкостью.** Рассматриваем длинную гибкую трубу с протекающей по ней идеальной жидкостью при условиях, указанных ниже. Считаем, что трубопровод представляет однородное изотропное тело, как оболочка деформируется геометрически нелинейно [24]. Введем обозначения:  $m_1(s)$  — масса единицы длины трубы, зависящая от скалярной координаты  $s$  точек осевой линии трубы;  $m_2(s)$  — масса жидкости, отнесенная к единице длины трубы;  $\rho_1, \rho_2$  — плотности материала трубы и жидкости;  $F_1(s), F_2(s)$  — площади произвольного сечения трубы и отверстия в ней;