

УДК 536.21

**Моделирование теплопереноса
в композитных телах, армированных трубками
с движущимся в ламинарном режиме
жидким несжимаемым теплоносителем ***

А.П. Янковский

*Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

E-mail: nemirov@itam.nsc.ru

Получены уравнения, описывающие теплопроводность композитных тел, пространственно армированных системой гладких трубок, по которым в ламинарном режиме прокачивается несжимаемый жидкий теплоноситель. Сформулирована соответствующая краевая задача теплопроводности и проведен ее качественный анализ. Выполнены расчеты стационарных температурных полей в цилиндрических оболочках, спирально армированных трубками, по которым движется жидкий теплоноситель. Исследовано влияние на температурное поле параметров армирования, скорости и направления движения жидкости в трубках и размеров поперечных сечений трубок. Выявлено, что эти характеристики позволяют существенно изменить температурное поле и его градиенты в композитной конструкции, создавая широкие возможности для эффективного управления тепловыми полями.

Ключевые слова: теплопроводность, конструкции композитные, армирование трубками, теплоноситель жидкий, тепломассообмен, модель структурная.

Введение

В современных технических устройствах широко используются элементы для эффективного отвода или аккумуляции тепла. Применение однородных материалов в таких установках практически исчерпало возможности их совершенствования. Дальнейший технологический прогресс возможен на пути создания композитных конструкций на основе синтеза различных материалов, обеспечивающих дискретное, квазинепрерывное или дискретно-непрерывное распределение теплофизических характеристик и источников тепла. Реализовать подобные обстоятельства можно путем создания полиармированных конструкций, в которых теплофизические характеристики компонентов композиции существенно различны, а траектории армирования криволинейны [1–3 и др.]. При этом некоторые семейства арматуры могут быть изготовлены в виде трубок [4], заполненных движущимся жидким теплоносителем.

Использование элементов конструкций с внутренними каналами, по которым прокачивается жидкий теплоноситель, нашло применение для охлаждения зеркал технологических лазеров, ядерных реакторов [5], турбинных лопаток современных

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 14-01-90400-Укр_а).

высокотемпературных паровых установок [6] и пр. Наличие многочисленных каналов в таких конструкциях существенно снижает их прочностные и деформативные показатели, которые можно восстановить, если теплоноситель прокачивать по системе трубок, упакованных в основной материал связующей матрицы. При этом трубки играют не только роль каналов, но и роль армирующих элементов, которые можно укладывать по сложным траекториям. С технологической точки зрения создание таких трубчатых армированных конструкций не представляет серьезных затруднений [1, 3, 4, 7 и др.], но позволяет создавать каналы со сложными пространственно-криволинейными траекториями.

Изучение теплопроводности подобных систем находится в зачаточном состоянии и ограничивается в основном экспериментальными исследованиями или анализом процессов теплопереноса жидкости внутри отдельной трубы [5, 6, 8]. В работе [9] была предпринята попытка построить модель теплопереноса в композитных телах, армированных трубками, по которым прокачивается жидкий теплоноситель. Эта модель основывалась на активном использовании известного постоянного коэффициента теплоотдачи (в законе конвективного теплообмена Ньютона–Рихмана) между теплоносителем и стенками трубок. Однако известно, что коэффициент теплоотдачи не является постоянным и его локальное значение зависит от многих факторов [5, 6, 8, 10 и др.]: от абсолютных температур ядра течения теплоносителя и стенки, а также и от их разности; от физических свойств теплоносителя и стенки; от скорости течения; от режима течения (ламинарного или турбулентного); от степени шероховатости стенок и др. По этой причине в справочной литературе обычно приводятся средние значения коэффициентов теплоотдачи (чисел Нуссельта) для конкретных труб (заданного диаметра, длины, шероховатости и т.д. [6]). Так как локальный коэффициент теплоотдачи существенно изменяется по длине трубы, особенно на термическом входном участке [5, 6, 8, 10], то использование его среднего значения может привести к достаточно грубой оценке температуры трубок и композитной конструкции в целом, по крайней мере, в локальных зонах, соответствующих термическим входным участкам трубок. Такие грубые оценки температур неприемлемы, например, для конструкций, к которым предъявляются повышенные требования в отношении их размеростабильности (зеркала лазерных установок и т.п.).

Полученные экспериментально критериальные уравнения, определяющие локальные коэффициенты теплоотдачи (числа Нуссельта) для конкретных труб [8], в рассматриваемых композитных средах могут быть использованы только в случае развитого турбулентного течения теплоносителя по тепловым трубкам, так как при таком режиме течения критериальные соотношения не зависят от закона распределения температуры внутренней стенки трубки по ее длине [8]. В случае ламинарного течения теплоносителя по трубкам критериальные уравнения для локальных чисел Нуссельта получены лишь для некоторых частных случаев: при постоянстве теплового потока через стенку трубки вдоль ее траектории или степенного закона (в частности, постоянстве) распределения температуры внутренней стенки трубки по ее длине [8]. Однако в общем случае в исследуемых композитных средах (теплообменниках) эти условия не будут выполняться [9], поэтому такие критериальные соотношения становятся малоприменимыми для использования в рассматриваемом классе задач.

Так как армирующие трубки предположительно имеют малый внутренний диаметр (порядка миллиметров), то при прокачивании по ним вязких жидкостей режим течения последних будет, скорее всего, именно ламинарным. В связи с этим настоящее исследование посвящено разработке модели теплопереноса в композитных телах, армированных трубками, по которым в ламинарном режиме прокачивается жидкий несжимаемый теплоноситель без привлечения закона конвективного теплообмена Ньютона–Рихмана между теплоносителем и стенками трубок. Моделирование осуществляется на основе прямого решения сопряженных задач теплопроводности в композиции «связующее–трубки» и теплопереноса в жидком теплоносителе, движущемся по тепловым трубкам.

Постановка задачи

Рассмотрим твердое тело с внедренными в него K семействами трубок, заполненных движущимся жидким теплоносителем. Для удобства изложения условимся говорить, что тело армировано K семействами тепловых трубок, что позволяет перенести на исследуемую проблему терминологию, используемую в механике волокнистых композитных материалов.

Так как установить фактическое распределение тепловых потоков и температурного поля в теле, произвольно армированном несколькими семействами тепловых трубок, весьма затруднительно, то при выводе практически пригодных уравнений, описывающих теплоперенос в таких конструкциях, необходимо сделать некоторые допущения в виде исходных предпосылок, аналогичных тем, что использовались в работах [9, 11, 12].

1. Трубки всех семейств имеют постоянные поперечные сечения кольцевой формы (с технологической точки зрения это наиболее естественное допущение [4]).

2. Размеры поперечных сечений трубок всех семейств много меньше характерного размера представительного элемента композиции. Под представительным элементом понимается репрезентативная ячейка, структура которой многократно и периодически повторяется (возможно, с малыми вариациями) в конструкции. Представительная ячейка достаточно густо заполнена трубками [11] и ее размер много меньше характерного размера конструкции (теплообменника). При этих условиях армированный трубками материал можно рассматривать в некотором осредненном смысле как макроскопически квазиоднородное анизотропное тело. (К такому выводу приходят все исследователи, изучающие термомеханические свойства дисперсно армированных сред [11].)

3. Основной материал композиции (связующее) анизотропен и неоднороден (в частности, изотропен и однороден), материал трубок однороден и трансверсально-изотропен (главная ось анизотропии совпадает с продольным направлением трубки). Жидкость, заполняющая трубки, изотропна, однородна, несжимаема и нетермочувствительна. Связь между вектором теплового потока и градиентом температуры во всех фазах композиции подчиняется закону теплопроводности Фурье.

4. Коэффициенты теплопроводности материала трубок много больше коэффициента теплопроводности жидкости, их заполняющей.

5. Внутренние поверхности трубок считаются гладкими. Течение жидкости в трубках всех семейств является ламинарным; жидкость подается в трубки без закручивания, а профиль ее скорости в поперечном сечении подчиняется распределению по закону Пуазейля [10].

6. На границах между связующим и трубками имеет место идеальный тепловой контакт.

7. Осредненный тепловой поток через произвольно ориентированную элементарную площадку подсчитывается по правилу простой смеси тепловых потоков в фазах композиции (пропорционально относительному объемному содержанию их в представительном элементе композиции).

8. В пределах представительного элемента композиции траектории трубок каждого семейства приближенно считаются прямолинейными. (Тем самым из рассмотрения исключаются случаи, когда траектории армирования трубками существенно криволинейны в пределах представительного элемента, например, если трубки в пределах репрезентативной ячейки представляют собой змеевики [8].)

З а м е ч а н и е 1. В работах [9, 12 и др.] помимо допущений 2, 3, 6, 7 активно использовалось следующее предположение: теплообмен через внутренние поверхности трубок каждого семейства между стенками трубок и жидкостью, их заполняющей, осуществляется по закону конвективного теплообмена Ньютона. В настоящем исследовании эта гипотеза не используется.

Для вывода уравнения теплопроводности рассматриваемого тела, как и в работах [9, 12], выделим из него произвольный объем V , ограниченный поверхностью S . Тогда, используя обычный подход теории теплопроводности, для этого объема за промежуток времени от t_1 до t_2 (с учетом допущений 2, 3, 6, 7, которые позволяют использовать принцип взаимопроникающих континуумов) составим следующее уравнение теплового баланса:

$$\int_{t_1}^{t_2} D_t \left[\iiint_V \left(CT + \sum_k c_k \rho_k \omega_k T^{(k)} \right) dV \right] dt = - \int_{t_1}^{t_2} \left(\oint_S \mathbf{q} \mathbf{n} dS \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_V \left(AW_0 + \sum_k \Omega_k W_k \right) dV \right] dt, \quad (1)$$

где

$$C = c_0 \rho_0 A + \sum_k \Omega_k C_k R_k, \quad A = 1 - \sum_k (\omega_k + \Omega_k), \quad (2)$$

$$\mathbf{q} = a \mathbf{q}_* + \sum_k \omega_k \mathbf{q}_k, \quad a = 1 - \sum_k \omega_k = A + \sum_k \Omega_k;$$

$c_k, \rho_k, T^{(k)}$ — удельная теплоемкость, объемная плотность и температура жидкости, заполняющей трубки k -го семейства, T — осредненная температура композиции «связующее–трубки», C — приведенная теплоемкость композиции, c_0, C_k — удельные теплоемкости материалов связующего и трубок k -го семейства, ρ_0, R_k — объемные плотности материалов связующего и трубок k -го семейства, D_t — местная производная [13] по времени t , так как в целом тело рассматривается в эйлеровых координатах ($\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$), а жидкость, заполняющая трубки, движется; $W_0(t, \mathbf{x}), W_k(t, \mathbf{x})$ — плотности мощностей внутренних источников тепла в связующем и трубках k -го семейства (источники тепла в жидкости отсутствуют), Ω_k, ω_k — относительное объемное содержание материала трубок k -го семейства и полостей в них в представительном элементе композиции, A — относительное объемное содержание связующего материала в представительном элементе композиции, причем выполняются физические ограничения:

$$\omega_k \geq 0, \quad \Omega_k \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, K), \quad A > A_*, \quad (3)$$

A_* — наименьшее допустимое значение относительного объемного содержания связующего композиции (на практике обычно $A_* \approx 0,3$), \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к S , \mathbf{q} — вектор осредненного теплового потока в теплообменнике, \mathbf{q}_k — вектор теплового потока в жидкости, заполняющей трубки k -го семейства, \mathbf{q}_* — вектор осредненного теплового потока в композиции «связующее — трубки», суммирование здесь и далее производится по указанному индексу от 1 до K , если не указаны пределы.

Первое слагаемое в правой части равенства (1) определяет количество тепла, проходящего через S внутрь объема V за счет теплопроводности, второе слагаемое — количество тепла, возникающего в области V за время от t_1 до t_2 за счет внутренних источников тепла в композиции «связующее — трубки», а левая часть равенства (1) характеризует изменение количества тепла, запасенного в области V .

Используя правила применения местной производной к интегралам по областям, находящимся в покое и движении [13], преобразуем левую часть уравнения (1), после чего, применяя ко всем поверхностным интегралам формулу Гаусса с учетом (2), получим:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_V \left[\partial_t \left(CT + \sum_k c_k \rho_k \omega_k T^{(k)} \right) + \operatorname{div} \left(\sum_k c_k \rho_k \omega_k T^{(k)} \mathbf{v}_k \right) + \operatorname{div} \left(a \mathbf{q}_* + \sum_k \omega_k \mathbf{q}_k \right) - AW_0 - \sum_k \Omega_k W_k \right] dV \right\} dt = 0, \quad (4)$$

где \mathbf{v}_k — скорость течения жидкости в трубках k -го семейства, ∂_t — оператор частного дифференцирования по времени t .

Так как рассматриваемый промежуток времени (t_1, t_2) произволен, то из (4) следует, что в любой момент времени t для произвольного объема V имеет место равенство

$$\iiint_V \left[\partial_t \left(CT + \sum_k c_k \rho_k \omega_k T^{(k)} \right) + \operatorname{div} \left(\sum_k c_k \rho_k \omega_k T^{(k)} \mathbf{v}_k \right) + \operatorname{div} \left(a \mathbf{q}_* + \sum_k \omega_k \mathbf{q}_k \right) - AW_0 - \sum_k \Omega_k W_k \right] dV = 0. \quad (5)$$

Это выражение можно упростить, если использовать уравнение неразрывности жидкости k -го семейства, которое следует из принципа сохранения ее массы M_k и допущения 2 (здесь вновь используется принцип взаимопроникающих континуумов):

$$D_t M_k = D_t \iiint_V \rho_k \omega_k dV = \iiint_V \left[\partial_t (\rho_k \omega_k) + \operatorname{div} (\rho_k \omega_k \mathbf{v}_k) \right] dV = 0. \quad (6)$$

Равенство (5) с учетом (6) и допущения 3 принимает вид:

$$\iiint_V \left[C \partial_t T + \sum_k c_k \rho_k \omega_k \left(\partial_t T^{(k)} + \mathbf{v}_k \operatorname{grad} T^{(k)} \right) - \operatorname{div} (a \Lambda \operatorname{grad} T) + \sum_k \operatorname{div} (\omega_k \mathbf{q}_k) - AW_0 - \sum_k \Omega_k W_k \right] dV = 0, \quad (7)$$

где Λ — матрица (3×3) эффективных коэффициентов теплопроводности композиции «связующее–трубки».

Так как выделенный из тела объем V произволен, то из уравнения (7) формально следует, что в каждой точке тела (на макроуровне) должно иметь место равенство

$$C \partial_t T + \sum_k c_k \rho_k \omega_k \left(\partial_t T^{(k)} + \mathbf{v}_k \operatorname{grad} T^{(k)} \right) = \operatorname{div} (a \Lambda \operatorname{grad} T) + \sum_k \lambda_k \operatorname{div} (\omega_k \operatorname{grad} T^{(k)}) + AW_0 + \sum_k \Omega_k W_k, \quad (8)$$

где учтен закон теплопроводности Фурье для жидкости в трубках k -го семейства, λ_k — коэффициент теплопроводности жидкости k -го семейства.

Если температуры $T^{(k)}$ и скорости \mathbf{v}_k жидкости в трубках известны из каких-либо соображений, то уравнение (8) определяет осредненную температуру T композиции «связующее–трубки», причем оно содержит высшие производные второго порядка от T и $T^{(k)}$ по глобальным пространственным переменным x_1, x_2, x_3 . Однако в общем случае температуры $T^{(k)}$ неизвестны, поэтому для замыкания уравнения (8) относительно неизвестных функций $T, T^{(k)}$ ($1 \leq k \leq K$) необходимо добавить еще K уравнений. Эти уравнения получим из рассмотрения уравнений теплового баланса жидкостей, заполняющих трубки.

Выделим конкретную тепловую трубку k -го семейства. Согласно допущениям 1, 8, свяжем с этой трубкой локальную ортогональную систему координат $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$ так, чтобы ось $x_1^{(k)}$ была направлена вдоль траектории трубки, а оси $x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$ были перпендикулярны этой траектории (рис. 1). В глобальной системе координат x_1, x_2, x_3 направление армирования трубкой k -го семейства можно однозначно определить с помощью двух углов сферической системы координат (см. рис. 1): полярного расстояния θ_k и долготы φ_k ($1 \leq k \leq K$).

В силу допущений 2, 4 изменением температуры внутренней поверхности трубки в поперечном сечении можно пренебречь, т. е. в поперечном сечении температура трубки по внутреннему контуру (по периметру контакта с жидкостью) приближенно считается постоянной, но изменяется вдоль траектории трубки. Тогда, согласно гипотезам 4, 5, распределение температуры жидкости $T^{(k)}$ в трубке k -го семейства можно считать приближенно осесимметричным: $T^{(k)} = T^{(k)}(t, x_1^{(k)}, r)$, а уравнение теплового баланса в ней с учетом допущения 3 имеет вид [10]

$$\partial_r^2 T^{(k)} + r^{-1} \partial_r T^{(k)} = a_k^{-1} v_k(r) \partial_k T^{(k)} + D_k T^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (9)$$

где

$$a_k = \lambda_k / (c_k \rho_k) = \text{const}, \quad v_k(r) = 2\bar{v}_k \left[1 - (r/r_k)^2 \right], \quad (10)$$

$$D_k(\cdot) \equiv a_k^{-1} \partial_t(\cdot) - \partial_k^2(\cdot), \quad \partial_r(\cdot) \equiv \partial(\cdot) / \partial r, \quad \partial_k(\cdot) \equiv \partial(\cdot) / \partial x_1^{(k)},$$

$r_k = \text{const}$ — внутренний радиус трубки, v_k — скорость течения жидкости в трубке k -го семейства, распределенная по закону Пуазейля и параллельная траектории трубки, \bar{v}_k — средняя скорость жидкости по поперечному сечению (в силу допущений 1, 3 имеем $\bar{v}_k = \text{const}$, $1 \leq k \leq K$), r — полярный радиус, D_k — параболический оператор одномерной задачи теплопроводности.

Если в (9) принять $D_k \equiv 0$, то это уравнение с учетом (10) формально совпадет с уравнением в задаче Гретца–Нуссельта [10]. Принципиальное отличие от этой задачи заключается в том, что в настоящем исследовании температура T стенки не постоянна вдоль траектории трубки, а определяется, например, уравнением (8). Кроме того, в (9) учитывается продольная теплопроводность жидкости и в общем случае задача является нестационарной. Поэтому здесь нельзя использовать известное точное решение задачи Гретца–Нуссельта [10].

Для удобства последующего анализа целесообразно использовать не точное, а приближенное решение уравнения (9). В этом случае воспользуемся идеей метода начальных функций [12], совмещенного с методом дополнительных граничных условий [10]. Как показано в работе [10], например, для задачи Гретца–Нуссельта такой подход позволяет построить приближенное решение простой структуры с приемлемой для инженерного приложения точностью.

Согласно идее метода начальных функций [12], разложим функцию $T^{(k)}$ в уравнении (9) в ряд Маклорена по переменной r :

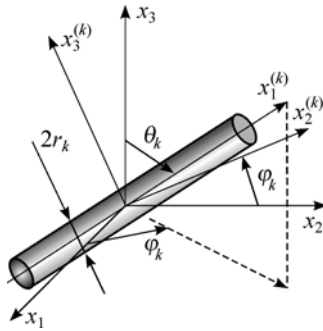


Рис. 1. Локальная система координат, связанная с трубкой k -го семейства.

$$T^{(k)}(t, x_1^{(k)}, r) = T_0^{(k)}(t, x_1^{(k)}) + \sum_{n=1}^{\infty} \partial_r^n T^{(k)}(t, x_1^{(k)}, 0) \frac{r^n}{n!}, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (11)$$

где $T_0^{(k)}(t, x_1^{(k)}) \equiv T^{(k)}(t, x_1^{(k)}, 0)$ — температура жидкости в точках, лежащих на оси трубки k -го семейства («начальная» функция).

Так как распределение температуры $T^{(k)}$ в трубке приближенно считается осесимметричным, то в выражении (11)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \partial_r^n T^{(k)}(t, x_1^{(k)}, r) = 0, \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (12)$$

Ограничиваясь частичной суммой ряда (11), с учетом (12) можно записать

$$T^{(k)}(t, x_1^{(k)}, r) = T_0^{(k)}(t, x_1^{(k)}) + \sum_{n=1}^N T_{2n}^{(k)}(t, x_1^{(k)}) (r/r_k)^{2n}, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (13)$$

где $T_0^{(k)}$, $T_{2n}^{(k)}$ — функции, подлежащие определению и зависящие только от одной пространственной переменной — от координаты вдоль траектории армирования $x_1^{(k)}$.

Выразим в (13) все функции $T_{2n}^{(k)}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) через $T_0^{(k)}$. С этой целью рассмотрим уравнение (9) с учетом (10) при $r \rightarrow 0$:

$$\left(\partial_r^2 T^{(k)} + r^{-1} \partial_r T^{(k)} \right) \Big|_{r \rightarrow 0} = 2\bar{v}_k a_k^{-1} \left(\partial_k T^{(k)} \right) \Big|_{r \rightarrow 0} + \left(D_k T^{(k)} \right) \Big|_{r \rightarrow 0}, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (14)$$

Второе слагаемое в левой части (14) в силу (12) (при $n = 1$) имеет неопределенность типа $0/0$, раскрывая которую по правилу Лопиталья, получим

$$2 \left(\partial_r^2 T^{(k)} \right) \Big|_{r \rightarrow 0} = 2\bar{v}_k a_k^{-1} \left(\partial_k T^{(k)} \right) \Big|_{r \rightarrow 0} + \left(D_k T^{(k)} \right) \Big|_{r \rightarrow 0}, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (15)$$

откуда с учетом (13) следует

$$T_2^{(k)}(t, x_1^{(k)}) = \frac{1}{4} r_k^2 L_k(T_0^{(k)}), \quad 1 \leq k \leq K, \quad (16)$$

где

$$L_k(\bullet) \equiv D_k(\bullet) + 2\bar{v}_k a_k^{-1} \partial_k(\bullet). \quad (17)$$

Таким образом, функцию $T_2^{(k)}$ удалось выразить через производные от начальной функции $T_0^{(k)}$.

Для определения функции $T_4^{(k)}$ в разложении (13) продифференцируем (9) с учетом (10) по r :

$$\begin{aligned} \partial_r^3 T^{(k)} + r^{-1} \partial_r^2 T^{(k)} - r^{-2} \partial_r T^{(k)} &= 2\bar{v}_k a_k^{-1} \left[1 - (r/r_k)^2 \right] \partial_k \left(\partial_r T^{(k)} \right) - \\ &- 4\bar{v}_k a_k^{-1} r_k^{-2} r \partial_k T^{(k)} + D_k \left(\partial_r T^{(k)} \right), \quad 1 \leq k \leq K. \end{aligned} \quad (18)$$

Рассмотрим в (18) предельный переход при $r \rightarrow 0$, тогда в силу (12) (при $n = 1$ и $n = 3$) получаем, что правая часть в (18) при $r \rightarrow 0$ стремится к нулю, а в левой части $\partial_r^3 T^{(k)} \rightarrow 0$, поэтому из (18) следует

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \partial_r^2 T^{(k)} - \frac{1}{r^2} \partial_r T^{(k)} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \partial_r^2 T^{(k)} - \frac{1}{2r} \partial_r^2 T^{(k)} \right) = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \partial_r^2 T^{(k)} \right) = 0. \quad (19)$$

Здесь во втором слагаемом неопределенность типа 0/0 раскрыта по правилу Лопиталья.

Продифференцируем (18) по r , получим

$$\begin{aligned} \partial_r^4 T^{(k)} + r^{-1} \partial_r^3 T^{(k)} - 2r^{-2} \partial_r^2 T^{(k)} + 2r^{-3} \partial_r T^{(k)} &= 2\bar{v}_k a_k^{-1} \left[1 - (r/r_k)^2 \right] \times \\ \times \partial_k \left(\partial_r^2 T^{(k)} \right) - 8\bar{v}_k a_k^{-1} r_k^{-2} r \partial_k \left(\partial_r T^{(k)} \right) - 4\bar{v}_k a_k^{-1} r_k^{-2} \partial_k T^{(k)} + D_k \left(\partial_r^2 T^{(k)} \right), & 1 \leq k \leq K. \end{aligned} \quad (20)$$

Рассмотрим в равенстве (20) предельный переход при $r \rightarrow 0$, тогда его правая часть, с учетом (13), (15), (16), стремится к соотношению

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ 2\bar{v}_k a_k^{-1} \left[1 - (r/r_k)^2 \right] \partial_k \left(\partial_r^2 T^{(k)} \right) - 8\bar{v}_k a_k^{-1} r_k^{-2} r \partial_k \left(\partial_r T^{(k)} \right) - \right. \\ \left. - 4\bar{v}_k a_k^{-1} r_k^{-2} \partial_k T^{(k)} + D_k \left(\partial_r^2 T^{(k)} \right) \right\} = \frac{1}{2} L_k^2 T_0^{(k)} - 4\bar{v}_k a_k^{-1} r_k^{-2} \partial_k T_0^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq K. \end{aligned} \quad (21)$$

Согласно (12), (19), во втором, третьем и четвертом слагаемых в левой части (20) при $r \rightarrow 0$ возникают неопределенности типа 0/0, раскрыв которые по правилу Лопиталья получим следующий предельный переход

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \partial_r^4 T^{(k)} + r^{-1} \partial_r^3 T^{(k)} - 2r^{-2} \partial_r^2 T^{(k)} + 2r^{-3} \partial_r T^{(k)} \right\} &= 2\partial_r^4 T^{(k)} \Big|_{r \rightarrow 0} - \\ - \frac{4}{3} \lim_{r \rightarrow 0} \left(r^{-2} \partial_r^2 T^{(k)} \right) &= 2\partial_r^4 T^{(k)} \Big|_{r \rightarrow 0} - \frac{4}{3} \lim_{r \rightarrow 0} \left(r^{-1} \partial_r^3 T^{(k)} - r^{-2} \partial_r^2 T^{(k)} \right) = \\ = 2\partial_r^4 T^{(k)} \Big|_{r \rightarrow 0} - \frac{4}{3} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\partial_r^4 T^{(k)} - r^{-2} \partial_r^2 T^{(k)} \right) &= \frac{2}{3} \partial_r^4 T^{(k)} \Big|_{r \rightarrow 0} + \frac{4}{3} \lim_{r \rightarrow 0} \left(r^{-2} \partial_r^2 T^{(k)} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Из цепочки равенств (22) выделим следующее:

$$2\partial_r^4 T^{(k)} \Big|_{r \rightarrow 0} - \frac{4}{3} \lim_{r \rightarrow 0} \left(r^{-2} \partial_r^2 T^{(k)} \right) = \frac{2}{3} \partial_r^4 T^{(k)} \Big|_{r \rightarrow 0} + \frac{4}{3} \lim_{r \rightarrow 0} \left(r^{-2} \partial_r^2 T^{(k)} \right), \quad (23)$$

откуда следует

$$\frac{4}{3} \lim_{r \rightarrow 0} \left(r^{-2} \partial_r^2 T^{(k)} \right) = \frac{2}{3} \partial_r^4 T^{(k)} \Big|_{r=0}, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (24)$$

Согласно (22), при $r \rightarrow 0$ левая часть в (20) совпадает с левой частью в (23), которая с учетом (24), (13) принимает вид

$$2\partial_r^4 T^{(k)} \Big|_{r=0} - \frac{4}{3} \lim_{r \rightarrow 0} \left(r^{-2} \partial_r^2 T^{(k)} \right) = \frac{4}{3} \partial_r^4 T^{(k)} \Big|_{r=0} = 32r_k^{-4} T_4^{(k)} \left(t, x_1^{(k)} \right). \quad (25)$$

Приравнявая (21) и (25), получим

$$T_4^{(k)} \left(t, x_1^{(k)} \right) = \frac{1}{64} r_k^4 \left(L_k^2 T_0^{(k)} - 8\bar{v}_k a_k^{-1} r_k^{-2} \partial_k T_0^{(k)} \right), \quad 1 \leq k \leq K. \quad (26)$$

Таким образом, соотношение (26) определяет функцию $T_4^{(k)} \left(t, x_1^{(k)} \right)$ через производные от начальной функции $T_0^{(k)} \left(t, x_1^{(k)} \right)$ (см. (10), (17)).

Дифференцируя (20) по r необходимое число раз и проводя рассуждения, аналогичные (21)–(25), можно получить выражения для функций $T_{2n}^{(k)}$ ($n = 3, 4, \dots, N$) в разложении (13) через производные от $T_0^{(k)}$. Согласно (16), (26), эти зависимости можно представить в виде:

$$T_{2n}^{(k)} \left(t, x_1^{(k)} \right) = \mathfrak{S}_k^{(n)} \left(T_0^{(k)} \left(t, x_1^{(k)} \right) \right), \quad 1 \leq n \leq N, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (27)$$

где $\mathfrak{Z}_k^{(n)}$ — дифференциальный оператор порядка n по времени t и порядка $2n$ по пространственной переменной $x_1^{(k)}$.

Подставив (27) в (13), получим выражение для температуры $T^{(k)}$ в трубке k -го семейства:

$$T^{(k)}(t, x_1^{(k)}, r) = \mathfrak{R}_k^{(N)}\left(r; T_0^{(k)}(t, x_1^{(k)})\right), \quad 1 \leq k \leq K, \quad (28)$$

где $\mathfrak{R}_k^{(N)}$ — линейный дифференциальный оператор порядка N по времени t и порядка $2N$ по пространственной переменной $x_1^{(k)}$ от начальной функции $T_0^{(k)}$, коэффициенты которого зависят от переменной r .

Для определения функции $T_0^{(k)}$ необходимо использовать основное граничное условие на внутренней стенке трубки k -го семейства (при $r = r_k$):

$$T^{(k)}(t, x_1^{(k)}, r_k) = T(t, x_1^{(k)}, r_k), \quad 1 \leq k \leq K, \quad (29)$$

где T — температура стенки (температура композиции «связующее–трубки»).

Подставив (28) в (29), получим дифференциальное уравнение параболического типа порядка $2N$:

$$\mathfrak{R}_k^{(N)}\left(r_k; T_0^{(k)}(t, x_1^{(k)})\right) = T(t, x_1^{(k)}, r_k), \quad 1 \leq k \leq K. \quad (30)$$

Если к системе K уравнений (30) добавить, например, равенство (8), где предварительно $T^{(k)}$ выразить из (28), то получим систему $K + 1$ уравнений, замкнутую относительно неизвестных функций T , $T_0^{(k)}$ ($1 \leq k \leq K$), из которой с учетом (28) можно определить все интересующие нас температуры.

Анализ коэффициентов при высших производных в (16), (26), (27) показывает, что для реальных жидких теплоносителей (типа воды, трансформаторных масел и т.п. [14]) эти коэффициенты, как правило, имеют малые значения, причем тем меньше, чем больше номер n в (27). В силу этого уравнение (30) является дифференциальным уравнением с сингулярным возмущением. Причем, чем больше слагаемых удерживается в (13) (чем больше N), тем выше порядок сингулярности и тем точнее разложение (13) описывает температурное поле в жидкости на термическом входном участке и в окрестности начального момента времени t_0 (первые два слагаемых в (13) описывают температурное поле в квазистационарном режиме за пределами входного участка [10]).

Таким образом строится приближенное решение уравнения (9) в рамках метода начальных функций.

Повысить точность приближенного решения (13) без увеличения порядка разрешающих уравнений можно за счет совмещения метода начальных функций с методом дополнительных граничных условий [10]. С этой целью откажемся от выражений (26), (27) при $n \geq 2$ и воспользуемся дополнительным граничным условием, которое получается из (9) с учетом (10) при $r = r_k$:

$$\left(\partial_r^2 T^{(k)} + r^{-1} \partial_r T^{(k)}\right)\Big|_{r=r_k} = D_k T, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (31)$$

где в правой части использовано основное граничное условие (29).

Подставим в (29), (31) выражение (13) и ограничимся рассмотрением случая $N = 3$, тогда получим систему уравнений

$$\sum_{n=0}^3 T_{2n}^{(k)}(t, x_1^{(k)}) = T(t, x_1^{(k)}), \quad \sum_{n=0}^3 n^2 T_{2n}^{(k)}(t, x_1^{(k)}) = \frac{r_k^2}{4} D_k T, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (32)$$

Из системы (32), как из СЛАУ, с учетом (16) определим

$$\begin{aligned} T_4^{(k)}(t, x_1^{(k)}) &= -\frac{1}{20}r_k^2 D_k T - \frac{2}{5}r_k^2 L_k T_0^{(k)} + \frac{9}{5}(T - T_0^{(k)}), \\ T_6^{(k)}(t, x_1^{(k)}) &= \frac{1}{20}r_k^2 D_k T - \frac{3}{20}r_k^2 L_k T_0^{(k)} - \frac{4}{5}(T - T_0^{(k)}), \quad 1 \leq k \leq K. \end{aligned} \quad (33)$$

Коэффициенты (33) в разложении (13) определяют температурное поле в жидкости на термическом входном участке [10] и в окрестности начального момента времени t_0 , причем они зависят от функций $T_0^{(k)}$, T и их частных производных (см. (10), (17)).

Температура композиции «связующее–трубки» T определяется, например, уравнением (8), а для определения функции $T_0^{(k)}$ используем интегральное уравнение теплового баланса жидкости в трубке, т.е. уравнение (9) с учетом (10) проинтегрируем по r от 0 до r_k с весом r :

$$\begin{aligned} 2\bar{v}_k a_k^{-1} \int_0^{r_k} [1 - (r/r_k)^2] \partial_k T^{(k)} r dr + \int_0^{r_k} D_k T^{(k)} r dr &= \int_0^{r_k} (\partial_r^2 T^{(k)} + r^{-1} \partial_r T^{(k)}) r dr = \\ &= \int_0^{r_k} \partial_r (r \partial_r T^{(k)}) dr = r_k (\partial_r T^{(k)}) \Big|_{r=r_k}, \quad 1 \leq k \leq K, \end{aligned} \quad (34)$$

где учтено (12) при $n = 1$.

Подставим в левую и правую части цепочки равенств (34) выражение (13) при $N = 3$, получим

$$\begin{aligned} \frac{r_k^2 \bar{v}_k}{2a_k} \partial_k \left[T_0^{(k)} + \frac{1}{3} T_2^{(k)} + \frac{1}{6} T_4^{(k)} + \frac{1}{10} T_6^{(k)} \right] + \frac{r_k^2}{2} D_k \left[T_0^{(k)} + \frac{1}{2} T_2^{(k)} + \frac{1}{3} T_4^{(k)} + \frac{1}{4} T_6^{(k)} \right] = \\ = 2 \left[T_2^{(k)} + 2T_4^{(k)} + 3T_6^{(k)} \right], \quad 1 \leq k \leq K, \end{aligned}$$

откуда с учетом (33), (16) следует

$$\begin{aligned} \frac{7}{48} r_k^4 D_k L_k T_0^{(k)} - \frac{1}{48} r_k^4 D_k^2 T + \frac{19}{120} \frac{r_k^4 \bar{v}_k}{a_k} \partial_k L_k T_0^{(k)} - \frac{1}{60} \frac{r_k^4 \bar{v}_k}{a_k} \partial_k D_k T + 5r_k^2 L_k T_0^{(k)} + \\ + r_k^2 D_k T - \frac{21}{10} \frac{r_k^2 \bar{v}_k}{a_k} \partial_k T_0^{(k)} + \frac{11}{10} \frac{r_k^2 \bar{v}_k}{a_k} \partial_k T - 24(T - T_0^{(k)}) = 0, \quad 1 \leq k \leq K. \end{aligned} \quad (35)$$

Уравнение (35) определяет функцию $T_0^{(k)}$ в предположении, что температура стенки T известна из каких-либо соображений.

Параметр $\varepsilon_k = r_k^2 \bar{v}_k a_k^{-1} = \text{const}$ в (35) может иметь малые значения. Так, для трансформаторного масла ($\lambda_k = 0,107$ Вт/(м·К), $c_k = 1905$ Дж/(кг·К), $\rho_k = 856$ кг/м³ [14]) при $r_k = 1$ мм, $\bar{v}_k = 1$ см/с получаем $\varepsilon_k = 0,1524$ м. Разделив (35) на 24 (чтобы выделить в чистом виде величину температурного напора $T - T_0^{(k)}$), получим, что в этих случаях при всех производных в уравнении (35) коэффициенты являются малыми величинами, т.е. уравнение (35) является уравнением с сингулярным возмущением. Если в (35) пренебречь всеми слагаемыми, содержащими малые параметры, то получим приближенное равенство

$$T \approx T_0^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (36)$$

т.е. в квазистационарном режиме за пределами входного участка температура жидкости в трубках k -го семейства приблизительно равна температуре композиции «связующее трубки» T .

Для замыкания системы (35) получим еще одно уравнение, исходя из равенства (7), где по смыслу выделенный объем V произволен, но он больше объема представительного элемента композиции. Так как равенство (7) является интегральным, то в нем целесообразно заменить температуру жидкости $T^{(k)}$ в трубках k -го семейства (которых, согласно допущению 2, в представительном элементе композиции может быть много) ее интегральными характеристиками по поперечному сечению трубки, т.е. нужно использовать среднюю по поперечному сечению температуру

$$\bar{T}^{(k)}(t, x_1^{(k)}) = \frac{2\pi}{f_k} \int_0^{r_k} T^{(k)}(t, x_1^{(k)}, r) r dr, \quad 1 \leq k \leq K \quad (37)$$

и среднюю температуру, отнесенную к тепловому потоку (среднюю по энтальпии [8]). Согласно допущению 3, жидкость считается несжимаемой и нетермочувствительной, поэтому указанная средняя температура будет совпадать со средней температурой по течению $T_F^{(k)}$, которая определяется таким образом [15]:

$$T_F^{(k)}(t, x_1^{(k)}) \iint_{f_k} v_k df = \bar{v}_k f_k T_F^{(k)}(t, x_1^{(k)}) = \iint_{f_k} T^{(k)}(t, x_1^{(k)}, r) v_k df, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (38)$$

где $f_k \equiv \pi r_k^2$ — площадь внутренней части поперечного сечения трубок k -го семейства; скорость v_k определена в (10). Из (37), (38) с учетом (10), (13), (16), (33) получаем

$$\begin{aligned} \bar{T}^{(k)}(t, x_1^{(k)}) &= \frac{7}{240} r_k^2 L_k T_0^{(k)} - \frac{1}{240} r_k^2 D_k T + \frac{3}{5} T_0^{(k)} + \frac{2}{5} T, \\ T_F^{(k)}(t, x_1^{(k)}) &= \frac{19}{600} r_k^2 L_k T_0^{(k)} - \frac{1}{300} r_k^2 D_k T + \frac{39}{50} T_0^{(k)} + \frac{11}{50} T, \quad 1 \leq k \leq K. \end{aligned} \quad (39)$$

Так как радиус трубок r_k предполагается малым (порядка миллиметра), то множители, стоящие в (39) при дифференциальных операторах L_k , D_k , имеют малые значения. Если пренебречь соответствующими слагаемыми, то из (39) получим приближенные равенства:

$$\bar{T}^{(k)}(t, x_1^{(k)}) \approx \frac{3}{5} T_0^{(k)} + \frac{2}{5} T, \quad T_F^{(k)}(t, x_1^{(k)}) \approx \frac{39}{50} T_0^{(k)} + \frac{11}{50} T, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (40)$$

Учитывая соотношение (36), из (40) получаем приближенные выражения для $\bar{T}^{(k)}$, $T_F^{(k)}$ за пределами входного участка: $\bar{T}^{(k)} \approx T_F^{(k)} \approx T_0^{(k)} \approx T$, что свидетельствует о непротиворечивости полученных уравнений и соотношений.

На основании (37), (38) преобразуем уравнение (7). Согласно допущению 5, вектор скорости жидкости \mathbf{v}_k в (7) можно представить в виде

$$\mathbf{v}_k = v_k \mathbf{I}_k, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (41)$$

где $\mathbf{I}_k = \{I_1^{(k)}, I_2^{(k)}, I_3^{(k)}\}$ — единичный вектор вдоль траектории трубки k -го семейства (совпадает с направлением координаты $x_1^{(k)}$), v_k — модуль скорости, который в каждой трубке имеет выражение (10).

На основании (41) и самого смысла функций $\bar{T}^{(k)}$, $T_F^{(k)}$ (см. (37), (38)) в равенстве (7) можем сделать следующие замены:

$$\mathbf{v}_k \text{grad} T^{(k)} = v_k \partial_k T^{(k)} \rightarrow \bar{v}_k \partial_k T_F^{(k)}, \quad \partial_i T^{(k)} \rightarrow \partial_i \bar{T}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (42)$$

Кроме того, в (7) можно преобразовать слагаемое, отвечающую за диффузионную составляющую теплопереноса в жидкости, заполняющей трубки. С этой целью вектор теплового потока в жидкости \mathbf{q}_k представим в виде

$$\mathbf{q}_k = q_1^{(k)} \mathbf{e}_1^{(k)} + q_2^{(k)} \mathbf{e}_2^{(k)} + q_3^{(k)} \mathbf{e}_3^{(k)} \quad (\mathbf{l}_k \equiv \mathbf{e}_1^{(k)}), \quad 1 \leq k \leq K, \quad (43)$$

где $\mathbf{e}_i^{(k)}$ — единичные векторы в направлении осей локальной системы координат $x_i^{(k)}$, $q_i^{(k)}$ — проекции вектора \mathbf{q}_k на направления $\mathbf{e}_i^{(k)}$ ($i = \overline{1, 3}$).

Так как в жидкости каждой трубки k -го семейства температурное поле $T^{(k)}$ предполагается осесимметричным, то в интегральном смысле теплоперенос в жидкости в поперечном направлении трубки отсутствует, т.е. при преобразовании равенства (7) можно пренебречь компонентами $q_2^{(k)}$, $q_3^{(k)}$ в разложении (43), поэтому далее в (7) можно использовать выражение

$$\mathbf{q}_k = q_1^{(k)} \mathbf{l}_k, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (44)$$

Согласно допущению 1, трубки имеют постоянное поперечное сечение, поэтому получаем равенства [16]

$$\text{div}(\omega_k \mathbf{l}_k) = 0, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (45)$$

На основании (44) с учетом (45), (10) в равенстве (7) можно преобразовать следующие слагаемые:

$$\text{div}(\omega_k \mathbf{q}_k) = \text{div}(\omega_k q_1^{(k)} \mathbf{l}_k) = \omega_k \partial_k q_1^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq K,$$

откуда, используя закон теплопроводности Фурье для жидкости, получим

$$\text{div}(\omega_k \mathbf{q}_k) = -\omega_k \partial_k (\lambda_k \partial_k T^{(k)}) = -\lambda_k \omega_k \partial_k^2 T^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (46)$$

где учтено, что жидкость является нетермочувствительной.

Так как равенство (7) является интегральным, то в нем вместо (46) целесообразно использовать следующую замену:

$$\text{div}(\omega_k \mathbf{q}_k) = -\lambda_k \omega_k \partial_k^2 T^{(k)} \rightarrow -\lambda_k \omega_k \partial_k^2 \bar{T}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (47)$$

Таким образом, уравнение (7) с учетом (42), (47) преобразуется к виду

$$\iiint_V \left[C \partial_i T + \sum_k c_k \rho_k \omega_k \left(\partial_i \bar{T}^{(k)} + \bar{v}_k \partial_k T_F^{(k)} \right) - \text{div}(a \Lambda \text{grad} T) - \sum_k \lambda_k \omega_k \partial_k^2 \bar{T}^{(k)} - A W_0 - \sum_k \Omega_k W_k \right] dV = 0.$$

Так как выделенный из тела объем V по-прежнему произволен, то из последнего равенства получаем

$$C \partial_i T + \sum_k c_k \rho_k \omega_k \left(\partial_i \bar{T}^{(k)} + \bar{v}_k \partial_k T_F^{(k)} \right) - \text{div}(a \Lambda \text{grad} T) - \sum_k \lambda_k \omega_k \partial_k^2 \bar{T}^{(k)} - A W_0 - \sum_k \Omega_k W_k = 0. \quad (48)$$

Здесь и в (10), (35) нужно учесть выражение для дифференциального оператора ∂_k , который, например, в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\partial_k(\bullet) \equiv \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_1^{(k)}} = \sum_{i=1}^3 l_i^{(k)} \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_i}, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (49)$$

где $l_i^{(k)}$ — направляющие косинусы вектора \mathbf{I}_k , которые можно выразить через углы сферической системы координат θ_k, φ_k (см. рис. 1) по формулам

$$l_1^{(k)} = \sin \theta_k \cos \varphi_k, \quad l_2^{(k)} = \sin \theta_k \sin \varphi_k, \quad l_3^{(k)} = \cos \theta_k, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (50)$$

Используя (39), (35), уравнение (48) можно преобразовать к окончательному виду:

$$\begin{aligned} C \partial_t T - \operatorname{div}(a \Lambda \operatorname{grad} T) + \frac{1}{5} \sum_k \lambda_k \omega_k \left[D_k T - 2L_k T_0^{(k)} + 24r_k^{-2} (T - T_0^{(k)}) \right] = \\ = AW_0 + \sum_k \Omega_k W_k, \end{aligned} \quad (51)$$

где правая часть известна.

Таким образом, система $K + 1$ уравнений (35), (51) с учетом (10), (17), (49) замкнута относительно функций $T, T_0^{(k)}$ ($1 \leq k \leq K$) и определяет решение рассматриваемой задачи теплопереноса в композитном теле, армированном трубками, по которым прокачивается жидкий теплоноситель в ламинарном режиме. Эти уравнения в явном виде содержат разности температур $T - T_0^{(k)}$, характеризующие температурный напор от стенок трубок к жидкости, как это имеет место при использовании закона Ньютона для описания конвективного теплообмена между стенками трубок и жидкостью [9, 12], хотя в настоящем исследовании этот закон не использовался.

Согласно (10), (17), система (35), (51) не содержит высших производных по времени t , поэтому в нестационарном случае она имеет параболический тип [17]. В стационарном же случае система (35), (51) имеет следующее характеристическое уравнение:

$$\left\{ a \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \Lambda_{ij} \alpha_i \alpha_j + \frac{1}{7} \sum_k \lambda_k \omega_k \left(\sum_{i=1}^3 l_i^{(k)} \alpha_i \right)^2 \right\} \prod_{k=1}^K \left[\sum_{i=1}^3 l_i^{(k)} \alpha_i \right]^{-4} = 0, \quad (52)$$

где α_i ($i = \overline{1, 3}$) — параметры, задающие характеристическое направление, причем $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$; Λ_{ij} — эффективные коэффициенты теплопроводности композиции «связующее — трубки» (компоненты матрицы Λ ; см. (7), (51)). Согласно (3) и постулату Онзагера [13], множитель, заключенный в (52) в фигурные скобки, всегда положителен (т.е. в стационарном случае в уравнении (51) ему отвечает эллиптический оператор относительно функции T), а множители, заключенные в квадратные скобки, свидетельствуют о том, что любая поверхность, проходящая через траекторию трубки k -го семейства, является характеристической. Следовательно, в стационарном случае система разрешающих уравнений (35), (51) имеет составной тип [18], причем траектории трубок k -го семейства лежат на четырехкратных характеристических поверхностях.

В нестационарном случае уравнение (52) соответствует главным частям дифференциальных операторов системы (35), (51).

Специфический тип системы разрешающих уравнений требует для ее однозначного интегрирования задания специфических начально-краевых условий. Согласно первому множителю в (52), заключенному в фигурные скобки, главная часть дифференциального

оператора в (51) является эллиптическим оператором второго порядка относительно функции T , поэтому для температуры композиции «связующее–трубки» необходимо задать на поверхности S тела (теплообменника) традиционные граничные условия либо по температуре:

$$T(t, \mathbf{x}) = T_S(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \quad t \geq t_0, \quad (53)$$

либо по тепловому потоку:

$$-\mathbf{n}_S (\Delta \text{grad} T) = q_n(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \quad t \geq t_0, \quad (54)$$

либо теплообмен осуществляется по закону Ньютона:

$$-\mathbf{n}_S (\Delta \text{grad} T) = h_\infty (T - T_\infty), \quad \mathbf{x} \in S, \quad t \geq t_0, \quad (55)$$

где T_S — температура поверхности S , \mathbf{n}_S — вектор внешней нормали к S , q_n — нормальная составляющая вектора теплового потока через S , h_∞ — коэффициент теплоотдачи между композицией «связующее–трубки» и окружающей средой, T_∞ — температура окружающей среды (также возможно задание на S смешанных граничных условий из (53)–(55)). Кроме того, в нестационарном случае в момент времени t_0 для функции T должно быть задано традиционное начальное условие

$$T(t_0, \mathbf{x}) = T^0(\mathbf{x}), \quad (56)$$

где $T^0(\mathbf{x})$ — известное начальное распределение температуры T .

Согласно (10), (17), уравнение (51) содержит первые производные по времени t от функций T , $T_0^{(k)}$, а уравнения (35) — вторые производные по времени, поэтому для однозначного интегрирования уравнений (35) в момент времени t_0 для функций T , $T_0^{(k)}$ необходимо задать по два начальных условия. Первое начальное условие для функции T уже задано (см. (56)), второе условие для производной $\partial_t T(t_0, \mathbf{x})$ должно быть согласовано с уравнением (51) при $t = t_0$.

Получить необходимые начальные условия для функций T , $T_0^{(k)}$ можно из следующих соображений. Пусть в момент времени t_0 в трубке k -го семейства задано начальное распределение температуры

$$T^{(k)}(t_0, x_1^{(k)}, r) = T_k^0(x_1^{(k)}, r), \quad 1 \leq k \leq K. \quad (57)$$

Так как в настоящем исследовании рассматривается лишь конечное разложение температуры $T^{(k)}$ (см. (13)), то в общем случае равенство (57) выполнить точно не удастся, поэтому вместо (57) используем интегральные равенства

$$\begin{aligned} \int_0^{r_k} T^{(k)}(t_0, x_1^{(k)}, r) r dr &= \int_0^{r_k} T_k^0(x_1^{(k)}, r) r dr \equiv \bar{T}_k^0(x_1^{(k)}), \\ \int_0^{r_k} T^{(k)}(t_0, x_1^{(k)}, r) \left(\frac{r}{r_k}\right)^2 r dr &= \int_0^{r_k} T_k^0(x_1^{(k)}, r) \left(\frac{r}{r_k}\right)^2 r dr \equiv \bar{\bar{T}}_k^0(x_1^{(k)}), \quad 1 \leq k \leq K, \end{aligned} \quad (58)$$

где \bar{T}_k^0 , $\bar{\bar{T}}_k^0$ — известные функции вдоль траектории трубки, а значит и во всем теплообменнике. Подставим в (58) разложение (13) при $N = 3$ и учтем выражения (16), (33), получим

$$\begin{aligned} \frac{r_k^2}{2} \left(\frac{7}{240} r_k^2 L_k T_0^{(k)} - \frac{1}{240} r_k^2 D_k T + \frac{3}{5} T_0^{(k)} + \frac{2}{5} T \right) \Big|_{t=t_0} &= \bar{T}_k^0(x_1^{(k)}), \\ \frac{r_k^2}{2} \left(\frac{1}{75} r_k^2 L_k T_0^{(k)} - \frac{1}{400} r_k^2 D_k T + \frac{21}{100} T_0^{(k)} + \frac{29}{100} T \right) \Big|_{t=t_0} &= \bar{\bar{T}}_k^0(x_1^{(k)}), \quad 1 \leq k \leq K. \end{aligned} \quad (59)$$

Используя выражение для оператора D_k (см. (10)), преобразуем (59) и уравнение (51) при $t = t_0$ с учетом начального условия (56):

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{240} r_k^2 a_k^{-1} \partial_t T + \frac{7}{240} r_k^2 L_k T_0^{(k)} + \frac{3}{5} T_0^{(k)} \right) \Big|_{t=t_0} &= \frac{2}{r_k^2} \bar{T}_k^0 - \frac{1}{240} r_k^2 \partial_k^2 T^0 - \frac{2}{5} T^0, \\ \left(-\frac{1}{400} r_k^2 a_k^{-1} \partial_t T + \frac{1}{75} r_k^2 L_k T_0^{(k)} + \frac{21}{100} T_0^{(k)} \right) \Big|_{t=t_0} &= \frac{2}{r_k^2} \bar{\bar{T}}_k^0 - \frac{1}{400} r_k^2 \partial_k^2 T^0 - \frac{29}{100} T^0 \\ (1 \leq k \leq K), \quad \left[\left(C + \frac{1}{5} \sum_k c_k \rho_k \omega_k \right) \partial_t T - \frac{2}{5} \sum_k \lambda_k \omega_k \left(L_k T_0^{(k)} + 12 r_k^{-2} T_0^{(k)} \right) \right] \Big|_{t=t_0} &= \\ = \left(A W_0 + \sum_k \Omega_k W_k \right) \Big|_{t=t_0} + \operatorname{div} (a \Lambda \operatorname{grad} T^0) + \frac{1}{5} \sum_k \lambda_k \omega_k \left(\partial_k^2 T^0 - 24 r_k^{-2} T^0 \right), \end{aligned} \quad (60)$$

где в правую часть перенесены все известные в момент времени t_0 функции.

Систему $2K+1$ уравнений (60) можно рассматривать как СЛАУ относительно функций $\partial_t T|_{t_0}$, $L_k T_0^{(k)}|_{t_0}$, $T_0^{(k)}|_{t_0}$ ($1 \leq k \leq K$). Определив из (60) в каждой точке теплообменника эти функции, будем иметь помимо (56) известные начальные условия $\partial_t T|_{t_0}$, $T_0^{(k)}|_{t_0}$. Производную $\partial_t T_0^{(k)}|_{t_0}$ можно определить на основании (17), (10):

$$\left(a_k^{-1} \partial_t T_0^{(k)} - \partial_k^2 T_0^{(k)} + 2 \bar{v}_k a_k^{-1} \partial_k T_0^{(k)} \right) \Big|_{t_0} = L_k T_0^{(k)} \Big|_{t_0}, \quad 1 \leq k \leq K,$$

откуда

$$\partial_t T_0^{(k)} \Big|_{t_0} = a_k \left[L_k T_0^{(k)} \Big|_{t_0} + \left(\partial_k^2 T_0^{(k)} - 2 \bar{v}_k a_k^{-1} \partial_k T_0^{(k)} \right) \Big|_{t_0} \right], \quad 1 \leq k \leq K, \quad (61)$$

где правая часть известна из решения системы (60).

Таким образом, из (56), (60), (61) можем определить все начальные условия ($T|_{t_0}$, $\partial_t T|_{t_0}$, $T_0^{(k)}|_{t_0}$, $\partial_t T_0^{(k)}|_{t_0}$ ($1 \leq k \leq K$)), необходимые для однозначного интегрирования системы (35), (51).

Согласно (10), (17), уравнения (35) содержат четвертые производные от функций $T_0^{(k)}$ по пространственной переменной $x_1^{(k)}$, т.е. вдоль траектории трубки k -го семейства. Так как траектории трубок лежат на характеристических поверхностях, то для однозначного интегрирования уравнений (35) помимо определенных уже начальных условий необходимо задать по два граничных условия для функций $T_0^{(k)}$ на входе и выходе жидкости из трубок k -го семейства. Пусть на входе (при $x_1^{(k)} = x_*^{(k)}$) и на выходе (при $x_1^{(k)} = x_{**}^{(k)}$) жидкости из трубки k -го семейства заданы ее температуры по поперечному сечению

$$T^{(k)}(t, x_*^{(k)}, r) = T_*^{(k)}(t, r), \quad T^{(k)}(t, x_{**}^{(k)}, r) = T_{**}^{(k)}(t, r), \quad 1 \leq k \leq K, \quad (62)$$

где $T_*^{(k)}$, $T_{**}^{(k)}$ — известные функции.

Так как разложение (13) является конечным, то в общем случае точно выполнить условия (62) нельзя, поэтому вместо (62) используем интегральные равенства

$$\int_0^{r_k} T^{(k)}(t, x_*^{(k)}, r) \left(\frac{r}{r_k}\right)^{2m} r dr = \int_0^{r_k} T_*^{(k)}(t, r) \left(\frac{r}{r_k}\right)^{2m} r dr \equiv \theta_{*m}^{(k)}(t),$$

$$\int_0^{r_k} T^{(k)}(t, x_{**}^{(k)}, r) \left(\frac{r}{r_k}\right)^{2m} r dr = \int_0^{r_k} T_{**}^{(k)}(t, r) \left(\frac{r}{r_k}\right)^{2m} r dr \equiv \theta_{**m}^{(k)}(t), \quad m = \overline{0, N}, \quad (63)$$

где $\theta_{*m}^{(k)}$, $\theta_{**m}^{(k)}$ — известные функции времени t .

Подставим в (63) разложение (13), получим

$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{m+n+1} T_{2n}^{(k)}(t, x_*^{(k)}) = \frac{2}{r_k^2} \theta_{*m}^{(k)}(t), \quad \sum_{n=0}^N \frac{1}{m+n+1} T_{2n}^{(k)}(t, x_{**}^{(k)}) = \frac{2}{r_k^2} \theta_{**m}^{(k)}(t), \quad (64)$$

$$m, n = \overline{0, N}, \quad 1 \leq k \leq K.$$

Из СЛАУ (64) можем определить все функции $T_{2n}^{(k)}$ при $x_1^{(k)} = x_*^{(k)}$ и $x_1^{(k)} = x_{**}^{(k)}$. В частности, будут известны функции $T_0^{(k)}(t, x_*^{(k)})$, $T_0^{(k)}(t, x_{**}^{(k)})$ и $T_2^{(k)}(t, x_*^{(k)})$, $T_2^{(k)}(t, x_{**}^{(k)})$. Используя выражения (16), (17), на входе и выходе жидкости из трубки k -го семейства получим

$$\left(2\bar{v}_k a_k^{-1} \partial_k T_0^{(k)} - \partial_k^2 T_0^{(k)}\right)\Big|_{x_*^{(k)}} = \frac{4}{r_k^2} T_2^{(k)}(t, x_*^{(k)}) - a_k^{-1} \partial_t T_0^{(k)}\Big|_{x_*^{(k)}},$$

$$\left(2\bar{v}_k a_k^{-1} \partial_k T_0^{(k)} - \partial_k^2 T_0^{(k)}\right)\Big|_{x_{**}^{(k)}} = \frac{4}{r_k^2} T_2^{(k)}(t, x_{**}^{(k)}) - a_k^{-1} \partial_t T_0^{(k)}\Big|_{x_{**}^{(k)}}, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (65)$$

где правые части известны из решения системы (64).

Таким образом, из (64), (65) можем определить все граничные условия для функции $T_0^{(k)}$ (на входе и выходе жидкости из трубки k -го семейства), необходимые для однозначного интегрирования уравнений (35). (Вместо условий I рода (62) для жидкости могут быть заданы и другие типы граничных условий, например, известный тепловой поток на выходе жидкости из трубок и т.п. Ход рассуждений и в этих случаях аналогичен (62)–(65).)

Как видно из приведенных рассуждений, для рассматриваемой задачи теплопереноса ставятся неклассические начально-краевые условия, что требует разработки специальных методов интегрирования этой задачи. Невыясненным остался лишь вопрос о выражениях эффективных коэффициентов теплопроводности композиции «связующее–трубки» Λ_{ij} , $i, j = \overline{1, 3}$ (компонентов матрицы Λ в (51), (52), (54), (55)) через параметры армирования: плотности (Ω_k) и направления (θ_k, φ_k , $1 \leq k \leq K$, см. рис. 1). Определение этих коэффициентов представляет собой самостоятельную задачу теории теплопроводности волокнистых материалов. В общем случае пространственного армирования, согласно (7), для определения Λ_{ij} можно использовать структурные формулы, полученные в работе [19], где под плотностями армирования волокнами k -го семейства

(которые в [19] обозначены как ω_k) следует понимать отношения Ω_k/a , а под относительным объемным содержанием связующего (которое в [19] обозначено как ω_0) нужно понимать отношение A/a (см. (2)).

В случае перекрестного армирования трубками тонкостенных конструкций типа пластин и оболочек по траекториям, эквидистантным некоторой отсчетной поверхности ($\theta_k = \pi/2$, $1 \leq k \leq K$, см. рис. 1), выражения для Λ_{ij} были получены ранее в работах [9, 12] в явном виде для случая изотропного связующего и моноотропных трубок:

$$\Lambda_{ij} = \sum_k \Omega_k \Omega^{-1} \left\{ l_i^{(k)} l_j^{(k)} a^{-1} \left[(\lambda_1^{(k)} - \lambda_0) \Omega + a \lambda_0 \right] + (-1)^{i+j} l_p^{(k)} l_r^{(k)} a \times \right. \\ \left. \times \left(\Omega / \lambda_2^{(k)} + A / \lambda_0 \right)^{-1} \right\} \quad (p = 3 - i, \quad r = 3 - j, \quad i, j = 1, 2), \quad (66)$$

$$\Lambda_{33} = a \left(\sum_k \Omega_k / \lambda_2^{(k)} + A / \lambda_0 \right)^{-1}, \quad \Omega = \sum_k \Omega_k,$$

где λ_0 , $\lambda_1^{(k)}$, $\lambda_2^{(k)}$ — коэффициенты теплопроводности связующего и трубок k -го семейства в продольном и поперечном направлениях соответственно. (При выполнении физических ограничений (3) величины Λ_{ij} в (66) образуют коэффициенты положительно определенной квадратичной формы, а значит, согласуются с постулатом Онзагера [13].)

З а м е ч а н и е 2. Если учесть равенство (26), то в разложении (13) можно удерживать дополнительное слагаемое при $N = 4$, что позволяет уточнить решение на термическом входном участке в трубках, а также в окрестности начального момента времени t_0 . При этом уравнение, аналогичное (51), будет содержать производные $\partial_t^2 T_0^{(k)}$, $\partial_k^6 T_0^{(k)}$, а уравнения, аналогичные (35), будут содержать производные $\partial_t^3 T_0^{(k)}$, $\partial_k^6 T_0^{(k)}$, т.е. порядок соответствующей системы разрешающих уравнений возрастет по сравнению с порядком системы (35), (51). Дальнейшее уточнение температурного поля в жидком теплоносителе по методу начальных функций будет приводить к еще большему повышению порядка системы разрешающих уравнений, для однозначного интегрирования которой необходимо ставить дополнительные начально-краевые условия. Исследование этих вопросов выходит за рамки настоящей работы.

Модельная задача

Для большей наглядности продемонстрируем влияние структуры армирования и параметров теплопереноса на распределение температуры в тонкостенных конструкциях, наиболее часто встречающихся в инженерных приложениях, на следующем простом примере. Рассмотрим стационарную осесимметричную задачу теплопроводности (при отсутствии внутренних источников тепла) тонкой замкнутой цилиндрической оболочки вращения, спирально армированной трубками по эквидистантным поверхностям.

Криволинейную ортогональную систему глобальных координат x_1 выберем следующим образом: x_1 — продольная (осевая) координата, x_2 — длина дуги окружности поперечного сечения срединной поверхности, x_3 — расстояние между элементарным армированным слоем и срединной поверхностью оболочки. При этом параметры Ламе тождественно равны единице, т.е. справедлива формула (49).

Предполагается, что оболочка меридионально-симметрично армирована двумя ($K = 2$) семействами трубок ($\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi$, $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$; см. (50) и рис. 1) постоянного поперечного сечения, изготовленных из одного изотропного материала ($\lambda_1^{(k)} = \lambda_2^{(k)} = \lambda_k$, $k = 1, 2$), уложенных с одинаковой плотностью ($\omega_1 = \omega_2$, $\Omega_1 = \Omega_2$) и имеющих одинаковые поперечные размеры ($r_1 = r_2$); по трубкам обоих семейств прокачивается один и тот же теплоноситель ($\lambda_1 = \lambda_2$, $c_1 = c_2$, $\rho_1 = \rho_2$) с одной и той же скоростью ($\bar{v}_1 = \bar{v}_2$).

Условия постоянства поперечных сечений трубок (см. (45)) для тонких цилиндрических оболочек вращения имеют вид [16]:

$$\Omega_k \cos \varphi = \Omega_{k*} = \text{const}, \quad \omega_k \cos \varphi = \omega_{k*} = \text{const}, \quad k = 1, 2, \quad (67)$$

где константы Ω_{k*} , ω_{k*} с точностью до некоторого постоянного множителя определяют суммарные площади поперечных сечений и внутренних полостей в трубках k -го семейства соответственно, причем в силу предположения $\omega_1 = \omega_2$, $\Omega_1 = \Omega_2$ имеют место равенства $\omega_{1*} = \omega_{2*}$, $\Omega_{1*} = \Omega_{2*}$.

Для простоты предполагается, что лицевые поверхности оболочки термоизолированы, поэтому с приемлемой для инженерных расчетов точностью можно предполагать температуры T , $T_0^{(k)}$, $T_F^{(k)}$, $\bar{T}^{(k)}$ ($k = 1, 2$) постоянными по толщине тонкой оболочки [12, 20].

Уравнения, описывающие стационарную осесимметричную задачу теплопроводности при отсутствии внутренних источников тепла, для осесимметрично армированной цилиндрической оболочки при задании термоизоляции на ее лицевых поверхностях и в предположении о постоянстве угла армирования ($\varphi = \text{const}$) имеют вид (см. (35), (51), (10), (17), (49), (66)):

$$\begin{aligned} & - \left(a\Lambda_{11} + \frac{2}{5} \lambda_1 \omega_1 \cos^2 \varphi \right) \frac{d^2 T}{dx_1^2} + \frac{4}{5} \lambda_1 \varphi_1 \cos^2 \varphi \frac{d^2 T_0^{(1)}}{dx_1^2} - \frac{8}{5} \omega_1 c_1 \rho_1 \bar{v}_1 \cos \varphi \frac{dT_0^{(1)}}{dx_1} + \\ & + \frac{48}{5r_1^2} (T - T_0^{(1)}) = 0, \quad \frac{7}{48} r_1^4 \cos^4 \varphi \frac{d^4 T_0^{(1)}}{dx_1^4} - \frac{1}{48} r_1^4 \cos^4 \varphi \frac{d^4 T}{dx_1^4} - \frac{27}{60} \frac{r_1^4 \bar{v}_1}{a_1} \times \\ & \times \cos^3 \varphi \frac{d^3 T_0^{(1)}}{dx_1^3} + \frac{1}{60} \frac{r_1^4 \bar{v}_1}{a_1} \cos^3 \varphi \frac{d^3 T}{dx_1^3} + \left(\frac{19}{60} \frac{r_1^2 \bar{v}_1^2}{a_1^2} - 5 \right) r_1^2 \cos^2 \varphi \frac{d^2 T_0^{(1)}}{dx_1^2} - \\ & - r_1^2 \cos^2 \varphi \frac{d^2 T}{dx_1^2} + \frac{79}{10} \frac{r_1^2 \bar{v}_1}{a_1} \cos \varphi \frac{dT_0^{(1)}}{dx_1} + \frac{11}{10} \frac{r_1^2 \bar{v}_1}{a_1} \cos \varphi \frac{dT}{dx_1} - 24 (T - T_0^{(1)}) = 0, \\ & T_0^{(2)}(x_1) = T_0^{(1)}(x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq L, \end{aligned} \quad (68)$$

где, согласно (49), учтено, что в рассматриваемом случае

$$\partial_k (\bullet) = \mathbf{I}_k \text{grad} (\bullet) = l_1^{(k)} \frac{d(\bullet)}{dx_1} = \cos \varphi \frac{d(\bullet)}{dx_1}, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (69)$$

L — длина оболочки. Все коэффициенты в (68) являются постоянными, так как из выражений (67), (10) и $\varphi = \text{const}$ следует, что и $\omega_1 = \omega_2 = \text{const}$, $\Omega_1 = \Omega_2 = \text{const}$, $a = \text{const}$, $A = \text{const}$, также $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = \text{const}$ в силу предположения о несжимаемости жидкости и постоянстве поперечных сечений трубок ($r_1 = r_2 = \text{const}$).

Предполагается, что жидкость в оба семейства трубок втекает либо на левой кромке ($x_1 = x_1^{(k)} = x_*^{(k)} = 0$, $\bar{v}_k > 0$), либо на правой кромке ($x_1 = x_1^{(k)} = x_*^{(k)} = L$, $\bar{v}_k < 0$, $k = 1, 2$) и на входе имеет постоянную температуру по сечению трубок $T_*^{(k)}$ (см. (62), (63)), т. е. в (64)

$$\theta_{*m}^{(k)} = \frac{r_k^2}{2(m+1)} T_*^{(k)} = \text{const} \quad (T_*^{(k)} = \text{const}, \quad 1 \leq k \leq K, \quad m = \overline{0, N}). \quad (70)$$

Тогда первое равенство (65) с учетом (69) примет вид:

$$\left(\frac{2\bar{v}_1}{a_1} \cos \varphi \frac{dT_0^{(1)}}{dx_1} - \cos^2 \varphi \frac{d^2 T_0^{(1)}}{dx_1^2} \right) \Big|_{x_*^{(1)}} = \frac{4}{r_1^2} T_2^{(1)}(x_*^{(1)}), \quad (71)$$

причем значения $T_0^{(1)}(x_*^{(1)})$, $T_2^{(1)}(x_*^{(1)})$ известны из решения системы (64) с учетом (70).

На выходе жидкости из трубок каждого семейства (при $x_1 = x_1^{(k)} = x_{**}^{(k)} = L$, $\bar{v}_k > 0$ или при $x_1 = x_1^{(k)} = x_{**}^{(k)} = 0$, $\bar{v}_k < 0$, $k = 1, 2$) предполагается, что тепловой поток в ней в направлении течения равен нулю. При этом, аналогично рассуждениям (62)–(65), (70), (71), с учетом закона теплопроводности Фурье получим следующие граничные условия:

$$\left(\frac{2\bar{v}_1}{a_1} \cos^2 \varphi \frac{d^2 T_0^{(1)}}{dx_1^2} - \cos^3 \varphi \frac{d^3 T_0^{(1)}}{dx_1^3} \right) \Big|_{x_{**}^{(1)}} = 0, \quad \cos \varphi \frac{dT_0^{(1)}}{dx_1} \Big|_{x_{**}^{(1)}} = 0. \quad (72)$$

На левой кромке оболочки ($x_1 = 0$) задано граничное условие I рода (см. (53)):

$$T(0) = T_S^0, \quad (73)$$

а на правой кромке ($x_1 = L$) задано граничное условие II рода (см. (54)):

$$-\Lambda_{11} \frac{dT}{dx_1} \Big|_{x_1=L} = q_n^L, \quad (74)$$

где T_S^0 , q_n^L — заданные значения.

Так как система разрешающих уравнений модельной задачи (68) имеет постоянные коэффициенты, то решение соответствующей двухточечной краевой задачи (68), (70)–(74) можно получить аналитически или численно, например методом пристрелки [21] с применением абсолютно устойчивых высокоточных методов Рунге–Кутты [22].

Обсуждение результатов расчетов

Рассматриваются решения модельной задачи для медной цилиндрической оболочки ($\lambda_0 = 400$ Вт/(м·К) [23]) длиной $L = 1$ м, армированной стальными трубками ($\lambda_1 = 45$ Вт/(м·К) [23]) с относительным содержанием $\omega_* = 0,15$, $\Omega_{1*} = \omega_*/2$ (см. (67)), по которым прокачивается масло ХФ-22 ($\lambda_1 = 0,15$ Вт/(м·К), $c_1 = 1680$ Дж/(кг·К), $\rho_1 = 970$ кг/м³, $\nu_1 = 2 \cdot 10^{-5}$ м²/с [14], где ν_1 — кинематическая вязкость). Масло подается на вход трубок с постоянной по сечению температурой $T_*^{(k)} = 90$ °С ($k = 1, 2$). На левой кромке оболочки задано граничное условие (73) при $T_S^0 = 20$ °С, а на правой

кромке — условие (74) при $q_n^L = 0$ — теплоизоляция (такой тип теплофизических граничных условий наиболее часто встречается в инженерной практике [10]).

На рис. 2 приведены кривые распределения температур вдоль металлокомпозитных оболочек T и в жидком теплоносителе $T_F^{(1)}$ при их продольном армировании: $\varphi = 0$. (Так как в рассматриваемом случае $\lambda_t \ll \Lambda_{11}$ (см. (66) и входные данные задачи), то конвективная составляющая теплопереноса в жидкости вдоль трубок существенно доминирует над диффузионной составляющей, поэтому целесообразно в качестве характерной температуры жидкости рассматривать именно $T_F^{(1)}$, а не $\bar{T}^{(1)}$, см. (37)–(39)).

На рис. 2а изображены зависимости $T(x_1)$, $T_F^{(1)}(x_1)$ в случае прокачивания теплоносителя слева направо ($\bar{v}_1 \geq 0$), а на рис. 2б — при прокачивании справа налево ($\bar{v}_1 \leq 0$). Сплошные линии, номера которых помечены штрихом, характеризуют функцию $T(x_1)$, а пунктирные кривые, номера которых помечены двумя штрихами, — зависимость $T_F^{(1)}(x_1)$. Кривые с одинаковыми номерами на рис. 2 рассчитаны при одних и тех же параметрах армирования (r_1) и движения теплоносителя ($|\bar{v}_1|$). Линии 0', 0'' соответствуют случаю, когда теплоноситель неподвижен ($\bar{v}_1 = 0$). Кривые 1–4 определены при $r_1 = 2$ мм, причем линии 1', 1'' рассчитаны при $|\bar{v}_1| = 0,3$ мм/с, 2', 2'' — при $|\bar{v}_1| = 1$ мм/с, 3', 3'' — при $|\bar{v}_1| = 10$ мм/с, 4', 4'' — при $|\bar{v}_1| = 30$ мм/с. Кривые 0', 1' и 0'', 1'' на рис. 2а визуально практически неразличимы. Сопоставление линий 0'–4' и 0''–4'' на рис. 2 позволяет проследить за изменением температуры в оболочке и теплоносителе в зависимости от увеличения скорости движения теплоносителя. Видно, что чем больше эта скорость, тем в большей степени можно прогреть металлокомпозитную оболочку. При этом существенную роль играет направление прокачивания теплоносителя при заданных граничных условиях на кромках оболочки. Так, согласно кривой 1' на рис. 2б, при движении

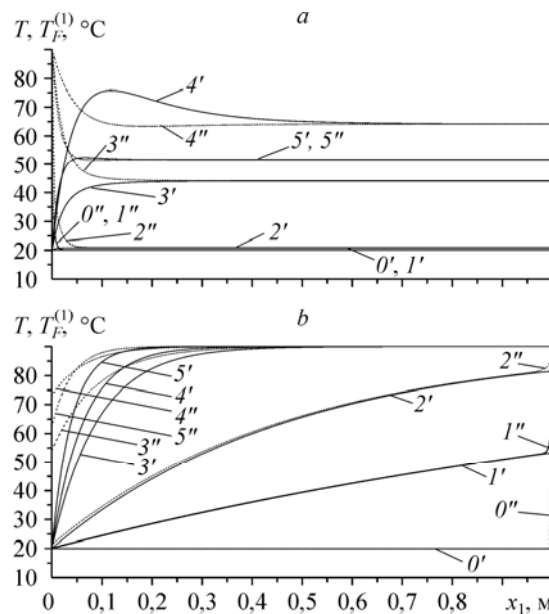


Рис. 2. Распределение температурных полей в цилиндрической металлокомпозитной оболочке и жидком теплоносителе.

При движении теплоносителя слева направо (а) и справа налево (б).

теплоносителя справа налево уже при $|\bar{v}_1| = 0,3$ мм/с в оболочке на правой ее кромке можно достичь температуры $T(L) = 53$ °С. В случае движения теплоносителя слева направо, согласно кривой 3' на рис. 2а, такой же температуры в оболочке не удастся добиться и при $|\bar{v}_1| = 10$ мм/с, т.е. при расходе теплоносителя в 33,3 раза большем.

Более того, кривые 3', 4' на рис. 2б показывают, что при движении теплоносителя справа налево в большей части оболочки удается получить температуру, близкую к температуре теплоносителя на входе в трубки: $T(x_1) \approx 90$ °С. При прокачивании же теплоносителя слева направо с тем же его расходом в единицу времени (см. кривые 3', 4' на рис. 2а) достичь таких же уровней нагрева оболочки не удастся. Кроме того, согласно кривой 4' на рис. 2а, в этом случае при относительно больших скоростях движения теплоносителя наблюдается немонотонное изменение температуры вдоль оболочки, т.е. появляется область локального перегрева конструкции (см. окрестность точки локального максимума на кривой 4' рис. 2а). Отметим, что подобные области локального перегрева стенок труб, по которым прокачивается жидкий теплоноситель, зафиксированы экспериментально [5, 6].

Кривые 5', 5'' на рис. 2 рассчитаны при $|\bar{v}_1| = 30$ мм/с и $r_1 = 1$ мм, т.е. по сравнению с линиями 4', 4'' внутренний радиус трубок уменьшен вдвое, а их количество увеличено в четыре раза, что обеспечивает равный расход теплоносителя. Сравнение кривых 4' и 5' на рис. 2 показывает, что в зависимости от направления движения теплоносителя уменьшение диаметра трубок с увеличением их количества приводит к противоположным эффектам. Так, на рис. 2а кривая 5' лежит всюду ниже линии 4', а на рис. 2б, наоборот, выше.

Сопоставление сплошных и пунктирных линий с одинаковыми номерами на рис. 2 показывает, что для них в основной части оболочки выполняются приближенные равенства (36), (40).

Изменяя направления армирования (углы φ), можно дополнительно увеличить максимальную температуру в рассматриваемых оболочках. Так, на рис. 3 изображены зависимости $T^m(\varphi) = \max_{x_1} T(x_1; \varphi)$. Все кривые определены при $r_1 = 2$ мм, но при разной скорости движения теплоносителя. Кривые линии 1, 2 рассчитаны при одном и том же расходе теплоносителя ($|\bar{v}_1| = 0,3$ мм/с), но при его движении в разных направлениях: кривая 1 — при течении слева направо, а линия 2 — справа налево. Кривая 1 визуально не отличается от горизонтальной прямой: для нее $20,08 \leq T^m(\varphi) \leq 20,18$ °С. (Отметим, что и при других скоростях \bar{v}_1 движения теплоносителя слева направо наблюдается незначительная изменяемость функции $T^m(\varphi)$ при заданных типах граничных условий на кромках оболочки.) Согласно поведению кривой 2 на рис. 3, наоборот, при прокачивании теплоносителя справа налево можно добиться значительного изменения $T^m(\varphi)$ при варьировании углов армирования φ . Но с увеличением скорости движения теплоносителя в указанном направлении изменяемость

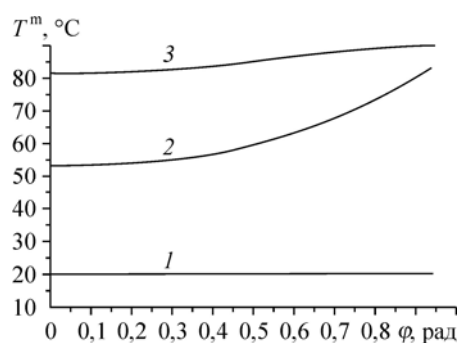


Рис. 3. Зависимости максимальных температур в цилиндрической металлокомпозитной оболочке от угла спирального армирования при разных скоростях и направлениях движения теплоносителя.

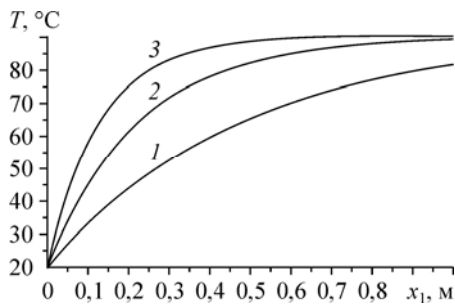


Рис. 4. Распределение температурных полей в цилиндрической металлокомпозитной оболочке при разных углах спирального армирования трубками.

функции $T^m(\varphi)$ уменьшается. Об этом свидетельствует, например, кривая 3 на рис. 3, которая получена при $|\bar{v}_1| = 1$ мм/с. Однако в этом случае с увеличением угла армирования φ существенно возрастает глубина прогрева оболочки, хотя значения $T^m(\varphi)$ изменяются и незначительно.

На рис. 4 изображены зависимости $T(x_1)$ в металлокомпозитных оболочках в случае $r_1 = 2$ мм, $|\bar{v}_1| = 1$ мм/с и движении теплоносителя справа налево (температуры жидкости не приведены) при разных углах армирования: кривая 1 получена при $\varphi = 0$ (она полностью совпадает с линией 2' на рис. 2b), кривая 2 — при $\varphi = \pi/4$ (спиральное ортогональное армирование трубками), линия 3 — при $\varphi = 0,92$ рад ($> \pi/4$) (в этом случае укладка трубок близка к плотной упаковке, т.е. $A \approx A_* = 0,22$, см. (3)). Как видно из рис. 4, при увеличении угла спирального армирования φ значение $T^m(\varphi)$ изменяется незначительно, но глубина прогрева оболочки действительно существенно возрастает при фиксированном расходе теплоносителя.

Следует отметить, что во всех приведенных выше расчетах числа Рейнольдса ($Re = 2r_1\bar{v}_1/\nu_1$) не превосходили значения 10, т.е. течение теплоносителя во всех случаях действительно было ламинарным [5, 6, 15].

Поведение всех кривых на рис. 2a и линий 0''–5'', 3'–5' на рис. 2b свидетельствует о том, что в рассматриваемых задачах теплопереноса возникают ярко выраженные температурные краевые эффекты как в композитной конструкции, так и в жидком теплоносителе. Это, как уже отмечалось, является следствием сингулярного возмущения поставленной краевой задачи и требует разработки специальных высокоточных численных методов ее интегрирования.

Заключение

Предложенная структурная модель теплопереноса в композитных телах, армированных трубками, по которым прокачивается несжимаемый жидкий теплоноситель в ламинарном режиме течения, позволяет определять температурные поля в таких средах без привлечения понятия коэффициента теплоотдачи от трубок к теплоносителю. Проведенный на основе этой модели параметрический анализ решений соответствующих задач теплопроводности показывает, что распределение температурного поля в композитной конструкции как качественно, так и количественно зависит от структуры армирования трубками, теплофизических характеристик фазовых материалов, скорости и направления движения жидкости в трубках и от тепловых граничных условий, что открывает широкие возможности для поиска эффективных проектов армирования таких конструкций, а также параметров и режимов прокачивания теплоносителя в них.

Список литературы

1. Mohamed M.H., Bogdanovich A.E., Dickinson L.C., Singletary J.N., Lienhart R.R. A new generation of 3D woven fabric performs and composites // SAMPE J. 2001. Vol. 37, No. 3. P. 3–17.

2. **Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M.** Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites // *Mechanics of Composite Materials*. 2009. Vol. 45, No. 2. P. 241–254.
3. **Медведский А.Л., Корнев Ю.В., Курбатов А.С.** Исследование физико-механических свойств 4D углерод-углеродного композиционного материала на макро и микро уровнях при действии высоких температур // *Тр. МАИ*. 2010. № 41.
4. **Композиционные материалы: справочник** / В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин и др.; под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
5. **Теплообмен.** Избранные работы члена-корреспондента РАН Б.С. Петухова и его учеников. М.: Шанс, 2012. 209 с.
6. **Лаптев А.Г., Николаев Н.А., Башаров М.М.** Методы интенсификации и моделирования тепломассообменных процессов: уч.-справ. пособие. М.: Теплотехник, 2011. 288 с.
7. **Пространственно-армированные композиционные материалы: справочник** / Ю.М. Тарнопольский, И.Г. Жигун, В.А. Поляков. М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
8. **Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С.** Теплопередача: учебник для вузов. Изд. 3-е, перераб. и доп. М.: Энергия, 1975. 488 с.
9. **Немировский Ю.В., Янковский А.П.** Теплопроводность конструкций с системой трубок, заполненных жидким теплоносителем // *Теплофизика и аэромеханика*. 2000. Т. 7, № 2. С. 267–284.
10. **Кудинов В.А., Кудинов И.В.** Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности / Под ред. Э.М. Карташова. М.: Книжный дом «Либроком», 2012. 280 с.
11. **Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А.** Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 571 с.
12. **Немировский Ю.В., Янковский А.П.** Теплопроводность однородных и композитных тонкостенных конструкций. Новосибирск: Арт-Авеню, 2008. 512 с.
13. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
14. **Варгафтик Н.Б.** Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Физматгиз, 1963. 708 с.
15. **Гребер Г., Эрк С.** Основы учения о теплообмене. М.–Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. 327 с.
16. **Немировский Ю.В., Янковский А.П.** О некоторых особенностях уравнений оболочек, армированных волокнами постоянного поперечного сечения // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 1997. Т. 3, № 2. С. 20–40.
17. **Ладыженская О.А.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
18. **Джураев А.** Системы уравнений составного типа. М.: Наука, 1972. 228 с.
19. **Янковский А.П.** Моделирование процессов теплопроводности в пространственно-армированных композициях с произвольной ориентацией волокон // *Прикладная физика*. 2011. № 3. С. 32–38.
20. **Немировский Ю.В., Янковский А.П.** Асимптотическое решение задачи нестационарной теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных оболочек // *Математические методы и физико-механические поля*. 2009. Т. 52, № 1. С. 172–188.
21. **Холл Дж., Уатт Дж.** Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1979. 312 с.
22. **Деккер К., Вервер Я.** Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 334 с.
23. **Физические свойства сталей и сплавов, применяемых в энергетике: справочник.** М.–Л.: Энергия, 1967. 240 с.

*Статья поступила в редакцию 21 октября 2013.,
после доработки — 19 февраля 2014 г.*