

Это совпадает с выражением, полученным в [5] для одиночной трещины. Относительная разность между длиной трещины, определяемой формулами (16) и (17) при $a/h \ll 1$, с точностью до членов первого порядка малости имеет вид

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\pi(c_1^2 - c_2^2)}{4c_1^2} \frac{a}{h} \quad (20)$$

При $\lambda = \mu$ и $a/h = 5$ эта величина составляет примерно 10%, так же как и максимальное значение отношения σ_{xy}/p , определяемого формулой (19).

Оценка точности решений статической и динамической задачи [4] в настоящее время не получена.

Поступила 1 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. 4-е. Изд-во АН СССР, 1954.
2. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного, изд. 2-е. Физматгиз, 1958.
4. Кузнецов В. М. О стационарном распространении системы трещин в упруго-хрупком материале. ПМТФ, 1964, № 3.
5. G a g g s I. W. On the propagation of a crack in an elastic-brittle material. J. Mech. Phys. Solids, 1960, vol. 8.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СИСТЕМЫ ТРЕЩИН ГРИФФИТСА В УПРУГО-ХРУПКОМ МАТЕРИАЛЕ

П. А. Мартынюк (Новосибирск)

В последнее время большой интерес представляют задачи теории трещин. Получение точного решения для систем трещин встречает значительные математические трудности. В работе [1] дается приближенное решение статической задачи теории равновесных трещин. В настоящей работе в предположении, высказанном в [1], исследуется вопрос взаимодействия трещин Гриффитса в упруго-хрупком материале. Оценена точность полученного решения.

Пусть в неограниченном изотропном теле имеется бесконечно большое количество трещин длиной $2l$, расположенных параллельно оси абсцисс, на расстоянии $2h$ одна от другой. Внутри каждой трещины на длине $2l$ действует постоянное давление p . Длина трещин может быть произвольной. Вследствие симметрии можно ограничиться рассмотрением бесконечной полосы $0 \leq y \leq h$, нижняя сторона которой проходит через трещину и ее продолжение, а верхняя — на половине расстояния между соседними трещинами. Требуется найти зависимость между p , h и l , если известны все упругие постоянные материала и модуль сцепления.

Рассматривается плоская деформация. В этом случае компоненты тензора напряжения σ_x , σ_y и σ_{xy} и вектора смещений u и v выражаются через две аналитические функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и их производные формулами Колосова — Мусхелишвили [2]

$$\sigma_x + \sigma_y = 2 [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \quad (1)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} = 2 [\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \quad (2)$$

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \quad (\kappa = 3 - 4\nu) \quad (3)$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона, μ — модуль сдвига. Граничные условия будут

$$\sigma_y = -p \quad (y = 0, \quad -l \leq x \leq +l) \quad (4)$$

$$\sigma_{xy} = 0 \quad (y = 0, \quad y = h, \quad -\infty < x < +\infty) \quad (5)$$

$$v = 0 \quad \begin{cases} (y = 0, & -\infty < x < -l, & +l < x < +\infty) \\ (y = h, & -\infty < x < +\infty) \end{cases} \quad (6)$$

Компоненты тензора напряжения на бесконечности ведут себя как

$$\sigma_{ij}(r) = o(r^{-1}) \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (7)$$

Вводя, согласно [1], предположение

$$\sigma_x = \sigma_y \quad \text{при } y = 0 \quad (8)$$

можем сформулировать задачу в терминах одной аналитической функции $\varphi'(z)$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \varphi'(z) &= -1/2 p \quad (y = 0, -l \leq x \leq +l) \\ \operatorname{Im} \varphi'(z) &= 0 \quad (y = 0 - \infty < x < -l, +l < x < +\infty) \\ \operatorname{Im} \varphi'(z) &= 0 \quad (y = h, -\infty < x < +\infty) \end{aligned} \quad (9)$$

Конформное отображение полосы $0 \leq y \leq h$ на верхнюю полуплоскость (фиг. 2) дается формулой

$$\xi = e^{\pi z/h} \quad (10)$$

В полуплоскости $\eta > 0$ получаем смешанную краевую задачу Келдыша—Седова [3].

Искомая аналитическая функция $\varphi'(z)$ должна иметь особенности порядка $x^{-1/2}$ в точках $z = -l$ и $z = +l$ соответственно при подходе слева и справа, причем коэффициенты при этих особенностях, в силу симметрии задачи, должны быть равными.

Решение, удовлетворяющее этим требованиям, имеет вид

$$\varphi'(z) = -\frac{p}{2} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{a}}{a+1} \left[\sqrt{a} \left(\frac{e^{\pi z/h} - a^{-1}}{e^{\pi z/h} - a} \right)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{e^{\pi z/h} - a}{e^{\pi z/h} - a^{-1}} \right)^{1/2} \right] \right\} \quad (11)$$

$(a = e^{\pi l/h})$

Используя (8) и (1), получаем, что в носиках трещин σ_y имеет особенность вида

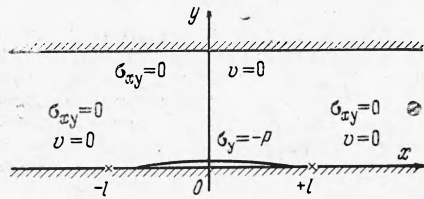
$$\sigma_y(-l-x) = \sigma_y(l+x) = \frac{N}{\sqrt{x}} - \frac{p}{2} + O(x^{3/2}), \quad N = p \left(\frac{h}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{e^{\pi l/h} - 1}{e^{\pi l/h} + 1} \right)^{1/2} \quad (12)$$

Согласно [4], имеем равенство

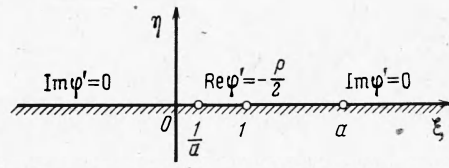
$$p \left(\frac{h}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{e^{\pi l/h} - 1}{e^{\pi l/h} + 1} \right)^{1/2} = \frac{K}{\pi} \quad (13)$$

где K — модуль сцепления.

Равенство (13) определяет значение давления p , соответствующее предельному равновесию данной системы трещин. После элементарных преобразований (13) полу-



Фиг. 1



Фиг. 2

чаем зависимость полудлины равновесной трещины от действующего давления p и расстояния между соседними трещинами h

$$l = \frac{h}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{p^2 + K^2/\pi h}{p^2 - K^2/\pi h} \quad (14)$$

В пределе при $h \rightarrow \infty$ получаем выражение, приведенное в [4]

$$l = 2K^2/\pi^2 p^2 \quad (15)$$

соответствующее изолированной трещине Гриффитса.

Из (14) видно, что при любом конечном h давление p , отвечающее неограниченно большим значениям l — длины трещин, стремится к критическому значению

$$p_* = \frac{1}{\sqrt{\pi h}} K$$

Причем с уменьшением расстояния между трещинами величина p_* увеличивается, в то время как из (15) следует, что при больших значениях l давление $p \rightarrow 0$.

Из фиг. 3 следует, что данная система трещин Гриффитса с расстоянием $2h$ между соседними трещинами может существовать только для давлений $p > p_*$. При $p < p_*$ в случае обратимых трещин они смыкаются. При равном значении давления p , действующего в теле трещины, длина изолированной трещины будет меньше, чем длина трещин в системе. Давление p при конечном h , отвечающее предельному равновесию, в случае системы больше, чем для одиночной трещины (при равной длине). В этом проявляется взаимодействие системы трещин.

Из формул (1), (2) получаем

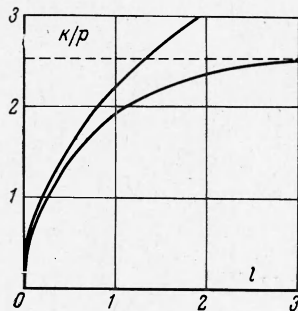
$$\sigma_y = 2\text{Re}\varphi'(z) + \text{Re}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)], \quad \sigma_x = 2\text{Re}\varphi'(z) - \text{Re}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \quad (16)$$

Учитывая, что $\sigma_{xy} = 0$ при $y = 0$, получаем, что предположение (8) эквивалентно равенству

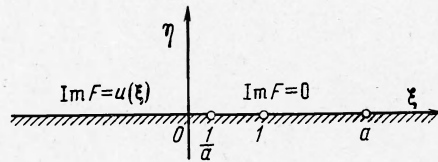
$$\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z) = 0 \quad \text{при } y = 0$$

которое выполнено строго только для случая одиночной трещины.

В случае системы трещин $\text{Re}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)]$ характеризует перераспределение напряжений, вызванное наличием соседних трещин. Оценим, до какого значения отношения l/h можно пользоваться полученным приближенным решением.



Фиг. 3



Фиг. 4

Для этого сформулируем задачу, для которой можно получить точное решение. Рассматривается бесконечно упругое тело, в котором имеется система параллельных трещин Гриффитса. Напряжения, действующие в теле, таковы, что вдоль каждой трещины $\sigma_x + \sigma_y = -2p$. Длина трещин $2l$, расстояние между соседними трещинами $2h$. В силу симметрии задачи ограничимся рассмотрением полосы $0 \leq y \leq h$.

Граничные условия будут

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= -2p & (y = 0, -l \leq x \leq +l) \\ \sigma_{xy} &= 0 & (y = 0, y = h, -\infty < x < +\infty) \\ v &= 0 & \left\{ \begin{aligned} (y = 0, -\infty < x < -l, +l < x < +\infty) \\ (y = h, -\infty < x < +\infty) \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (17)$$

При такой постановке задачи аналитическая функция $\varphi'(z)$ определяется равенством (11), являющимся точным решением поставленной задачи.

При $y = 0$ значения функции $\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)$ совпадают со значениями аналитической функции $z\varphi''(z) + \psi'(z)$ в рассматриваемой области, так как $z = \bar{z}$ при $y = 0$. Из (2) легко получить

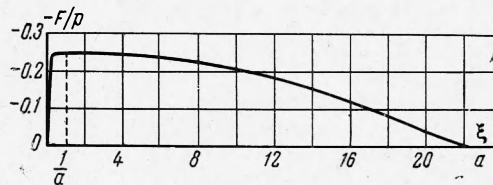
$$\sigma_{xy} = \text{Im}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \quad (18)$$

Из граничного условия $\sigma_{xy} = 0$ при $y = h$ имеем

$$\text{Im}[z\varphi''(z) + \psi'(z)] = 2h \text{Re}\varphi''(z) \quad (19)$$

При $y = 0$ из условия $\sigma_{xy} = 0$

$$\text{Im}[z\varphi''(z) + \psi'(z)] = 0 \quad (20)$$



Фиг. 5

Обозначим через $F(\xi)$ аналитическую функцию, соответствующую функции $z\varphi''(z) + \psi'(z)$. Отобразив полосу $0 \leq y \leq h$ на верхнюю полуплоскость $\eta > 0$,

получаем задачу Дирихле со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} F(\xi) &= u(\xi) & (-\infty < \xi \leq 0) \\ \operatorname{Im} F(\xi) &= 0 & (0 \leq \xi < +\infty) \end{aligned} \quad (21)$$

Используя (11) и следуя [2], получаем вид функции $u(\xi)$

$$u(\xi) = \frac{p}{4} \pi [2 - A] \frac{\xi(\xi + 1)}{[\xi^2 - \xi A + 1]^{3/2}} \quad \left(\begin{array}{l} A = a + a^{-1} \\ A \geq 2 \end{array} \right) \quad (22)$$

Решением поставленной задачи будет

$$F(\xi) = -\frac{p}{4} [2 - A] \left\{ \frac{2\xi}{\xi^2 - \xi A + 1} + \xi(\xi + 1) \chi(\xi) \right\} \quad (23)$$

Следует отметить, что функция $\chi(\xi)$ имеет две ветви, так как она выражается интегралом типа

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Этот интеграл имеет несколько ветвей в зависимости от знака a и знака $\Delta = 4ac - b^2$. При $-\infty < \xi < (a^{-1})$, $a < \xi < +\infty$, когда $\xi^2 - \xi(a + a^{-1}) + 1 > 0$, имеем

$$\chi(\xi) = \frac{1}{(\xi^2 - \xi A + 1)^{1/2}} \left[2 \ln \frac{\sqrt{a\xi - 1} + \sqrt{\xi/a - 1}}{\sqrt{\xi - a} + \sqrt{\xi - a^{-1}}} - \ln \xi \right] \quad (24)$$

При $1/a < \xi < a$, когда $\xi^2 - \xi(a + 1/a) + 1 < 0$, имеем

$$\chi(\xi) = \frac{-1}{(\xi^2 - \xi A + 1)(-\xi^2 + \xi A - 1)^{1/2}} \left[\arcsin \frac{A - 2\xi^{-1}}{\sqrt{A^2 - 4}} - \arcsin \frac{2\xi - A}{\sqrt{A^2 - 4}} \right] \quad (25)$$

Полученное решение не должно иметь особенностей в концах трещин. Полагая $st = a - s$ и $\xi = a + s$, после несложных преобразований нетрудно убедиться в этом. Из фиг. 5 видно, что функция $F(\xi)$ на отрезке действительной оси $1/a \leq \xi \leq a$ имеет максимум в точке $\xi = 1$ (что соответствует в плоскости x, y точке $z=0$). При конечном l и $h \rightarrow \infty$ справедливы представления (26)

$$a \approx 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \frac{s^4}{4!}$$

$$\frac{1}{a} \approx 1 - s + \frac{s^2}{2!} - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^4}{4!}$$

Совершая в (23), (24) предельный переход при $h \rightarrow \infty$ и учитывая (26), получаем

$$F(1) \sim (l/h)^2 \quad (27)$$

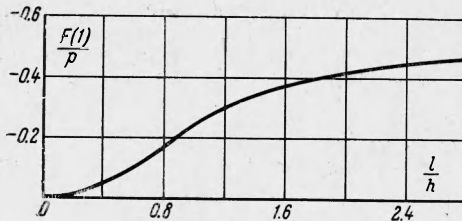
Следовательно, $F(\xi) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow \infty$, и полученное решение стремится к решению для одиночной трещины Гриффитса.

Из фиг. 6 можно сделать вывод, что приближенное решение с точностью до 10% будет справедливо для отношений $l/h \leq 0.5$.

Поступила 9 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов В. М. Об одном случае равновесия системы трещин в упруго-хрупком материале. ПМТФ, 1966, № 5.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. 4-е. Изд-во АН СССР, 1954.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного, изд. 2-е. Физматгиз, 1958.
4. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4.



Фиг. 6