получения наилучшего соответствия с экспериментальными данными время релаксации уменьшено приблизительно на 10 % ($\tau_\mu = 0{,}06$ мкс) по сравнению с расчетом в акустическом приближении. Распределения давления и удельного объема пор остаются подобными приведенным на рис. 4. Появляются лишь особенности, связанные с зависимостью скорости звука от давления: правая граница области разрушения быстрее смещается в глубину образца, и из-за размытия фронта волны разрежения растягивающие напряжения уменьшаются по абсолютной величине при уменьшении h, а не остаются практически постоянными, как это имеет место в акустике.

Таким образом, на основании проведенного анализа процесса роста пор в среде с нулевым порогом разрушения получены соотношения, позволяющие по экспериментально измеренному профилю скорости свободной поверхности образца при ударно-волновом воздействии найти объемную вязкость разрушения и действующие растягивающие напряжения (формулы (13) и (16)).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новиков С. А., Дивиов И. И., Иванов А. Г.** Исследование разрушения стали, алюминия и меди при взрывном нагружении // Физика металлов и металловедение.— 1964.— Т. 25, № 4.
2. **Пархоменко И. П., Уткин А. В.** Влияние амплитуды и длительности ударной волны на откольную прочность плексигласа // Детонация: Матер. IX Всесоюз. симпоз. по горению и взрыву, Суздаль, нояб. 1989.— Черноголовка, 1989.
3. **Калмыков Ю. Б., Канель Г. И., Пархоменко И. П. и др.** Поведение резины в ударных волнах и волнах разрежения // ПМТФ.— 1990.— № 1.
4. **Эйрих Ф. Р., Смит Т. Л.** Молекулярно-механические аспекты изотермического разрушения эластомеров // Разрушение/Под ред. Г. Либовица.— М.: Мир, 1976.— Т. 7, ч. 2.
5. **Gent A. N., Lindley P. B.** Internal rupture of bounded rubber cylinders in tension // Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A.— 1959.— V. 249, N 1257.
6. **Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Наука, 1966.
7. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1973.
8. **Канель Г. И., Черных Л. Г.** О процессе откольного разрушения // ПМТФ.— 1980.— № 6.
9. **Справочник** по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана.— М.: Наука, 1979.
10. **Курант Р., Фридрихс К.** Сверхзвуковое течение и ударные волны.— М.: ИЛ, 1950.
11. **Канель Г. И.** Модель кинетики пластической деформации металлов в условиях ударно-волнового нагружения // ПМТФ.— 1982.— № 2.
12. **Уилкинс М. Л.** Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике.— М.: Мир, 1967.

г. Черноголовка *Поступила 8/VI 1990 г.,*
в окончательном варианте — 8/V 1991 г.

УДК 534.4

В. А. Буряченко, В. З. Партон

МЕТОД ЭФФЕКТИВНОГО ПОЛЯ В СТАТИКЕ КОМПОЗИТОВ

Рассматривается линейно-упругая композитная среда, состоящая из однородной матрицы, в которой содержится случайное множество включений произвольной формы с неоднородными по объему включений механическими свойствами. Решается классическая задача [1—3] оценки эффективных модулей и средних концентраторов напряжений на включениях. Предлагаемый в работе подход является обобщением метода эффективного поля (МЭП), приведенного в [4—6] при совпадении механических свойств матрицы и среды сравнения. Обобщенный МЭП включает в себя как частные случаи известные методы структурной механики:

эффективной среды [3]. обобщенного сингулярного приближения [3], условных моментов [7, 8], метод Мори — Танака — Эшелби [9, 10] и методы, основанные на вариационных принципах [2].

1. Общие уравнения. Рассматривается макрообласть w с характеристической функцией W, содержащая случайное множество $X = (V_k, x_k, \omega_k)$ эллипсоидов v_k, с характеристическими функциями V_k, центрами x_k, образующими пуассоновское множество, полуосями $a_k^i\ (a_k^1 \geqslant a_k^2 \geqslant a_k^3)$ и совокупностью эйлеровых углов ω_k. Локальное уравнение состояния материала, связывающее тензоры напряжений $\sigma(x)$ и деформаций $\varepsilon(x)$, задается в форме

$$\sigma(x) = L(x)\varepsilon(x), \tag{1.1}$$

где $L(x)$ (четырехвалентный тензор модулей упругости) принимается однородным в матрице $v_0 = w \setminus v \left(v = \bigcup_{k=1} v_k\right)$: $L(x) = L^{(0)}$ в каждом включении $v_k\ (k = 1, 2, \ldots)$, $L(x) = L^{(k)}(x)$ является, вообще говоря, неоднородной функцией координат. Подставляя (1.1) в уравнение равновесия с заданными в смещениях $u(x)$ граничными условиями, получим дифференциальное уравнение относительно смещений

$$\nabla L_c \nabla u = -\nabla L_1(x) \nabla u. \tag{1.2}$$

Здесь ∇ — оператор симметрированного градиента; $L_1(x) \equiv L(x) - L_c$; введем однородный тензор модулей упругости $L_c = \mathrm{const}$ среды сравнения; в общем случае $L_c \neq L^{(0)}$. Сводя уравнение (1.2) к интегральному и преобразуя его по схеме [4—6], находим

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0 + \int U(x-y)\,[L_1(y)\,\varepsilon(y) - \langle L_1\varepsilon\rangle]\,dy, \tag{1.3}$$

где $U(x-y) = \nabla\nabla G(x-y)$; G — тензор Грина уравнения Ламе для неограниченной среды сравнения с модулем L_c: $\nabla L_c \nabla G(x) = -I\delta(x)$; $\delta(x)$ — дельта-функция. В (1.3) и ниже $\langle(\cdot)\rangle$, $\langle(\cdot)|x_1, \ldots, x_n; x_{n+1}, \ldots, x_m\rangle$ обозначают среднее и условное среднее по ансамблю статистически-однородного и эргодического поля X при условии, что в точках $x_1, \ldots, x_m$ находятся включения и $x_1, \ldots, x_n \neq x_{n+1}, \ldots, x_m$; $\varepsilon_0 \equiv \langle\varepsilon\rangle$. Определим также среднее по объему компонента

$$\langle(\cdot)\rangle_\alpha = \bar{v}_\alpha \int (\cdot)\, V_\alpha(x)\, dx, \quad \bar{v}_\alpha = \mathrm{mes}\, v_\alpha \quad (\alpha = 0, 1, \ldots). \tag{1.4}$$

При выводе (1.3) предполагалось, что область w содержит статистически большое число включений v; все рассматриваемые случайные величины описываются статистически-однородными случайными полями, и тем самым усреднение по ансамблю можно заменить усреднением по объему; расстояние $\rho = \rho(x)$ от x до границы ∂w области w много больше характерного размера включений $a^1/\rho \ll 1$. Поэтому последующее решение задачи (1.3) имеет нулевой порядок точности относительно малого параметра a^1/ρ.

Для оценки эффективных модулей усредним локальное уравнение (1.1) по объему $\langle\sigma\rangle = L^{(0)}\langle\varepsilon\rangle + \langle(L(x) - L^{(0)})\varepsilon(x)V(x)\rangle$, тогда

$$L^* = L^{(0)} + B^*, \quad \langle L_1\varepsilon V\rangle - L_1^{(0)}\langle\varepsilon V\rangle \equiv B^*\langle\varepsilon\rangle \tag{1.5}$$

$$\left(V \equiv \sum_{i=1} V_i, \quad L_1^{(\alpha)} = L^{(\alpha)} - L_c, \quad \alpha = 0, 1, \ldots\right).$$

Таким образом, для нахождения эффективных параметров необходима оценка среднего значения тензора поляризации внутри включений $\langle(L(x) - L^{(0)})\varepsilon V(x)\rangle$. Исследование полей деформаций только внутри включений существенно упрощает решение (1.3). Чтобы добиться интегрирования в правой части (1.3) только по объему включений, можно использовать два принципиально разных подхода. В первом случае постулируем $L_c \equiv L^{(0)}$, тогда $L_1^{(0)} \equiv 0$ и (1.3) запишем как

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0 + \int U(x-y)\,[L_1(y)\,\varepsilon(y)\,V(y) - \langle L_1 \varepsilon V\rangle]\,dy, \tag{1.6}$$

во втором L_c выберем достаточно произвольно, но сделаем дополнительное допущение об однородности полей деформаций в матрице: $\varepsilon(x) \equiv \langle \varepsilon \rangle_0$, $x \in v_0$. Тогда (1.3) эквивалентно уравнению

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0 + \int U(x-y)\,\big[\big(L_1(y)\,\varepsilon(y) - L_1^{(0)} \langle \varepsilon \rangle_0\big)\,V(y) - \\ - \big\langle\big(L_1\varepsilon - L_1^{(0)} \langle \varepsilon \rangle_0\big)\,V\big\rangle\big]\,dy. \tag{1.7}$$

Введем обозначение $M_1(y) \equiv L_1(y)V(y)$, $\alpha(y) \equiv -L_1^{(0)} \langle \varepsilon \rangle_0 V(y)$ и представим (1.7) в единой форме

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0 + \int U(x-y)\,\{M_1(y)\,\varepsilon(y) + \alpha(y) - \langle M_1 \varepsilon + \alpha\rangle\}\,dy, \tag{1.8}$$

причем при $L_c \equiv L^{(0)}$ в (1.8) имеет место $\alpha(y) \equiv 0$.

Для вычисления в (1.8) средних $\langle M_1 \varepsilon \rangle$, необходимых при оценке эффективного модуля L^*, введем $\varphi(v_m | v_1, \ldots, v_n)$ — условные плотности распределения m-го включения в области при фиксированных включениях в областях $v_1, \ldots, v_n$. Относительно функции $\varphi(v_m | v_1, \ldots, v_n)$ известно, что $\varphi(v_m | v_1, \ldots, v_n) = 0$ при значениях x_m, лежащих внутри некоторой корреляционной ямы, состоящей из объединения областей $v_j^0 \supset v_j$ $(j = 1, \ldots$ $\ldots, n)$ характеристическими функциями V_j^0, и $\varphi(v_m | v_1, \ldots, v_n) \to \varphi(v_m)$ при $|x_i - x_m| \to \infty$, $i = 1, \ldots, n$. Усредним (1.8) на множествах $X(\cdot | v_1)$, $X(\cdot | v_1, v_2)$ при фиксированных включениях v_1; v_1, v_2 и т. д. с помощью различных плотностей распределения $\varphi(v_m | v_1, \ldots, v_n)$. Получим бесконечную систему связных интегральных уравнений

$$\varepsilon(x) - \int U(x-y)\,V_1(y)\,\langle M_1(y)\,\varepsilon(y) + \alpha(y)\,|\,x_1\rangle\,dy = \\ = \varepsilon_0 + \int U(x-y)\,[\langle M_1(y)\,\varepsilon(y) + \alpha(y)\,|\,y;\ x\rangle - \langle M_1 \varepsilon + \alpha\rangle]\,dy, \tag{1.9}$$

$$\varepsilon(x) - \sum_{i=1}^{n} \int U(x-y)\,V_i(y)\,\langle M_1(y)\,\varepsilon(y) + \alpha(y)\,|\,x_1, \ldots, x_n\rangle\,dy = \\ = \varepsilon_0 + \int U(x-y)\,[\langle M_1(y)\,\varepsilon(y) + \alpha(y)\,|\,y;\ x_1, \ldots, x_n\rangle - \langle M_1 \varepsilon + \alpha\rangle]\,dy.$$

Поскольку x в n-й строке системы (1.9) может пробегать значения во включениях $v_1, \ldots, v_n$, то n-я строка содержит на самом деле n уравнений. Обозначим правую часть n-й $(n = 1, 2, \ldots)$ строки через поле $\widehat{\varepsilon}(x)_{1, \ldots, n}$, имеющее простой физический смысл поля деформаций, в котором находятся фиксированные n включений. При этом каждое включение v_i нз выбранных фиксированных включений находится в поле

$$\bar{\varepsilon}_i(x) = \widehat{\varepsilon}(x)_{1, \ldots, n} + \sum_{j \neq i} \int U(x-y)\,V_j(y)\,[M_1(y)\,\sigma(y) + \alpha(y)]\,dy, \quad x \in v_i. \tag{1.10}$$

Как следует из структуры уравнений (1.9), (1.10), поля напряжений внутри включений v_i зависят только от значения неоднородного, вообще говоря, поля $\bar{\varepsilon}_i$ в области v_i. Чтобы не учитывать в дальнейшем зависимость слагаемых системы (1.9) от $x \in v_i$, усредним каждую n-ю строку $(n = 1, 2, \ldots)$ по объему i-го включения $(i = 1, \ldots, n)$, тогда

$$\langle \varepsilon \,|\, x_1, \ldots, x_n\rangle_i - \sum_{j=1}^{n} \bar{v}_i^{-1} \int\int U(x-y)\,V_i(x)\,V_j(y)\,\langle M_1(y)\,\varepsilon(y) + \\ + \alpha(y)\,|\,x_1, \ldots, x_n\rangle\,dy dx = \varepsilon_0 + \bar{v}_i^{-1} \int\int U(x-y)\,V_i(x)\,V_j(y)\,[\langle M_1(y)\,\varepsilon(y) + \\ + \alpha(y)\,|\,y;\ x_1, \ldots, x_n\rangle - \langle M_1 \varepsilon + \alpha\rangle]\,dy dx. \tag{1.11}$$

Система (1.11) при принятых допущениях об однородности тензоров ε_0, $L^{(0)}$, L_c и статистической однородности и эргодичности поля является точной лишь для $L_c = L^{(0)}$, тогда $\alpha(y) \equiv 0$. Для $L_c \neq L^{(0)}$ система (1.11) получена при дополнительном допущении об однородности поля деформаций в матрице. При выводе (1.11) не накладывались ограничения на форму, механические свойства включений и структуру условной плотности распределения $\varphi(v_j|v_1, \ldots, v_n)$.

2. Эффективное поле. Для замыкания и последующего приближенного решения системы (1.11) примем гипотезы МЭП [4, 5]:

H1) каждое включение v_i имеет эллипсоидальную форму и точечное приближение размеров при анализе полей напряжений вне рассматриваемого включения и находится в однородном поле $\bar{\varepsilon}(x_i)$;

H2) при достаточно большом n имеет место замыкание $\langle \widehat{\varepsilon}\,(x)_{1,\ldots,j,\ldots,n+1}\rangle_i = \langle \varepsilon(\widehat{x})_{1,\ldots,n}\rangle_i$, где правая часть равенства не содержит индекса $j \neq i$, $1 \leqslant j \leqslant n$ и $x \in v_i$.

Для эллипсоидальной формы включений v_i из (1.10), (1.11) получим алгебраическое уравнение

$$\langle \varepsilon(x)\rangle_i - \langle U(x)\rangle_i \langle M_1(x)\varepsilon(x) + \alpha(x)\rangle_i = \langle \bar{\varepsilon}(x)\rangle_i, \tag{2.1}$$

в котором, согласно свойству внутренних потенциалов эллипсоида [1, 11], тензор $\langle U(x)\rangle_i = \mathrm{const}$ при $x \in v_i$; допущение об эллипсоидальной форме включения, как будет показано в п. 7, может быть ослаблено. При решении системы (1.11) нужно знать зависимости $\langle \varepsilon(x)\rangle_i$, $\langle M_1(x)\varepsilon(x) + \alpha(x)\rangle_i$ от $\langle \bar{\varepsilon}(x_i)\rangle$. Ввиду линейности задачи (2.1) существуют постоянные тензоры четвертого ранга A_i и C_i такие, что

$$\begin{gathered}\langle \varepsilon(x)\rangle_i = A_i\langle \bar{\varepsilon}(x_i)\rangle_i + C_i\alpha(x_i),\\ \bar{v}_i\langle M_1(x)\varepsilon(x) + \alpha(x)\rangle_i = R_i\langle \bar{\varepsilon}(x_i)\rangle_i + F_i\alpha(x_i)\\ \left(R_i = \langle U(x)\rangle_i^{-1}(A_i - I)\bar{v}_i,\quad F_i = \langle U(x)\rangle_i^{-1}C_i\bar{v}_i\right).\end{gathered} \tag{2.2}$$

Например, для однородного эллипсоидального включения v_i с $M_1^{(i)} = \mathrm{const}$

$$A_i = \left(I + P_iM_1^{(i)}\right)^{-1},\quad C_i = -A_iP_i. \tag{2.3}$$

Здесь $P_i = -\int U(x-y)V_i(y)\,dy$ $(x \in v_i)$ — постоянный тензор, не зависящий от упругих модулей и размеров (но не формы) эллипсоида v_i; правила вычисления P_i (2.3) для различных случаев анизотропии формы включения и свойств матрицы рассмотрены в [1]. Тензоры A_i, C_i могут быть найдены, например, численно для любой структуры поля $\bar{\varepsilon}_i(x)$ $(x \in v_i)$ и зависят от его структуры. В дальнейшем для получения обозримых результатов будем считать поле $\bar{\varepsilon}(x)$ слабонеоднородным и однородным согласно гипотезе H1 внутри любой области v_i: $\bar{\varepsilon}(x) = \bar{\varepsilon}(x_i)$, $x \in v_i$. В случае однородного поля $\bar{\varepsilon}(x)$ $(x \in v_i)$ задача (2.2) решена аналитически для слоистых эллипсоида [12] и шара [13].

Под точечным приближением размеров включения гипотезы H1 будем понимать выполнение равенства

$$\begin{gathered}\int U(x-y)V_i(y)(M_1(y)\varepsilon(y) + \alpha(y))\,dy =\\ = \langle U(x-y)\rangle_i\langle M_1(y)\varepsilon(y) + \alpha(y)\rangle_i\bar{v}_i\end{gathered} \tag{2.4}$$

при $x \notin v_i$. Соотношение (2.4) означает, что асимптотика возмущенного поля включения с конечными размерами и асимптотика точечного включения, которым оно моделируется, совпадают на бесконечности.

3. Оценка взаимодействия конечного числа включений. При допущениях гипотезы H1 система (1.11) при фиксированных значениях

$\langle\widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n}\rangle_i$ $(x \in v_i)$ правых частей уравнений становится алгебраической:

$$(3.1)\quad \langle\bar{\varepsilon}(x)\,|\,x_1,\ldots,x_n\rangle_i - \sum_{j=1}^{n} \bar{v}_i^{-1}\int\int U(x-y)\,V_j(y)\,V_i(x)\,\langle M_1(y)\,\varepsilon(y) + \alpha(y)\,|\,x_1,\ldots,x_n\rangle_j dxdy = \langle\widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n}\rangle.$$

Используя (2.2) для одного включения в поле $\langle\widehat{\varepsilon}(x_i)\rangle_i$ (1.10) $(i = 1,\ldots,n)$, перепишем (3.1) в виде

$$(3.2)\quad \langle\bar{\varepsilon}(x)\,|\,x_1,\ldots,x_n\rangle_i - \sum_{j\neq i}(\bar{v}_j\bar{v}_i)^{-1}\int\int U(x-y)\,V_j(y)\,V_i(x)\times \{R_j\langle\bar{\varepsilon}(y)\,|\,x_1,\ldots,x_n\rangle_j + F_j\alpha\}\,dxdy = \langle\widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n}\rangle.$$

Система (3.2) является линейной алгебраической относительно $\langle\widehat{\varepsilon}(x)|x_1,\ldots,x_n\rangle \equiv \langle\widehat{\varepsilon}(x_i)|x_1,\ldots,x_n\rangle$ и может быть решена стандартными методами линейной алгебры. Для этого перейдем от тензорной формы записи (3.2) к матричной [3]. Сформулируем матрицу Z^{-1} с элементами Z^{-1}_{mk} $(m,\ k = 1,\ \ldots,\ n)$ в виде подматриц (6×6)

$$Z^{-1}_{mk} = I\delta_{mk} - (1-\delta_{mk})\,R_m S(x_m - x_k),$$

$$S(x_m - x_k) = (\bar{v}_m\bar{v}_k)^{-1}\int\int U(x-y)\,V_m(x)\,V_k(y)\,dxdy,$$

тогда решение (3.2) представим как

$$(3.3)\quad R_i\langle\bar{\varepsilon}(x_i)\,|\,x_1,\ldots,x_n\rangle + F_i\alpha = \sum_{j=1}^{n} Z_{ij}\big(R_j\langle\widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n}\rangle_j + F_j\alpha\big).$$

Решение (3.2) может быть построено также методом последовательных приближений [4, 5]; так, с учетом первых двух итераций имеем

$$(3.4)\quad R_i\langle\bar{\varepsilon}(x_i)\,|\,x_1,\ldots,x_n\rangle + F_i = R_i\langle\widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n}\rangle_i + F_i + \sum_{j\neq i} R_i S(x_i - x_j)\,[R_j\langle\widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n}\rangle_j + F_j].$$

Заметим, что принятие «квазикристаллического» приближения [14]

$$(3.5)\quad \langle\varepsilon(x)|x_1,\ \ldots,\ x_n\rangle_i = \langle\varepsilon(x)\rangle_i$$

эквивалентно допущениям

$$(3.6)\quad \langle\bar{\varepsilon}(x_i)|x_1,\ \ldots,\ x_n\rangle = \langle\widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n}\rangle_i,\ Z_{ij} = I\delta_{ij}.$$

Частные случаи формулы (3.3) рассмотрены при $L_c = L^{(0)}$ в [4, 15—18] для двух шаровых включений [15, 16] и плоских сфероидальных трещин [17, 18]. Показано, что для двух равных круговых в плане трещин, лежащих в нормально нагруженной плоскости, допущение об однородности полей $\bar{\varepsilon}(x_i)$ (гипотеза H1) в окрестности трещины приводит к погрешности в оценке коэффициента интенсивности напряжений 2 % при расстоянии между трещинами, равном 0,01 их радиуса [18]. Столь высокая точность МЭП деформаций или напряжений [4, 17, 19] (названных в [19] псевдонагрузкой) обусловлена незначительным изменением поля $\bar{\varepsilon}(x)$ $(x \in v_i)$ внутри включения, погрешность аппроксимации $\bar{\varepsilon}(x)$ $(x \in v_i)$ полиномами различной степени оценена в [17].

4. Оценка эффективного модуля. Полученные решения для одного (2.2) и конечного числа включений (3.3), находящихся в эффективных полях $\bar{\varepsilon}(x)$ и $\widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n}$, принятие гипотезы H2 позволяют решить систему (1.11). Действительно, из (1.11) имеем замкнутую систему интегральных уравнений относительно полей $\langle\widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,j}\rangle_i$ $(j = 1,\ \ldots,\ n;$

$i = 1, \ldots, j$):

(4.1) $$\langle \widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,j}\rangle_i =$$
$$= \varepsilon_0 + \int \Big\{ S(x_i - x_q)\, V(x_q;\ x_1, \ldots, x_j) \sum_{l=1}^{j+1} Z_{ql} \big(R_l \langle \widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,j+1}\rangle_l + F_l \alpha \big) -$$
$$- S_i(x_i - x_q) \langle R\widehat{\varepsilon}_1 + F\alpha\rangle \Big\}\, dx_q,$$
$$\langle \widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n}\rangle_i =$$
$$= \varepsilon_0 + \int \Big\{ S(x_i - x_q)\, V(x_q;\ x_1, \ldots, x_{n-1}) \sum_{l=1}^{n} Z_{ql} \big(R_l \langle \widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n}\rangle_l + F_l \alpha \big) -$$
$$- S_i(x_i - x_q) \langle R\widehat{\varepsilon}_1 + F\alpha\rangle \Big\}\, dx_q,$$

где $S_i(x_i - x_q) = \bar{v}_i^{-1} \int U(x - x_q)\, V_i(x)\, dx, \quad x_q \notin v_i$.

В правой части последнего уравнения (4.1) тензор $\widehat{\varepsilon}_{1,\ldots,n}$ образован из тензора $\widehat{\varepsilon}_{1,\ldots,n}$ левой части заменой одного из индексов на q. Система (4.1) является линейной относительно $\langle \widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,j}\rangle_l$ ($j = 1, \ldots, n$; $l = 1, \ldots, j$), при этом в каждой j-й строке с $\langle \widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,j}\rangle_l$ в левой части содержится j уравнений, так как $i = 1, \ldots, j$. Значение $\langle \widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n}\rangle_i$ ($i = 1, \ldots, n$) оценивается из последней строки (4.1) методом последовательных приближений при всех возможных положениях включений $v_1, \ldots, v_n$. Нужно учесть также, что $\langle \widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n}\rangle_i \to \langle \widehat{\varepsilon}(x_i)\rangle_i$ при $|x_j - x_i| \to \infty$, $j = 1, \ldots, n$, $j \neq i$. Найденное значение $\langle \widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n}\rangle_i$ подставляем в правую часть $(n - 1)$-й строки системы (4.1), определяем $\langle \widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n-1}\rangle_i$ ($i = 1, \ldots, n - 1$) и т. д. После оценки $\langle \widehat{\varepsilon}(x_i)\rangle_i$ и $\langle M_1(x)\varepsilon(x) + \alpha(x)\rangle_i$ в соотношениях (1.11), (2.2) по формуле (1.7) оцениваем эффективный модуль L^*, используя равенство

(4.2) $$\langle \varepsilon\rangle_0 = \big(c_0 + \langle VC\rangle L_1^{(0)}\big)^{-1} \big(\varepsilon_0 - \langle VA\widehat{\varepsilon}_1\rangle\big), \quad c_\alpha = \langle V_\alpha\rangle \quad (\alpha = 0, 1, \ldots).$$

Проведем на физическом уровне строгости оценку снизу точности предлагаемого МЭП. В [15, 20] при анализе уравнений теории упругости композитов с $L_c = L^{(0)}$, аналогичных (1.9), принималось $\langle \widehat{\varepsilon}(x)_{12}\rangle_i = \varepsilon_0$ ($i = 1, 2$), $\langle \widehat{\varepsilon}(x)_1\rangle_1 = \varepsilon_0$, тогда по второму уравнению (1.1) оценивали $\langle M_1(x_2)\varepsilon(x_2) | x_2;\ x_1\rangle$, а по первому уравнению (1.9) и (2.2) — эффективные параметры (1.5). Допущение $\langle \varepsilon\widehat{(x)}_1\rangle_1 = \varepsilon_0$ позволяет определить коэффициент при первой степени по концентрации c включений в зависимости $L^* = L^*(c)$, а допущение $\langle \widehat{\varepsilon}(x)_{12}\rangle_i = \varepsilon_0$ ($i = 1, 2$) — коэффициент при c^2. В [20] задача оценки бинарного взаимодействия равных шаровых включений $\langle M_1(x_2)\varepsilon(x_2) | x_2;\ x_1\rangle$ при $\langle \widehat{\varepsilon}(x)_{12}\rangle_i = \varepsilon_0$ ($i = 1, 2$) решалась численно с помощью полиномов Лежандра, а в [15] — при допущении, более сильном, чем (2.4):

(4.3) $$\int U(x - y)\, V_2(y)\, M_1(y)\, \varepsilon(y)\, dy = U(x_1 - x_2)\, M_1(x_2)\, \varepsilon(x_2), \quad x \in v_1.$$

Оказалось, что для жестких шаровых включений в несжимаемой матрице коэффициент при c^2, по данным [15], равен 4,84 и отличается от более точного численного результата 5,01 [20] на 3,3 %. Аналогично предположение $\langle \widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n}\rangle = \varepsilon_0$ вместо $\langle \widehat{\varepsilon}(x)_{12}\rangle_i = \varepsilon_0$ ($i = 1, 2$) позволяет представить зависимость $L^* = L^*(c)$ в виде полинома степени n относительно c. Поскольку в МЭП поле $\langle \widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n}\rangle_i$ не постулируется, а оценивается из самосогласованного уравнения (4.1), то МЭП при решении задачи взаимодействия и включений (3.3), (4.1) позволяет обеспечить точность оценки $L^* = L^*(c)$ выше полинома степени n. Решение уравнений (3.3), (4.1) назовем решением уравнения (1.10) n-частичного приближения. При решении задачи n-частичного приближения исследуется не все пространство, а конечная область $v(x_1, \ldots, x_n) \supset v_1, \ldots, v_n$ (зависящая, вообще говоря, от числа и размеров $v_1, \ldots, v_n$), поскольку значение интеграла в правой части (4.1) по области $w \setminus v(x_1, \ldots, x_n)$ становится пренебрежимо малым. Например, при решении задачи (1.8) двухчастичного приближения шаровая область $v(x_1, x_2)$ с центром в x_1 и радиусом, в 5 раз превышающим радиус включений, обеспечивает погрешность в оценке L^* не более 3 % по сравнению с интегрированием уравнения (4.1) с $n = 2$ по области w. Таким образом, имеет место принцип локальности [21] и область $v(x_1, \ldots, x_n)$ конечна, тем самым асимптотически при больших n выполняется равенство $\langle \hat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n+1} \rangle_i = \langle \hat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n} \rangle_i$ и применение гипотезы Н2 оправданно. При этом для приближения поля $\langle \hat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n+1} \rangle_i$ по гипотезе Н2 в качестве $n+1$ выбирается индекс j, для которого достигается $\max|x_j - x_i|$, $j = 1, \ldots, n+1$.

5. Аналитическая приближенная оценка L^*. Решение задачи (4.1) на ячейке n-го приближения предполагает решение системы (4.1) для произвольных координат центров включений и их ориентаций. Задача существенно упрощается, если ограничиться двухчастичным приближением и допущением

$$\langle \hat{\varepsilon}(x)_{12} \rangle_i = \langle \bar{\varepsilon}(x_i) \rangle = \mathrm{const} \quad (i = 1, 2). \tag{5.1}$$

Тогда из первого уравнения (4.1) и (3.3) получим

$$\begin{aligned} R_i \langle \bar{\varepsilon}_i \rangle + F_i\alpha = (R_i\varepsilon_0 + F_i\alpha) + R_i \int \Big\{ S(x_i - x_j) \sum_{l \neq i,j} Z_{jl} \big(R_l \langle \bar{\varepsilon}_l \rangle + \\ + F_l\alpha \big) \varphi(v_j \,|\, v_j;\ v_i) - S_i(x_i - x_j) \langle R\bar{\varepsilon} + F\alpha \rangle n_j \Big\} dx_j. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Система (5.2) является линейной алгебраической и может быть решена для произвольного числа компонентов в предположении, что включения относятся к разным компонентам, если отличаются механическими свойствами, размерами или ориентациями. Число компонентов, а значит, и размерность системы (5.2) могут быть сокращены на 2—3 порядка, если постулировать независимость поля $\bar{\varepsilon}_i$ от ориентации включения v_i. Тогда, усредняя (5.2) по ориентациям включений v_i с помощью операции $\langle (\cdot) \rangle_\omega$ и принимая для получения обозримых результатов, что $\langle R_i S_i \rangle_\omega = \langle R_i \rangle_\omega \langle S_i \rangle_\omega$, $\langle R_i S_{jl} R_l \rangle_\omega = \langle R_i \rangle_\omega \langle S_{jl} \rangle_\omega \langle R_l \rangle_w$, имеем

$$\begin{aligned} \langle R_i \rangle_\omega \langle \bar{\varepsilon}_i \rangle + \langle F_i \rangle_\omega \alpha = (\langle R_i \rangle_\omega \varepsilon_0 + \langle F_i \rangle_\omega \alpha) + \\ + \langle R_i \rangle_\omega \int \langle S(x_i - x_j) \rangle_\omega \sum_{l \neq i,j} Z_{jl} \big(\langle R_l \rangle_\omega \langle \bar{\varepsilon}_l \rangle_\omega + \\ + \langle F_l \rangle_\omega \alpha \big) \varphi(v_j \,|\, v_j;\ v_i) - \langle S_i \rangle_\omega \langle R\bar{\varepsilon} + F\alpha \rangle \} dx_j, \end{aligned} \tag{5.3}$$

где при вычислении Z_{ij} также проведена замена $R_i S(x_i - x_j)$ на $\langle R_i \rangle_\omega \times \langle S(x_i - x_j) \rangle_\omega$.

Уравнение (5.3) может быть представлено в матричном виде

$$\sum_{j=1}^{N} Y_{ij} \big(\langle R_j \rangle_\omega \langle \bar{\varepsilon}_j \rangle_\omega + \langle F_j \rangle_\omega \alpha \big) = (\langle R_i \rangle_\omega \varepsilon_0 + \langle F_i \rangle_\omega \alpha) \quad (i = 1, \ldots, N). \tag{5.4}$$

Здесь подматрицы

$$\begin{aligned} Y_{ij} = \delta_{ij} \Big(I - \langle R_i \rangle_\omega \sum_{k=1}^{N} \int \langle S(x_i - x_k) \rangle_\omega Z_{ki} \varphi(v_k \,|\, v_k;\ v_i)\, dx_k \Big) - \\ - \langle R_i \rangle_\omega \int \{ \langle S(x_i - x_j) \rangle_\omega Z_{ji} \varphi(v_j \,|\, v_j;\ v_i) - \\ - \langle S_i(x_i - x_j) \rangle_\omega n_j \} V(x_j;\ x_i)\, dx_j - \langle R_i \rangle_\omega \langle P(v'_{ij}) \rangle_\omega n_j. \end{aligned} \tag{5.5}$$

В случае «квазикристаллического» приближения (3.5), (3.6) выражение (5.5) упрощается:

$$(5.6)\qquad Y_{ij} = I\delta_{ij} - \langle R_i\rangle_\omega \langle P(v'_{ij})\rangle_\omega n_j -$$
$$- \langle R_i\rangle_\omega \int (\langle S(x_i - x_j)\rangle_\omega \varphi(v_j \mid v_j;\ v_i) - \langle S_i\rangle_\omega n_j) V(x_j;\ x_i)\, dx_j.$$

Из (5.4), (5.5) получим решение (5.3) как

$$(5.7)\qquad \langle R_i\rangle_\omega \langle \bar{\varepsilon}_i\rangle + \langle F_i\rangle_\omega \alpha = \sum_{j=1}^{N} (Y^{-1})_{ij} (\langle R_j\rangle_\omega \varepsilon_0 + \langle F_j\rangle_\omega \alpha)$$

и с помощью (4.2) находим выражение для эффективного модуля (1.5):

$$(5.8)\qquad L^* = L_c + \sum_{i,j=1}^{N} n_i Y_{ij}^{-1} \langle R_j\rangle_\omega +$$
$$+ \left\{ \sum_{i,j=1}^{N} n_i \left[Y_{ij}^{-1} \langle F_j\rangle_\omega - \langle F_i\rangle_\omega \right] \right\} L_1^{(0)} (c_0 - \langle VC\rangle L_1^{(0)})^{-1} \times$$
$$\times \left[I + \sum_{i=1}^{N} c_i \langle A_i\rangle_\omega \langle R_i\rangle_\omega^{-1} \left(\langle F_i\rangle_\omega - \sum_{j=1}^{N} n_i Y_{ij}^{-1} \langle F_j\rangle_\omega \right) L_1^{(0)} (c_0 - \langle VC\rangle L_1^{(0)})^{-1} \right]^{-1} \times$$
$$\times \left[I - \sum_{i=1}^{N} c_i \langle A_i\rangle_\omega \langle R_i\rangle_\omega^{-1} \sum_{j=1}^{N} Y_{ij}^{-1} \langle R_j\rangle_\omega \right].$$

6. Следствия МЭП. Покажем, что многие наиболее известные методы структурной механики вытекают из предлагаемого МЭП. Начнем со случая $L_c = L^{(0)}$, когда $\alpha(y) \equiv 0$ и отпадает необходимость в постулировании однородности поля деформацией, тогда формула (5.8) существенно упрощается:

$$(6.1)\qquad L^* = L^{(0)} + \sum_{i,j=1} n_i Y_{ij}^{-1} \langle R_j\rangle_\omega.$$

Из (6.1) при принятии дополнительных допущений об однородности включений следуют соотношения [4—6]; в свою очередь, из [4—6] вытекает более частный результат для одинаковых шаровых включений, позже независимо полученный в [22]. В приближенном варианте МЭП [23—26] делалось допущение о «квазикристаллическом» приближении поля $\bar{\varepsilon}(x_1|x_1;\ x_2) = \bar{\varepsilon}(x_1)$, или, что то же самое, $Z_{ij} = I\delta_{ij}$ (3.6), это позволяет замкнуть первое уравнение (4.1) и ограничиться одночастичным приближением решения (1.8). Тогда, если в представлении Y_{ij} (5.6) сделать дополнительные предположения об однородности включений и зависимости $\varphi(v_j|v_j;\ v_i)$ только от $|x_i - x_j|$, получим результаты [26]. Если, кроме того, в (5.6) не рассматривать усреднение по ориентациям включений, то формулы (6.1), (5.6) эквивалентны предложенным в [23, 24]. В [4—6] показано, что двухчастичное приближение решения задачи (4.1) при допущении (5.1) привело в ряде случаев к уточнению оценок L^* более чем в 2 раза по сравнению с [23, 25].

Заметим, что в [24, 25, 27] применялись исходные уравнения, отличные от точного (1.3):

$$(6.2)\qquad \varepsilon(x) = \varepsilon_0 + \int U(x - y) L_1(y) \varepsilon(y)\, dy,$$

которое корректно лишь для конечного числа включений. Поскольку интеграл в (6.2) расходится на бесконечности, то следует постулировать форму области w [25] или определять действие обобщенной функции U на постоянных $m = \text{const}$ [24]:

$$(6.3)\qquad \int U(x - y)\, m\, dy = 0.$$

Формула (6.3) неизвестна ранее в теории обобщенных функций. В методе мультиполярного разложения [27, 28] использовался частный случай

(3.4), (5.2), причем в выражении, аналогичном (5.2), отсутствовал член $S_i(x_i - x_j)\langle R\bar{\varepsilon} + F\alpha\rangle n_j$, что также нельзя признать корректным.

Большое распространение получил метод Мори — Танака — Эшелби [9, 29] (ссылки в [10]), по которому среднее поле деформации внутри однородных включений оценивалось из одночастичной задачи (2.2) в предположении, более сильном, чем (3.6) $\langle \bar{\varepsilon}(x_i)\rangle_i = \langle \varepsilon\rangle_0$:

$$\langle \varepsilon(x)\rangle_i = A_i \langle \varepsilon\rangle_0.$$

Тогда из тождества $\langle \varepsilon V\rangle - c_0\langle \varepsilon\rangle_0 = \langle \varepsilon\rangle$ и (1.7) вытекает выражение

$$L^* = L^{(0)} + \langle L_1 A V\rangle [I - (\langle A V\rangle - c)]^{-1},$$

которое для одинаково ориентированных неоднородностей является частным случаем формул (5.6), (6.1). Таким образом, имело место частичное дублирование результатов, полученных эквивалентными методами Мори — Танака — Эшелби [9, 10] и одночастичным приближением МЭП [23, 24].

Перейдем к рассмотрению случая $L_c \neq L^{(0)}$. Априорного обоснования для конкретного выбора L_c не существует, если не считать условия о знакопостоянстве квадратичной формы $(L_1\varepsilon)\varepsilon$, используемого при доказательстве вариационного принципа Хашина — Штрикмана [2, 30]. Оправданием для выбора в качестве L_c [7, 8] оценок L^* по Фойхту или Рейссу [8] может служить лишь совпадение частных экспериментальных данных и расчетных кривых. Кроме того, выбор между оценками Фойхта или Рейсса осуществляется на основании покомпонентного сравнения тензоров модулей упругости компонентов (а не их соответствующих квадратичных форм), что приводит к неоднозначным выводам даже для изотропных материалов.

В известном методе условных моментов [7, 8] делается допущение об однородности полей деформаций не только внутри матрицы, но и внутри включений. Принимается распространенное «квазикристаллическое» приближение (3.5), и при получении конкретных оценок L^* обычно рассматриваются одинаково ориентированные включения из одного материала. Каждое из этих допущений является более сильным, чем аналогичные в МЭП. Поэтому одночастичное приближение МЭП (5.6)—(5.8) включает в себя как частный случай результаты, найденные методом условных моментов [7, 8]. При этом в [7, 8] учет формы включений осуществляется через заданную анизотропию условной плотности распределения $\varphi(v_j|v_j;\ v_i)$. При равновероятной ориентации включений возможно получение изотропной функции φ [3] и оценка эффективного модуля L^* будет инвариантной относительно формы включений. Такого результата можно избежать при непосредственном учете формы включений через тензор P, как это сделано в [2] на основании вариационного принципа. При одинаково ориентированных эллипсоидальных включениях результаты [2, 8] эквивалентны.

По методу эффективной среды (методу самосогласования) [3] принимаются $L_c = L^*$ и частный случай «квазикристаллического» приближения (3.5), что равносильно допущению $Y_{ij} = I\delta_{ij}$ в (5.6). По методу сингулярного приближения [3], инвариантному относительно формы включений, в общем уравнении (1.3) делается замена оператора с ядром U на постоянный тензор

$$g^s = \int U^s(x)dx$$

(U^s — сингулярная составляющая U [3]), тем самым автоматически принимается ряд сильных допущений: $P_i = -g^s$, выполнение равенства (2.3), однородность полей деформаций в компонентах, «квазикристаллическое» приближение (3.5), изотропность функции $\varphi(v_j|v_j;\ v_i)$. Поэтому методы эффективной среды и сингулярного приближения [3] также являются следствиями МЭП.

7. Замечание. Остановимся на анализе допущений МЭП и их обобщениях. Предположение гипотезы H1 об эллипсоидальной форме включений использовалось лишь при преобразовании интегрального уравнения (2.1) к алгебраическому, так как, по-видимому, только для эллипсоида тензор $\langle U(x-y)\rangle_i$ однороден при $x,\ y \in v_i$ [13]. При этом можно считать, что на части области $v_i^1 \subset v_i$, $M_1(x)$, $\alpha(x) = 0$, т. е. реальное неэллипсоидальное включение $v_i \diagdown v_i^1$ достаточно заключить в эллипсоид возможно меньшего объема и назвать его включением v_i. Дальнейшая схема вычисления тензоров A, C (2.2) и L^* (1.5) не меняется, но задаваемые условные плотности распределения $\varphi(v_j|v_i,\ \ldots,\ v_n)$ будут иметь бóльшие размеры корреляционной ямы v_j^0, чем в реальном композите. Это приведет к занижению расчетных значеиий L^* для включений более жестких, чем матрица, и завышению в обратном случае.

Допущение об однородности $\bar{\varepsilon}_i(x)$ при $x \in v_i$ потребовалось для упрощения решения алгебраических систем (2.1) и (3.1), которые в принципе можно решить и для полиномиальной зависимости $\bar{\varepsilon}_i(x)$, $\langle\widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n}\rangle_i$. Тогда, например, тензор $A_i = \sum B_i^j$ (суммирование по $j = 0,\ 1,\ \ldots$) (2.2), где индекс j учитывает влияние члена степени j в полиномиальной записи $\bar{\varepsilon}_i(x)$. Аналогично при анализе системы (3.2) нужно разложить $U(x_i - y)$ в ряд Тейлора в окрестности x_j и решать задачу для конечного числа эллипсоидов, как в [31].

Заметим, что для решения системы (1.11), во всяком случае для однородных включений, не обязательно введение промежуточных понятий — эффективных полей $\bar{\varepsilon}(x_i|x_1,\ \ldots,\ x_n)$, $\langle\widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ldots,n}\rangle_i$. Система (1.11) линейна относительно полей $\langle\varepsilon(x)|x_1,\ \ldots,\ x_n\rangle$, при замыкании [8], аналогичном гипотезе H2, становится конечной и может быть решена методами линейной алгебры. Подобная схема проводится по методу условных моментов [7, 8]. По МЭП информация о геометрических и механических характеристиках задается тензорами (2.2) и поле $\langle\widehat{\varepsilon}(x)_{1,\ \ldots,\ n}\rangle_i$ в отличие от $\langle\varepsilon\ (x)|x_1,\ \ldots,\ x_n\rangle_i$ оказывается слабонеоднородным. Именно по этой причине, как отмечается в [17, 19], принятие даже грубых допущений о структуре эффективного поля (5.1) позволяет получить корректные результаты. Для уменьшения объема вычислений можно везде в (4.1) и матрице Z (3.3) заменить тензоры R_i, F_i на их средние по возможным ориентациям включений v_i, аналогичная процедура затруднительна по методу [7, 8].

8. Анализ регулярных структур. В настоящее время разработаны высокоэффективные численные методы расчета эффективных модулей и локальных напряжений в композитных материалах периодической структуры [32], что может служить тестом по оценке точности МЭП. Рассмотрим периодическое множество X эллипсоидальных неоднородностей одинаковой формы, ориентации и механических свойств. Распределение центров частиц в пространстве представим в виде последовательности векторов пространственной решетки $x_m = e_i m_i$, где m_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ — набор натуральных чисел, e_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ — векторы, направленные вдоль сторон параллелепипеда и равные по модулю его сторонам. Тогда при $L_c = L^{(0)}$ формула (6.1) имеет вид

$$\overline{L^*} = L^{(0)} + nR\left(I - P\,(w)\,Rn - \sum_i{}' S\,(x_j - x_i)\,Rn\right)^{-1}. \tag{8.1}$$

Принято, что x_j совпадает с центром области w, содержащей достаточно большое число неоднородностей (количественно это будет пояснено ниже). Суммирование в (8.1) проводится по всем $x_i \in w$ и $x_j \neq x_i$. При допущении (4.3), используемом в [23, 24], выражение (8.1) преобразуется:

$$\overline{L^*} = L^{(0)} + nR\left(I - P\,(w)\,Rn - \sum_i{}' U\,(x_j - x_i)\,Rn\right)^{-1}. \tag{8.2}$$

Метод	c								
	0,2			0,4			0,5		
	$\mu^{(1)} = 0$								
	L^*_{1111}	L^*_{1122}	L^*_{1212}	L^*_{1111}	L^*_{1122}	L^*_{1212}	L^*_{1111}	L^*_{1122}	L^*_{1212}
[33]	2,26	0,83	1,33	1,48	0,42	0,94	1,13	0,26	0,76
(8.1)	2,26	0,83	1,28	1,46	0,45	0,77	1,14	0,33	0,60
(8.2)	2,21	0,85	1,35	1,59	0,38	0,42	1,35	0,22	0,01
	$\mu^{(1)} = 1000$								
[34]	5,30	1,92	2,90	8,80	2,26	4,48	17,08	2,44	6,50
(8.1)	5,28	1,91	2,90	8,64	2,40	4,28	11,1	2,87	5,80
(8.2)	5.53	1,77	2,82	—16,9	15,2	7,24	2,48	7,21	8,16

Для простой кубической упаковки шаровых включений тензор эффективных модулей L^* характеризуется тремя модулями упругости. В таблице для пористой среды ($\nu^{(0)} = 0{,}3$, $\mu^{(0)} = 1$, $\mu^{(1)} = 0$), твердых включений ($\nu^{(0)} = \nu^{(1)} = 0{,}3$, $\mu^{(1)}/\mu^{(0)} = 1000$, $\mu^{(0)} = 1$) и ряда значений объемной концентрации неоднородностей вычислены значения L^*_{1111}, $L^*_{1122} = L^*_{2233} = L^*_{3311}$, $L^*_{1212} = L^*_{2323} = L^*_{3131}$ по аналитическим методам [33, 34] и формулам (8.1), (8.2).

Согласно таблице, максимальная погрешность МЭП (8.1) достигается для твердых неоднородностей при $c = 0{,}5$ и не превышает 15 %. Расчет по приближенному варианту МЭП (8.2) приводит к противоречивым результатам при $c > 0{,}35$: компонента L^*_{1111} осциллирует вокруг нуля с ростом c. Расчеты L^* по формулам (8.1), (8.2) проводились для шаровой области w с $\operatorname{diam} w = 7|e_1|$, содержащей три слоя шаров вокруг выделенного v_j; при $\operatorname{diam} w = 5|e_1|$ (два слоя) и $\operatorname{diam} w = 3|e_1|$ (один слой) оценки L^* (8.1) отличаются от приведенных в таблице на 1,7 и 15 % соответственно, т. е. ансамбль неоднородностей с двумя слоями шаров уже можно считать представительным и имеет место принцип локальности [21]. Заметим, что косвенное обоснование точности одночастичного МЭП с помощью оценок L^* для регулярных структур [24] достаточно сомнительно. Действительно, в этом случае для случайных структур члены под знаком суммы в (8.1), (8.2) равны нулю, для регулярных же структур значения этих сумм соизмеримы с $P(w)Rn$.

В заключение отметим, что преимущество частных вариантов МЭП над различными методами показано также на примерах сравнения с экспериментальными данными [4—6, 35, 36] и известными аналитическими решениями для регулярной системы коллинеарных трещин на плоскости [37].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Mura T.** Micromechanics of defects in solids.— Dordrecht: Nijhoff, 1987.
2. **Willis J. R.** Relationships between derivations of the overall properties of composites by perturbation expensions and variational principles // Variational Methods in Mechanics of Solids/Ed. by S. Nemat-Nasser.— Oxford: Pergamon Press, 1980.
3. **Шермергор Т. Д.** Теория упругости микронеоднородных сред.— М.: Наука, 1977.
4. **Буряченко В. А., Липанов А. М.** Концентрация напряжений на эллипсоидальных включениях и эффективные термоупругие свойства композитных материалов // ПМ.— 1986.— № 11.
5. **Буряченко В. А.** Корреляционная функция полей напряжений в матричных композитах // Изв. АН СССР. МТТ.— 1987.— № 3.
6. **Буряченко В. А., Липанов А. М.** Метод эффективного поля в теории идеальной пластичности композитных материалов // ПМТФ.— 1989.— № 3.
7. **Хорошун Л. П.** Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микронеоднородных сред // ПМ.— 1978.— № 2.

8. Механика композитных материалов и конструкций. Т. 1. Механика материалов/ Под ред. Л. П. Хорошун.— Киев: Наук. думка, 1982.
9. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // Acta Metallurgica.— 1973.— V. 21, N 5.
10. Benveniste Y. A new approach to the application of Mori — Tanaka theory of composite materials // Mechanics of Materials.— 1987.— V. 6, N 1.
11. Кунин И. А., Соснина Э. Г. Эллипсоидальная неоднородность в упругой среде // ДАН СССР.— 1971.— Т. 199, № 3.
12. Takao Y., Taya M. Thermal expansion coefficients and thermal stress an aligned short fibre composite with applications to a short carbon fibre/aluminum // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1985.— V. 52, N 4.
13. Luo H. A., Weng G. J. On Eshelbby's inclusion problem in a three-phase spherically concentric solids: a modification on Mori — Tanaka's method // Mechanics of Materials.— 1987.— V. 6, N 6.
14. Lax M. Multiple scattering of waves // Rev. Modern. Phys.— 1951.— V. 23, N 4.
15. Willis J. R., Acton J. R. The overall elastic module of dilute suspension of spheres // Quart. J. Mech. Appl. Math.— 1976.— V. 29, N 2.
16. Berveiller M. The problem of two plastic and heterogeneous inclusions in anisotropic medium // Int. J. Engng Sci.— 1987.— V. 25, N 6.
17. Kachanov M. Elastic solids with many cracks: a simple method of analysis // Int. J. Solids and Struct.— 1987.— V. 23, N 1.
18. Kachanov M., Laures J. P. Strong three-dimensional interaction of several arbitrary located penny-shaped cracks // Int. J. Fracture.— 1988.— V. 37, N 4.
19. Hori M., Nemat-Nasser S. Interacting micro-cracks near the tip in the process zone of a macro-crack // J. Mech. Phys. Solids.— 1987.— V. 35, N 5.
20. Chen H. S., Acrivos A. The effective module of composite materials containing sphe rical inclusions on non-dilute concentrations // Int. J. Solids and Struct.— 1978.— V. 14, N 9.
21. Соколкин Ю. В., Ташкинов А. А. Механика деформирования и разрушения структурно-неднородных тел.— М.: Наука, 1984.
22. Канаун С. К. Самосогласованные схемы усреднения в механике матричных композитных материалов // Механика композит. материалов.— 1990.— № 6.
23. Левин В. М. К определению упругих модулей композитных материалов // ДАН СССР.— 1975.— Т. 220, № 5.
24. Канаун С. К. Метод эффективного поля в линейных задачах статики композитной среды // ПММ.— 1982.— Т. 46, № 4.
25. Гандельсман М. И. Осредненные уравнения теории упругости матричных композитов // Изв. АН СССР. МТТ.— 1982.— № 3.
26. Stang H. Strength of composite materials with small cracks in the matrix // Int. J. Solids and Struct.— 1986.— V. 22, N 11.
27. Zhou S. A., Hsien R. K. A statistical theory of elastic materials with microdefects // Int. J. Engng Sci.— 1986.— V. 24, N 7.
28. Кошелева А. А. Метод мультиполярного разложения в механике матричных композитов // Механика композит. материалов.— 1983.— № 3.
29. Исупов Л. П. Вариант метода самосогласования для упругой композитной среды // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., механика.— 1985.— № 6.
30. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the elastic behaviour of multiphase materials // J. Mech. Phys. Solids.— 1963.— V. 11, N 2.
31. Moschovidis Z. A., Mura T. Two-ellipsoidal inhomogeneities by the equivalent inclusion method // J. Appl. Mech. — 1975.— V. 42, N 4.
32. Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolau G. Asymptotic analysis for periodic structures.— Amsterdam: North-Holland, 1978.
33. Sangani A., Lu W. Elastic coefficients of composites containing spherical inclusion in periodic array // Trans. ASME. Ser. E. J. Mech. Phys. Solids.— 1987.— V. 35, N 1.
34. Кущь В. И. О вычислении упругих модулей зернистого материала регулярной структуры // ПМ.— 1987.— № 4.
35. Буряченко В. А., Партон В. З. Одночастичное приближение метода эффективного поля в статике композитов // Механика композит. материалов.— 1990.— № 3.
36. Буряченко В. А. Эффективные параметры вязкопластичности суспензий // ИФЖ.— 1990.— Т. 58, № 3.
37. Буряченко В. А., Партон В. З. Эффективные параметры статистически-неоднородных матричных композитов // Изв. АН СССР. МТТ.— 1990.— № 6.

г. Москва

Поступила 26/VII 1990 г.,
в окончательном варианте — 23/VII 1991 г.