

## О РАСЧЕТЕ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ, НАХОДЯЩИХСЯ В СОСТОЯНИИ СТРУКТУРНОГО РАВНОВЕСИЯ

Г. Е. Стуров

(Новосибирск)

Обзор работ по исследованию турбулентных потоков с поперечным сдвигом, в которых используется уравнение баланса турбулентной энергии, содержится в [1]. В. Б. Левин [2] предложил некоторое развитие метода Ротта [3], позволившее определить характеристики осредненного течения и распределения по радиусу пульсационных величин. Однако масштаб турбулентности (величина  $l$ ) в этой работе задавался в виде эмпирической функции от координат. В то же время ясно, что распределение масштаба турбулентности зависит от условий задачи. Предлагаемое в [4, 5] специальное дифференциальное уравнение, описывающее изменение во времени и в пространстве величины  $l$  обладает тем недостатком, что для вывода этого уравнения необходимо привлечение дополнительных гипотез, экспериментальная проверка которых затруднительна.

В данной работе масштаб турбулентности наряду со скоростью осредненного течения, давлением и пульсационными величинами считается важной характеристикой потока, определяемой исходной системой, которая состоит из уравнений Рейнольдса, неразрывности и уравнений для компонент тензора рейнольдсовых напряжений. Для замыкания полученной системы используются приближенные полуэмпирические соотношения Ротта и экспериментальное соотношение для одноточечного коэффициента корреляции между турбулентными пульсациями скорости. Для области потока, где турбулентность находится в состоянии структурного равновесия [6], дается приближенный расчет основных осредненных и пульсационных характеристик течения. Проводится сопоставление расчетных и экспериментальных данных.

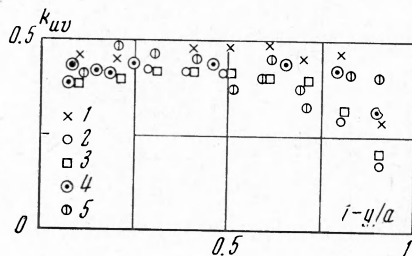
Для широкого диапазона течений с поперечным сдвигом, включая течения в пограничном слое на шероховатой и гладкой стенке [7], потоки в трубах и каналах [8, 9], течения в ближнем следе и струях [10, 11], можно наблюдать подобие между распределением турбулентного напряжения и распределениями соответствующих интенсивностей турбулентности. Линейное соотношение между турбулентным напряжением трения и турбулентной кинетической энергией использовалось Брэдшоу [12] при расчете трения в турбулентном пограничном слое и Ли и Харша [13] при анализе струйных течений. В работе [14] представлено экспериментальное подтверждение этого предположения в широком диапазоне изменения условий течения. В работе [15] указывается, что во вращающихся течениях отношение турбулентного напряжения к соответствующим компонентам интенсивности турбулентности также постоянно по сечению и примерно равно 0.4.

Если ввести коэффициент корреляции

$$k_{uv} = \langle uv \rangle / \sqrt{\langle u^2 \rangle \langle v^2 \rangle} \quad (1)$$

то вне вязкого подслоя и приосевой зоны значение этого коэффициента постоянно и равно  $\sim 0.42$  (на фиг. 1 точки 1 нанесены по данным работы [7], 2 — [8], 3 — [9], 4 — [10], 5 — [11]). Следует заметить, что опыты, проведенные в случае равномерного искажения однородной турбулентности [6], показали, что максимально возможное значение этого коэффициента также равно 0.42 ([6], стр. 377). Постоянство коэффициента корреляции

может служить указанием на то, что в этой области турбулентность находится в состоянии структурного равновесия [6]. Таунсенд указывает, что установление равновесной структуры можно формально представить как установление некоторого равновесия между ориентирующим влиянием искажения на вихри и общим стремлением турбулентного потока к изотропии.



Фиг. 1

Используя это обстоятельство, в качестве примера рассмотрим расчет основных характеристик турбулентных течений в цилиндрической трубе и плоском канале. Для компонент тензора рейнольдсовых напряжений имеем следующую систему уравнений в декартовых координатах [1] (в тензорной записи):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial t} + U_k \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k} + \langle u_k u_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \langle u_k u_i \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \\ & - \frac{1}{\rho} \left\langle p \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ -\nu \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k} + \langle u_i u_j u_k \rangle + \right. \\ & \left. + \left\langle \frac{p}{\rho} (\delta_{jk} u_i + \delta_{ik} u_j) \right\rangle \right] + 2\nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

где  $p$  — пульсация давления,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

Анализ экспериментальных данных [8] показывает, что в области течения  $0.3 < y/a < 0.9$ , где коэффициент корреляции  $k_{uv}$  постоянен, конвективной диффузией (вследствие турбулентности) и вязкой диффузией можно пренебречь.

Следуя [2], для члена выражающего собой обмен энергии между тремя компонентами пульсаций, принимаем приближенное выражение

$$\frac{1}{\rho} \left\langle p \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle = -k \frac{E^{1/2}}{l} \left( \langle u_i u_j \rangle - \frac{2}{3} \delta_{ij} E \right) \quad (3)$$

и для диссипативного члена интерполяционную формулу

$$\begin{aligned} 2\nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle &= \nu c_1 \frac{\langle u_i u_j \rangle}{l^2} + \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{c E^{3/2}}{l} \\ 2E &= \sum_i \langle u_i^2 \rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $k, c, c_1$  — постоянные коэффициенты.

Использование зависимости (4) в частном случае изотропной турбулентности дает известные законы вырождения (на начальной и конечной стадиях) энергии турбулентности. Действительно, сумма первых трех уравнений системы (2) дает уравнение баланса полной пульсационной энергии, которое в случае изотропной турбулентности и использования формулы (4) имеет вид

$$\frac{\partial E}{\partial t} + c \frac{E^{3/2}}{l} + c_1 \nu \frac{E}{l^2} = 0 \quad (5)$$

Процесс вырождения изотропной турбулентности в начальной стадии определяется главным образом распадом энергосодержащих вихрей;

в конечной стадии влияние вязкости преобладает над инерционными эффектами. В [16] показывается, что если в качестве характерной длины выбрать величину  $(\nu t)^{1/2}$ , то в случае очень малых чисел Рейнольдса (конечная стадия вырождения) энергетический спектр сохраняет подобие. Эта же характерная длина может быть выбрана и для области энергосодержащих вихрей, поскольку здесь выполняется соотношение  $\varepsilon t^2/\nu = \text{const}$  ( $\varepsilon$  — диссипация энергии на единицу массы) ([16], стр. 245). Подставляя в уравнение (5) вместо  $l$  величину  $\sqrt{\nu t}$ , для начальной стадии процесса вырождения изотропной турбулентности получим  $E = (\nu/c^2)t^{-1}$ , а для конечной стадии  $E \sim t^{-c_1}$ . Эти простые законы вырождения изотропной турбулентности многократно отмечались различными исследователями (см., например, [16]). Значение констант  $c$  и  $c_1$  по опытам Бэтчелора и Таунсенда [17] равны соответственно 0,155 и 2,5

Для замыкания системы (2) привлекаем уравнение движения для осредненного течения, однородного по длине

$$\langle uv \rangle - \nu \frac{dU_1}{dy} = -\nu V_*^2 \frac{y}{a} \quad \left( V_*^2 = -\nu \left( \frac{dU_1}{dy} \right)_{y=a} \right) \quad (6)$$

и заменяем турбулентное трение по формуле (1).

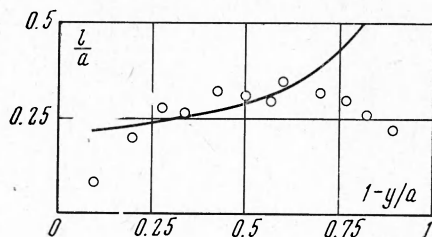
В безразмерном виде уравнения (6) и (2) с учетом (3) и (4) имеют вид [2]

$$\begin{aligned} \frac{k_{uv} \sqrt{\langle u^2 \rangle} \sqrt{\langle v^2 \rangle}}{E} - \frac{\text{Re}_l}{\text{Re}_E^2} + \frac{V_*^2 y}{Ea} \\ \frac{k_{uv} \sqrt{\langle u^2 \rangle} \sqrt{\langle v^2 \rangle}}{E} \text{Re}_l + c \text{Re}_E + c_1 = 0, \quad \frac{\langle v^2 \rangle}{E} (k \text{Re}_l + c_1) - \frac{2}{3} (k - c) \text{Re}_E = 0 \\ \frac{\langle w^2 \rangle}{E} (k \text{Re}_E + c_1) - \frac{2}{3} (k - c) \text{Re}_E = 0 \\ \frac{\langle v^2 \rangle}{E} \text{Re}_l + \frac{k_{uv} \sqrt{\langle u^2 \rangle} \sqrt{\langle v^2 \rangle}}{E} (k \text{Re}_E + c_1) = 0 \\ \frac{\langle vw \rangle}{E} \text{Re}_l + \frac{\langle uw \rangle}{E} (k \text{Re}_E + c_1) = 0 \\ \frac{\langle vw \rangle}{E} (k \text{Re}_E + c_1) = 0 \\ \left( \text{Re}_E = l \sqrt{E} / \nu, \quad \text{Re}_l = \frac{l^2}{\nu} \frac{dU_1}{dy} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

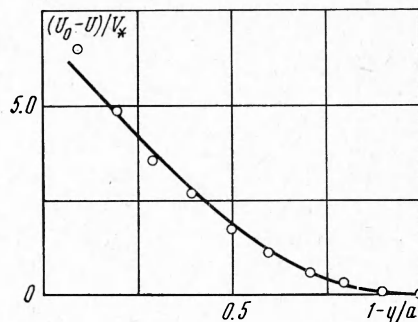
Решая систему (7), находим

$$\begin{aligned} \langle uv \rangle = \langle vw \rangle = 0 \\ \frac{\langle uv \rangle}{V_*^2} = \left( 1 - \frac{\text{Re}_l^2}{c \text{Re}_E^3 + c_1 \text{Re}_E^2 + \text{Re}_l^2} \right) \frac{y}{a} \\ \frac{\sqrt{\langle v^2 \rangle}}{V_*} = \frac{\sqrt{\langle w^2 \rangle}}{V_*} = \left[ \frac{2(c-k) \text{Re}_E^3 \text{Re}_l^2}{3(k \text{Re}_E + c_1)(c \text{Re}_E^3 + c_1 \text{Re}_E^2 + \text{Re}_l^2)} \right]^{1/2} \left( \frac{y}{a} \right)^{1/2} \\ \frac{\sqrt{\langle u^2 \rangle}}{V_*} = -\frac{\text{Re}_l}{k_{uv}} \left[ \frac{2(c-k) \text{Re}_E^3 \text{Re}_l}{3(k \text{Re}_E + c_1)(c \text{Re}_E^3 + c_1 \text{Re}_E^2 + \text{Re}_l^2)} \right]^{1/2} \left( \frac{y}{a} \right)^{1/2} \\ \frac{U_0 - U_1}{V_*} = \frac{\text{Re}_l^2 \text{Re}_*}{2(c \text{Re}_E^3 + c_1 \text{Re}_E^2 + \text{Re}_l^2)} \left( \frac{y}{a} \right)^2 \\ \frac{l}{a} = \left[ -\frac{c \text{Re}_E^3 + c_1 \text{Re}_E^2 + \text{Re}_l^2}{\text{Re}_*^2 \text{Re}_l} \right]^{1/2} \left( \frac{a}{y} \right)^{1/2} \\ \text{Re}_* = \frac{V_* a}{\nu}, \quad \text{Re}_E = \frac{c_1 (1 - 2k_{uv}^2)}{2kk_{uv}^2 - c - 4(k-c)k_{uv}^2/3} \\ \text{Re}_l = - (k \text{Re}_E + c_1) \left[ \frac{3(c \text{Re}_E + c_1)}{2(k-c) \text{Re}_E} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (8)$$

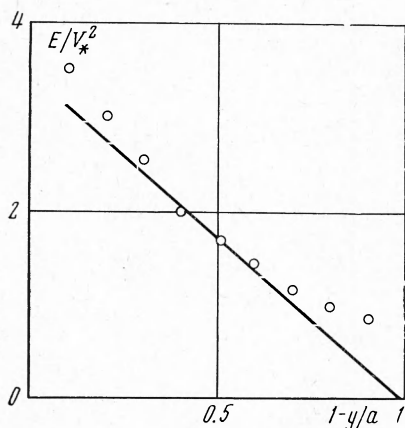
Сравнение результатов расчета по формулам (8) с опытными данными приведено на фиг. 2—5 ( $c = 0.155$ ,  $c_1 = 2.5$ ,  $k = 1.02$ ,  $k_{uv} = 0.42$ ) (сплошная кривая — расчетная). Величина коэффициента  $k$  определялась из сравнения экспериментального [8] и расчетного профилей осредненной скорости. На фиг. 2 кружками показано распределение масштаба, взятое



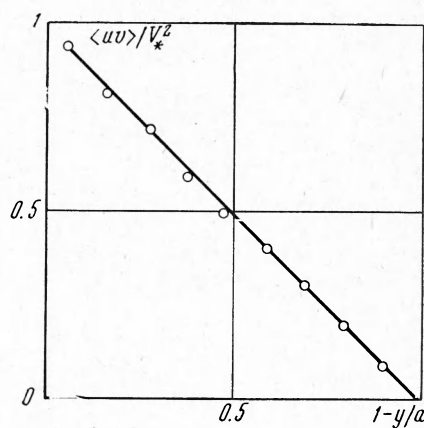
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

из работы [5] ( $V_*/U_0 = 0.037$ ). На фиг. 3—5 кружками представлены данные Лауфера [8],  $V_*/U_0 = 0.035$ .

Из графиков видно, что подобный подход может быть использован для определения основных и пульсационных характеристик течений в тех областях, где турбулентность находится в состоянии структурного равновесия.

Поступила 24 V 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1. М., «Наука», 1965.
2. Левин В. Б. К расчету основных характеристик турбулентных потоков с поперечным сдвигом. Теплофизика высоких температур, 1964, т. 2, № 4.
3. Rotta J. C. Statistische theorie nichthomogener turbulenz. Z. Physik, 1951, Bd 129, Nr 6.
4. Rotta J. C. Statistische theorie nichthomogener turbulenz. Z. Physik, 1951, Bd 131, Nr 1.
5. Глушко Г. С. Дифференциальное уравнение для масштаба турбулентности и расчет турбулентного пограничного слоя на плоской пластине. В сб. «Турбулентные течения», М., «Наука», 1970

6. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
7. Klebanoff P. S. Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient. Nat. Advis. Com. Aeronaut., Tech. Notes, 1954, No. 3178.
8. Laufer J. The structure of turbulence in fully developed pipe flow. Nat. Advis. Com. Aeronaut., 1954, Rept No. 1174.
9. Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. М., «Мир», 1968.
10. Кармоди Т. Развитие следа за диском. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Сер. Д, Теорет. основы инж. расчетов, 1964, т. 86, № 4.
11. Курте Р., Рико Ф. О тенденции к автомодельности в осесимметричных струях в трубах. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Сер. Д, Теорет. основы инж. расчетов, 1964, т. 86, № 4.
12. Bradshaw P. The turbulence structure of equilibrium boundary layers. J. Fluid Mech., 1967, vol. 29, p. 4.
13. Lee S. C., Harsha P. T. The use of turbulent kinetic energy in free mixing studies. AIAA paper 69-683, San Francisco, Calif., 1969.
14. Харша П., Ли С. Связь между турбулентным напряжением трения и кинетической энергией турбулентного движения. Ракетная техника и космонавтика, 1970, т. 8, № 8.
15. Устименко Б. П., Змейков В. Н. Турбулентная структура потока в кольцевых каналах между вращающимися коаксиальными цилиндрами. Теплофизика высоких температур, 1967, т. 5, № 4.
16. Хинце И. О. Турбулентность. Ее механизм и теория. М., Физматгиз, 1963.
17. Batchelor G. K., Townsend A. A. Decay of isotropic turbulence in the initial period. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1948, vol. 193, No. 1035.