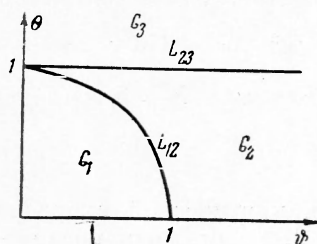


ПРИ СЛОЖНОМ СДВИГЕ

В. П. Мясников

(Москва)

Почти все известные до последнего времени точные решения уравнений движения вязко-пластичных сред описывают течения в условиях, когда прилагаемые внешние нагрузки зависят от одного параметра. Только недавно были предприняты попытки экспериментально исследовать течение вязкопластика в кольцевом цилиндрическом зазоре при изменении внешних нагрузок в зависимости от двух независимых параметров [1, 2].



Фиг. 1

Ниже приводятся некоторые точные решения уравнений движения вязко-пластичной среды при сложном сдвиге. В § 1 рассматривается течение между параллельными пластинами при различных комбинациях двух независимых нагрузок, раздельное действие которых вызывает в зазоре либо течение Куэтта, либо плоское течение Пуазейля.

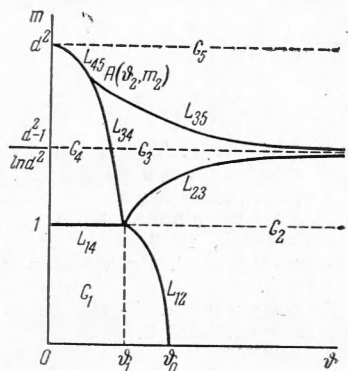
Если обозначить через τ касательное усилие, приложенное к одной из пластин, ограничивающих зазор, а через $g = \Delta p / L$ — градиент давления, действующий в направлении, перпендикулярном направлению τ , то можно показать, что характер течения внутри зазора определяется в зависимости от двух независимых параметров

$\theta = \tau / \tau_0$ и $\psi = gd / 2\tau_0 = \Delta p d / 2\tau_0 L$, где τ_0 — предел текучести, а d — зазор между пластинами. Полученные результаты схематически можно представить при помощи диаграммы состояний (фиг. 1).

Если точка с координатами (ψ, θ) попадет в область G_1 , то при заданных нагрузках течения в зазоре не будет. Точкам области G_2 соответствует течение с ядром внутри потока, симметричном относительно срединной плоскости зазора (см. ниже фиг. 3). Точкам же области G_3 соответствуют течения с полным разрешением структуры внутри зазора (см. ниже фиг. 4). Линия L_{12} соответствует условиям, при которых ядро полностью заполняет весь зазор.

Аналогичная задача исследуется в § 2 для течения в кольцевом зазоре. Диаграмма состояний для этого случая представлена на фиг. 2. Здесь через m обозначена безразмерная величина вращающего момента, приложенного к внутреннему цилиндру, a — радиус внутреннего цилиндра и $k = a \Delta p / 2\tau_0 L$.

Точкам области G_1 никаких течений внутри зазора не соответствует, так как приложенные нагрузки недостаточны для того, чтобы касательные напряжения превзошли предел текучести. Точкам области G_2 соответствуют течения с ядром внутри зазора, причем распределение скоростей вдоль зазора v_z имеет относительно ядра



Фиг. 2

качественно зеркальносимметричный характер (см. ниже фиг. 5). Линия L_{12} , как и ранее, соответствует условиям, когда ядро полностью заполняет весь зазор.

Если точка (k, m) попадает в область G_3 , то качественная зеркальная симметрия v_z относительно ядра нарушается и скорости v_z вблизи внутреннего цилиндра превосходят скорость движения ядра (см. ниже фиг. 8). Области G_4 соответствуют течения с неподвижным ядром, примыкающим к внешнему цилиндру. Линия L_{34} соответствует условиям, когда ядро все еще неподвижно, но на границе его с внешним цилиндром уже достигнуты условия текучести (см. ниже фиг. 7).

И, наконец, точкам области G_5 внутри зазора соответствуют течения с полностью разрушенной структурой (см. ниже фиг. 6). Линии L_{45} , L_{35} отделяют область полного разрушения структуры от области, где внутри потока имеется твердое ядро.

§ 1. Сложный сдвиг в плоском зазоре. Пусть между двумя безграничными параллельными плоскостями, с зазором d между ними, находится вязко-пластичная среда с коэффициентом вязкости μ и пределом тнучести τ_0 . Будем рассматривать движение в неподвижной декартовой системе координат xuz , расположенной таким образом, что ось y перпендикулярна к плоскостям, ограничивающим зазор, а плоскость xz совпадает со срединной плоскостью зазора. Уравнения граничных плоскостей в выбранной системе координат будут: $y = -1/2 d$, $y = 1/2 d$.

Пусть в направлении оси x на среду действует перепад давлений с градиентом $g = -\Delta p/L$, а плоскость $y = 1/2 d$ движется в направлении оси z под действием касательного усилия τ .

Обозначим составляющие скорости частиц среды в направлении осей x и z через u и v . В любом сечении, перпендикулярном к оси x или оси z , картина течения будет зависеть только от y . Уравнения движения в рассматриваемом случае приведутся к виду

$$\left[\left(\mu + \frac{\tau_0}{h} \right) u' \right]' = -g, \quad \left[\left(\mu + \frac{\tau_0}{h} \right) v' \right]' = 0, \quad h = \sqrt{u'^2 + v'^2} \quad (1.1)$$

Здесь штрихи означают дифференцирование по y .

В зависимости от величин Δp и τ течение между плоскостями будет иметь различный характер.

Рассмотрим сначала случай, когда внутри потока существует ядро, движущееся как твердое тело. Пусть толщина ядра $2h$. В силу симметрии относительно срединной плоскости зазора уравнения границ ядра (плоскостей) будут: $y = -h$ и $y = h$. Течение нужно рассматривать отдельно в каждой из областей (1) и (2)

(фиг. 3). Сформулируем граничные условия. На верхней пластине в силу условий прилипания имеем

$$u(1/2 d) = 0, \quad p_{yz}(1/2 d) = \tau \quad (1.2)$$

где p_{yz} — соответствующая компонента тензора напряжений.

Аналогично на нижней пластине

$$u(-1/2 d) = 0, \quad v(-1/2 d) = 0 \quad (1.3)$$

Обращение в нуль вязких касательных напряжений на границах ядра приводят к условиям вида

$$u'(h) = 0, \quad v'(h) = 0, \quad u'(-h) = 0, \quad v'(-h) = 0 \quad (1.4)$$

Кинематические условия движения ядра, как твердого тела, запишутся следующим образом:

$$u(h) = u(-h), \quad v(h) = v(-h) \quad (1.5)$$

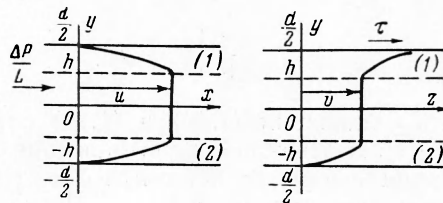
Динамические условия движения ядра приведут к соотношениям

$$g = \frac{1}{2h} \{ |p_{xy}(h)| + |p_{xy}(-h)| \}, \quad p_{yz}(h) = p_{yz}(-h) \quad (1.6)$$

Уравнения (1.1) допускают систему первых интегралов

$$\left(\mu + \frac{\tau_0}{h} \right) u' = c_1 - gy, \quad \left(\mu + \frac{\tau_0}{h} \right) v' = D_i \quad (i = 1, 2) \quad (1.7)$$

для каждой из областей (1) и (2). Из вторых условий (1.2) и (1.6) непосредственно находим, что $D_1 = D_2 = \tau$. Но $p_{xy} < 0$ в области (1),



Фиг. 3

а в области (2) имеем $p_{xy} > 0$, так как знак p_{xy} совпадает со знаком u' ; поэтому из первого условия (1.6) следует, что $c_1 = c_2 = c$.

Таким образом, для обеих областей получаем общую систему первых интегралов. Решая (1.7) относительно u' и v' , найдем

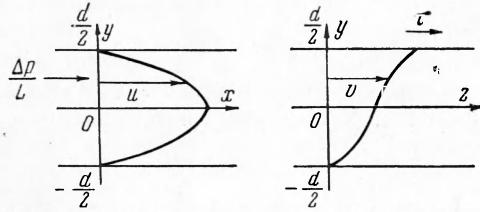
$$\mu u' = (c - gy) \Phi(y), \quad \mu v' = \tau \Phi(y) \quad \left(\Phi(y) = 1 - \frac{\tau_0}{\sqrt{\tau^2 + [c - gy]^2}} \right) \quad (1.8)$$

Удовлетворим теперь условиям (1.4). Они приведут только к одному соотношению $\Phi(\pm h) = 0$, которому можно придать вид

$$\tau^2 + (c \pm gh)^2 = \tau_0^2$$

Но отсюда следует, что $c = 0$ и, следовательно,

$$h = \frac{\tau_0}{g} \sqrt{1 - \theta^2} \quad \left(\theta = \frac{\tau}{\tau_0} \right) \quad (1.9)$$



Фиг. 4

При $\tau = 0$ выражение для h совпадает с тем, которое было найдено для этого случая в работе [3]. Интегрируя (1.8) с учетом еще неиспользованных граничных условий, окончательно получим

$$u = \frac{g}{2\mu} \left[\left(\frac{d}{2} \right)^2 - y^2 \right] + \frac{\tau_0}{g\mu} \left(\sqrt{\tau^2 + (g^2 y^2)} - \sqrt{\tau^2 + (1/2 gd)^2} \right) \quad (1.10)$$

$$v_{(1)} = \frac{\tau}{\mu} \left\{ \frac{d}{2} - 2h + y + \frac{\tau_0}{g} \ln \left[\frac{\tau_0 + \sqrt{\tau_0^2 - \tau^2}}{\tau_0 - \sqrt{\tau_0^2 - \tau^2}} \frac{-1/2 gd + \sqrt{\tau^2 + (1/2 gd)^2}}{gy + \sqrt{\tau^2 + (gy)^2}} \right] \right\}$$

$$v_2 = \frac{\tau}{\mu} \left\{ \frac{d}{2} + y + \frac{\tau_0 L}{\Delta p} \ln \left(\frac{-1/2 gd + \sqrt{\tau^2 + (1/2 gd)^2}}{gy + \sqrt{\tau^2 + (gy)^2}} \right) \right\} \quad (1.11)$$

Соотношения (1.10) и (1.11) справедливы только при $\tau \leq \tau_0$. Если $\tau > \tau_0$, то течение с ядром в потоке существовать не может, так как всюду внутри зазора предел текучести будет превзойден. Интегрируя (1.1) при граничных условиях

$$u(1/2 d) = 0, \quad p_{yz}(1/2 d) = \tau, \quad u(-1/2 d) = 0, \quad v(-1/2 d) = 0, \quad u'(0) = 0$$

получим

$$u = \frac{g}{2\mu} \left[\left(\frac{d}{2} \right)^2 - y^2 \right] + \frac{\tau_0}{g\mu} \left(\sqrt{\tau^2 + (gy)^2} - \sqrt{\tau^2 + (gd/2)^2} \right) \quad (1.12)$$

$$v = \frac{\tau}{\mu} \left\{ \frac{d}{2} + y + \frac{\tau_0}{g} \lg \left(\frac{-gd/2 + \sqrt{\tau^2 + (gd/2)^2}}{gy + \sqrt{\tau^2 + (gy)^2}} \right) \right\}$$

Профили скоростей поперек зазора в этом случае уже не будут иметь прямолинейных участков (фиг. 4).

Характер течения в зазоре зависит от независимых параметров Φ и θ . Для наглядного представления полученных результатов удобно воспользоваться диаграммой состояний (фиг. 1), позволяющей установить соответствие между парой Φ , θ и качественным характером течения. Если значения параметров нагрузки таковы, что точка Φ , θ попадет в область G_1 , то течения в зазоре не будет, так как условия текучести внутри зазора для приложенных нагрузок нигде не выполняются. Если же точка Φ , θ расположена в области G_2 , то внутри потока имеется твердое ядро и профили скоростей имеют прямолинейные участки (фиг. 3). Линия L_{12} , разграничивающая области G_1 и G_2 , может быть получена из условия, что ядро заполняет весь зазор, т. е. $2h = d$. Тогда из (1.9) получим

$$\Phi = \sqrt{1 - \theta^2} \quad (1.13)$$

В области G_3 каждая точка диаграммы состояний соответствует некоторому течению, охватывающему весь зазор. Профили скоростей в этом случае имеют вид, указанный на фиг. 4.

Проследим за изменением интенсивности касательных напряжений сдвига поперек зазора

$$p_i = \sqrt{p_{xy}^2 + p_{yz}^2} = \sqrt{\tau^2 + (gy)^2} \quad (1.14)$$

Минимальное значение $p_i = \tau$ достигается при $y = 0$, и если $\tau > \tau_0$, то $p_i > \tau_0$ во всем зазоре. Течение имеет вид, характерный для области

G_3 . При $\tau < \tau_0$ неравенство $p_i \geq \tau_0$ выполняется только вне некоторого отрезка $[-h, h]$, и если $h < d/2$, то характер течения соответствует области G_2 . Наоборот, при $h \geq d/2$ будем иметь внутри зазора $p_i \leq \tau_0$ и течения в зазоре не будет. Линия L_{23} , отделяющая одна от другой области G_2 и G_3 , соответствует условию $p_i(0) = \tau_0$.

В заключение параграфа отметим, что из (1.10), (1.11) при $\tau = 0$ можно получить решение, указанное в работе [3], а из (1.12) при $\Delta p = 0$, $\tau > \tau_0$ получим решение для течения Куэтта [4].

§ 2. Сложный сдвиг в кольцевом зазоре. Рассмотрим течение вязкопластичной среды между двумя бесконечно длинными соосными цилиндрами, возникающее вследствие того, что к внутреннему цилиндру приложен вращающий момент M , а в направлении общей оси цилиндров имеется градиент давления $-g = -\Delta p/L$. Будем изучать движение в неподвижной цилиндрической системе координат (z, r, φ) , ось z которой совпадает с общей осью цилиндров. Уравнения поверхностей цилиндров в выбранной системе координат будут, соответственно, для внутреннего и внешнего: $r = a$ и $r = b$ ($a < b$). Составляющая скорости частиц среды в направлении r будет тождественно равна нулю, а составляющие в направлении осей z и φ обозначим через v_z и v_φ .

Уравнения движения запишутся следующим образом:

$$\frac{d}{dr} \left[\left(\mu + \frac{\tau_0}{h} \right) r^3 \frac{d\omega}{dr} \right] = 0, \quad \frac{d}{dr} \left[\left(\mu + \frac{\tau_0}{h} \right) r \frac{dv_z}{dr} \right] = -gr \quad (2.1)$$

$$p = -\frac{\Delta p}{L} z + \Pi(r), \quad \frac{d\Pi}{dr} = \rho r \omega^2, \quad h = \sqrt{\left(r \frac{d\omega}{dr} \right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^2}$$

Здесь p — давление, ρ — плотность среды, ω и v_φ связаны соотношением $v_\varphi = r\omega$.

В общем случае возможно существование внутри потока ядра, движущегося как твердое тело (фиг. 5). Сформулируем граничные условия для этого случая.

На поверхности внутреннего цилиндра в силу условий прилипания

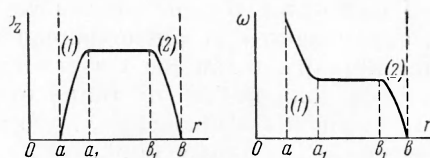
$$v_z(a) = 0, \quad p_{r\varphi}(a) = -\frac{M}{2\pi L a^3} \quad (2.2)$$

Аналогично на внешнем цилиндре

$$v_z(b) = 0, \quad \omega(b) = 0 \quad (2.3)$$

Обозначим внутренний и внешний радиусы ядра через a_1 и b_1 . На границах ядра вязкие касательные напряжения должны обращаться в нуль. В силу этого

$$\frac{dv_z(a_1)}{dr} = 0, \quad \frac{d\omega(a_1)}{dr} = 0, \quad \frac{dv_z(b_1)}{dr} = 0, \quad \frac{d\omega(b_1)}{dr} = 0 \quad (2.4)$$



Фиг. 5

Кинематические условия движения ядра, как твердого тела, можно записать в виде

$$v_z(a_1) = v_z(b_1), \quad \omega(a_1) = \omega(b_1) \quad (2.5)$$

Рассмотрим теперь динамические условия движения ядра. Так как рассматривается установившийся режим течения, то скорость движения ядра в направлении оси z и угловая скорость его вращения относительно этой оси должны быть постоянными. При этом, кроме указанного продольного смещения и вращения, ядро не должно испытывать никаких других смещений. Тем самым движение ядра фактически задано. Постоянство скорости продольного смещения ядра приводит к условию равенства нулю суммы проекций сил, действующих на ядро в направлении оси z , а постоянство скорости вращения относительно оси z — к отсутствию суммарного момента всех сил относительно этой оси

$$\frac{1}{2} g (b_1^2 - a_1^2) = a_1 p_{rz}(a_1) - b_1 p_{rz}(b_1) \quad (2.6)$$

$$a_1^2 p_{r\varphi}(a_1) = b_1^2 p_{r\varphi}(b_1) \quad (2.7)$$

Все другие динамические условия движения ядра приведут только к одному соотношению, которое укажем при определении поля давлений в зазоре.

Систему (2.1) нужно интегрировать отдельно в каждой из областей (1) и (2) (указанных на фиг. 4). Она, очевидно, допускает систему первых интегралов

$$\left(\mu + \frac{\tau_0}{h}\right) r \frac{d\omega}{dr} = -\frac{C_i}{r^2}, \quad \left(\mu + \frac{\tau_0}{h}\right) \frac{dv_z}{dr} = \frac{D_i}{r} - \frac{1}{2} gr \quad (i=1,2) \quad (2.8)$$

где C_i, D_i — произвольные постоянные, причем $i=1$ для области (1) и $i=2$ для области (2).

Используя (2.7) и (2.2), найдем

$$C_1 = C_2 = \frac{M}{2\pi L}$$

Точно так же, учитывая (2.6), получим $D_1 = D_2 = D$. Таким образом, для обеих областей

$$\left(\mu + \frac{\tau_0}{h}\right) r \frac{d\omega}{dr} = -\frac{M}{2\pi L r^2}, \quad \left(\mu + \frac{\tau_0}{h}\right) \frac{dv_z}{dr} = \frac{D}{r} - \frac{1}{2} gr \quad (2.9)$$

Решая (2.9) относительно производных, будем иметь

$$\mu \frac{d\omega}{dr} = -\frac{M}{2\pi L r^3} \Phi(r), \quad \mu \frac{dv_z}{dr} = \frac{g}{2} \frac{G-r^2}{r} \Phi(r) \quad (2.10)$$

где

$$\Phi(r) = 1 - \frac{\tau_0 r^2}{\sqrt{(M/2\pi L)^2 + (1/2g)^2 r^2 (G-r^2)^2}} \left(G - \frac{2D}{g}\right)$$

Условия (2.4) могут удовлетворять одновременно, если только

$$\Phi(a_1) = \Phi(b_1) = 0 \quad (2.11)$$

Интегрируя (2.10) при граничных условиях (2.2), (2.3), (2.5), имеем

$$\begin{aligned} \mu\omega_1 &= \frac{M}{2\pi L} \left(\int_r^{a_1} \frac{1}{r^3} \Phi(r) dr + \int_{b_1}^b \frac{1}{r^3} \Phi(r) dr \right), \quad \mu\omega_2 = \frac{M}{2\pi L} \int_r^b \frac{1}{r^3} \Phi(r) dr \\ \mu v_{z1} &= \frac{g}{2} \int_a^r \frac{G-r^2}{r} \Phi(r) dr, \quad \mu v_{z2} = \frac{g}{2} \int_b^r \frac{G-r^2}{r} \Phi(r) dr \end{aligned} \quad (2.12)$$

Удовлетворяя условию (2.5), найдем уравнение для определения постоянной интегрирования G

$$\int_a^{a_1} \frac{G-r^2}{r} \Phi(r) dr + \int_{b_1}^b \frac{G-r^2}{r} \Phi(r) dr = 0 \quad (2.13)$$

Таким образом, для определения постоянных a_1 , b_1 и G имеем условия (2.11) и (2.13). Введем следующие обозначения:

$$m = \frac{M}{2\pi L \tau_0 a^2}, \quad k = \frac{ag}{2\tau_0}, \quad H = \frac{G}{a^2}, \quad \xi = \frac{r^2}{a^2}, \quad d = \frac{b}{a}$$

Теперь задача об определении постоянных a_1 , b_1 и G может быть сформулирована следующим образом: найти $\xi_1 = (a_1/a)^2$, $\xi_2 = (b_1/a)^2$ и H такие, что $\xi_1, \xi_2, H \in [1, d^2]$, где ξ_1, ξ_2 — корни уравнения

$$\Phi(\xi) = 1 - \frac{\xi}{\sqrt{m^2 + k^2 \xi (H - \xi)^2}} = 0 \quad (2.14)$$

а H удовлетворяет уравнению

$$\int_1^{\xi_1} \frac{H - \xi}{\xi} \Phi(\xi) d\xi + \int_{\xi_2}^{d^2} \frac{H - \xi}{\xi} \Phi(\xi) d\xi = 0 \quad (2.15)$$

Исследуем возможные частные случаи, которые могут представиться при решении указанной задачи.

1°. Рассмотрим случай, когда $m = 0$. Это условие эквивалентно равенству $M = 0$. Такой тип течения в кольцевом зазоре изучен в работе [3]. Внутри потока существует ядро, движущееся как твердое тело. Течение существует только при $k > k_0 = 1/(d-1)$. При увеличении k от нуля предел текучести достигается одновременно на обоих цилиндрах.

2°. В случае $k = 0$ отсутствует продольный перепад давлений. Течение появляется только при $m > 1$ и изучено в работах [5]. Если $m < d^2$, то оно охватывает только часть зазора возле внутреннего цилиндра. При $m \geq d^2$ предел текучести оказывается превзойденным в зазоре и течение распространяется на среду от внутреннего до внешнего цилиндра.

3°. В случае $0 < m \leq 1$ заметим, прежде всего, что знак $d\omega/dr$ противоположен знаку $\Phi(\xi)$ и так как внутри зазора при установившемся режиме течения должно быть $d\omega/dr \leq 0$, то физический смысл имеют только те значения $\Phi(\xi)$, которые удовлетворяют неравенству $\Phi(\xi) \geq 0$. При $m \leq 1$ и $H > 1$ $\Phi(H) < 0$. В силу непрерывности $\Phi(\xi)$ существует некоторая окрестность H , в которой $\Phi(\xi) < 0$. Перепишем уравнение (2.14) в виде

$$m^2 + k^2 \xi (H - \xi)^2 = \xi^2 \quad (2.16)$$

Оно может иметь корни $\xi_1 > 1$ и $\xi_2 < d^2$, если только

$$H_{\min} = 1 + \frac{\sqrt{1-m^2}}{k} < H < d^2 - \frac{\sqrt{d^4-m^2}}{kd} = H_{\max}$$

Отрезок $[H_{\min}, H_{\max}]$ имеет отличную от нуля длину, если

$$k > K(m) = \frac{d\sqrt{1-m^2} + \sqrt{d^4-m^2}}{d(d^2-1)}$$

В том случае, когда $k = K(m)$, уравнение (2.16) имеет корни $\xi_1 = 1$ и $\xi_2 = d^2$. Функция $K(m)$ обладает следующими свойствами:

$$K(0) = k_0 = \frac{1}{d-1}, \quad K(1) = k_1 = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{d^2+1}{d^2-1}}$$

$$\frac{k_1}{k_0} < 1, \quad \frac{dK(0)}{dm} = 0, \quad \frac{dK(1)}{dm} = -\infty$$

Докажем теперь, что уравнение (2.15) при $k > K(m)$, $0 \leq m \leq 1$ имеет единственное решение $H \in [H_{\min}, H_{\max}]$. Рассмотрим для этого функцию

$$Z(H) = \int_1^{\xi_1} \frac{H - \xi}{\xi} \Phi(\xi) d\xi + \int_{\xi_2}^{d^2} \frac{H - \xi}{\xi} \Phi(\xi) d\xi$$

На отрезках $[1, \xi_1]$ и $[\xi_2, d^2]$ функция $\Phi(\xi) \geq 0$; поэтому будем иметь

$$\sqrt{m^2 + k^2 \xi (H - \xi)^2} \geq \xi$$

Но тогда $Z(H)$ допускает следующие оценки:

$$Z(H) \leq \int_1^{\xi_1} \frac{H - \xi}{\xi} \Phi(\xi) d\xi < \int_1^{\xi_1} \frac{H - \xi}{\xi} d\xi = Z^+(H) = H \ln \xi_1 - (\xi_1 - 1)$$

$$Z(H) \geq \int_{\xi_2}^{d^2} \frac{H - \xi}{\xi} \Phi(\xi) d\xi > \int_{\xi_2}^{d^2} \frac{H - \xi}{\xi} d\xi = Z^-(H) = H \ln \frac{d^2}{\xi_2} - (d^2 - \xi_2)$$

Используя очевидные неравенства $\xi_1 < H < \xi_2$, получим

$$Z^+(H) > 0 \quad \text{при } H > H_{\min}, \quad Z^+(H_{\min}) = 0$$

$$Z^-(H) < 0 \quad \text{при } H < H_{\max}, \quad Z^-(H_{\max}) = 0$$

Рассмотрим теперь производную от функции $Z(H)$

$$\frac{dZ}{dH} = \int_1^{\xi_1} \left[\frac{1}{\xi} - \frac{m^2}{(m^2 + k^2 \xi (H - \xi)^2)^{3/2}} \right] d\xi + \int_{\xi_2}^{d^2} \left[\frac{1}{\xi} - \frac{m^2}{(m^2 + k^2 \xi (H - \xi)^2)^{3/2}} \right] d\xi \geq$$

$$\geq \int_1^{\xi_1} \left[\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\sqrt{m^2 + k^2 \xi (H - \xi)^2}} \right] d\xi + \int_{\xi_2}^{d^2} \left[\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\sqrt{m^2 + k^2 \xi (H - \xi)^2}} \right] d\xi > 0$$

Так как

$$Z^-(H) < Z(H) < Z^+(H), \quad \frac{dZ}{dH} > 0$$

при $H \in [H_{\min}, H_{\max}]$, то уравнение $Z(H) = 0$ имеет на отрезке $[H_{\min}, H_{\max}]$ единственный корень.

Таким образом, при $0 \leq m \leq 1$ течение существует при $k > K(m)$, причем, если k увеличивается от нуля, то предел текучести достигается при $k = K(m)$ одновременно на обоих цилиндрах. Внутри потока имеется твердое ядро, толщина которого равна разности $\sqrt{\xi_2} - \sqrt{\xi_1}$. Далее имеем $p_{rz}(\xi) \geq 0$ при $1 \leq \xi \leq \xi_1$ и $p_{rz}(\xi) \leq 0$ при $\xi_2 \leq \xi \leq d^2$. Так как знак dv_z/dr совпадает со знаком p_{rz} , то отсюда немедленно следует, что профили скоростей имеют вид, указанный на фиг. 5.

Когда $m = 1$ и $k = k_1$, то $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = d^2$ и $H = 1$. Если $k < k_1$, то течения в зазоре быть не может из-за невозможности удовлетворить условию $d\omega/dr \leq 0$, хотя предел текучести достигнут на внутреннем цилиндре уже при $k = 0$. Увеличение k от нуля до k_1 не вызывает течения в зазоре, что возможно только при условии, что p_{rz} на внутреннем цилиндре при $0 \leq k \leq k_1$ обращается в нуль.

Для удобства изложения последующих результатов построим, как и в § 1, диаграмму состояний (фиг. 2). Течениям, рассмотренным в пп. 1° и 2° соответствуют точки осей k и m , расположенных в интервалах (k_0, ∞) и $(1, \infty)$. Результатам, полученным в п. 3°, на диаграмме состояний соответствуют точки полосы $\{0 \leq k < \infty, 0 \leq m \leq 1\}$, в которой целиком расположена область G_1 и часть области G_2 .

Точкам области G_1 никаких течений в зазоре соответствовать не будет, так как приложенные нагрузки недостаточны для того, чтобы касательные напряжения внутри зазора превзошли предел текучести τ_0 . Наоборот, точкам области G_2 будут соответствовать течения с ядром внутри потока и характерные профили скоростей v_z и ω будут такими, как это показано на фиг. 5. Линия L_{12} , разделяющая области G_1 и G_2 , определяется уравнением $k = K(m)$.

4°. В случае $m \geq d^2$ уравнение (2.14) при $k > 0$, $H \in [1, d^2]$ не имеет корней на отрезке $[1, d^2]$. Следовательно, $\Phi(\xi) > 0$ при $\xi \in [1, d^2]$ и режим течения с ядром в потоке в этом случае осуществляться не может. Решение системы (2.1) при указанных обстоятельствах может быть получено ее непосредственным интегрированием при граничных условиях

$$\begin{aligned} p_{r\varphi}(a) &= -\frac{M}{2\pi L a^2}, & \omega(b) &= 0 \\ v_z(a) &= 0, & \frac{dv_z(G)}{dr} &= 0, & v_z(b) &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Используя четыре первых условия (2.17), найдем

$$\mu\omega = \frac{M}{2\pi L} \int_r^b \frac{1}{r^3} \Phi(r) dr, \quad \mu v_z = \frac{1}{2} g \int_a^r \frac{G-r^2}{r} \Phi(r) dr \quad (2.18)$$

Последнее условие (2.18) для определения H даст уравнение

$$\int_1^{d^2} \frac{H-\xi}{\xi} \Phi(\xi) d\xi = 0 \quad (2.19)$$

Докажем разрешимость последнего уравнения. Переписывая его в виде

$$H = f(H) = \frac{d^2-1}{\ln d^2} + \frac{1}{\ln d^2} \int_1^{d^2} \frac{(H-\xi) d\xi}{\sqrt{m^2 + k^2 \xi (H-\xi)^2}}$$

и используя неравенство $\Phi(\xi) > 0$ или эквивалентное ему

$$\sqrt{m^2 + k^2 \xi (H-\xi)^2} > \xi$$

получим

$$\begin{aligned} f(H) &\leq \frac{d^2-1}{\ln d^2} + \frac{1}{\ln d^2} \int_1^{d^2} \frac{(d^2-\xi) d\xi}{\sqrt{m^2 + k^2 \xi (H-\xi)^2}} < \frac{d^2-1}{\ln d^2} + \frac{1}{\ln d^2} \int_1^{d^2} \frac{H-\xi}{\xi} d\xi = d^2 \\ f(H) &\geq \frac{d^2-1}{\ln d^2} + \frac{1}{\ln d^2} \int_1^{d^2} \frac{(1-\xi) d\xi}{\sqrt{m^2 + k^2 \xi (H-\xi)^2}} > \frac{d^2-1}{\ln d^2} + \frac{1}{\ln d^2} \int_1^{d^2} \frac{1-\xi}{\xi} d\xi = 1 \end{aligned}$$

Аналогично для производной df/dH будем иметь

$$\left| \frac{df}{dH} \right| = \frac{1}{\ln d^2} \int_1^{d^2} \frac{m^2 d\xi}{(m^2 + k^2 \xi (H-\xi)^2)^{3/2}} < \frac{1}{\ln d^2} \int_1^{d^2} \frac{d\xi}{\xi} = 1$$

Но тогда $f(H)$ — сжатое отображение отрезка $[1, d^2]$ на себя, и уравнение $H = f(H)$ имеет на отрезке $[1, d^2]$ единственное решение [6].

Течениям, исследованным в этом пункте на диаграмме состояний, будут соответствовать точки, расположенные в области G_5 выше прямой $m = d^2$. Профили скоростей v_z и ω в отличие от п. 3° уже не будут иметь прямолинейных участков (фиг. 6).

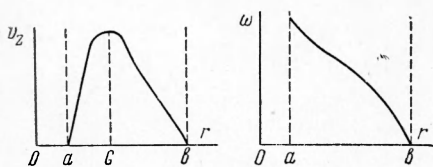
5°. В случае $i \leq m \leq d^2$ уравнение (2.14) будет иметь два действительных положительных корня, если $H = m$

$$\xi_1 = m, \quad \xi_{2m} = \frac{1}{2} \left(m + \frac{1}{k^2} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(m + \frac{1}{k^2} \right)^2 + \frac{m}{k^2}} \quad (2.20)$$

Уравнение (2.15) после подстановки в него выражений (2.20) будет определять в неявном виде некоторую функцию $M(k)$

$$Z_0(M) = \int_1^M \frac{M-\xi}{\xi} \Phi_M(\xi) d\xi + \int_{\xi_{2M}}^{d^2} \frac{M-\xi}{\xi} \Phi_M(\xi) d\xi = 0 \quad (2.21)$$

где через $\Phi_M(\xi)$ обозначена функция $\Phi(\xi)$, в которой m и H заменены на m . Легко видеть, что $\xi_{2m} > m$ при любом конечном k и $\xi_{2m} \rightarrow m$ при $k \rightarrow \infty$, а при $k \rightarrow k_1$ будем иметь $\xi_{2m} \rightarrow d^2$. Функция $m = M(k)$ обладает следующими свойствами:



Фиг. 6

$$\lim_{k \rightarrow k_1} M(k) = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} M(k) = \frac{d^2 - 1}{\ln d^2}$$

На диаграмме состояний $m = M(k)$ соответствует кривая L_{23} .

Покажем, что при фиксированном $k > k_1$ и $m < M(k)$ система (2.14) — (2.15) однозначно разрешима, причем $m < \xi_1 < \xi_2 < d^2$ и $H > m$. Изучим для этого поведение функции

$$Z(H) = \int_1^{\xi_1} \frac{H-\xi}{\xi} \Phi(\xi) d\xi + \int_{\xi_2}^{d^2} \frac{H-\xi}{\xi} \Phi(\xi) d\xi \quad (2.22)$$

при

$$m \leq H \leq d^2 - \frac{\sqrt{d^4 - m^2}}{kd} = H_{\max}$$

Уравнение (2.14) при $H = H_{\max}$ имеет корень $\xi_2 = d^2$, а так как $H_{\max} > m$ и в силу этого $\xi_1 < H$, то немедленно получаем $Z(H_{\max}) > 0$. Рассмотрим теперь разность

$$\begin{aligned} Z_0(M) - Z(m) &= (M - m) \ln \left(d^2 \frac{m}{\xi_{2M}} \right) + \int_m^M \frac{M-\xi}{\xi} \Phi_M(\xi) d\xi - \\ &- \int_{\xi_{2m}}^{\xi_{2M}} \frac{m-\xi}{\xi} \Phi_m(\xi) d\xi + \int_1^m \left[\frac{m-\xi}{\sqrt{m^2 + k^2 \xi (m-\xi)^2}} - \frac{M-\xi}{\sqrt{M^2 + k^2 \xi (M-\xi)^2}} \right] d\xi + \\ &+ \int_{\xi_{2M}}^{d^2} \left[\frac{m-\xi}{\sqrt{m^2 + k^2 \xi (m-\xi)^2}} - \frac{M-\xi}{\sqrt{M^2 + k^2 \xi (M-\xi)^2}} \right] d\xi \end{aligned}$$

Разности, стоящие в подынтегральных выражениях двух последних интегралов, можно представить в виде

$$\frac{m-\xi}{\sqrt{m^2 + k^2 \xi (m-\xi)^2}} - \frac{M-\xi}{\sqrt{M^2 + k^2 \xi (M-\xi)^2}} = \frac{m_c \xi (m-M)}{(m_c^2 + k^2 \xi (m_c - \xi)^2)^{3/2}}$$

где $m < m_c < M$. Так как $M > m$ и $\xi_{2m} < \xi_{2M}$, то два других интеграла в выражении $Z_0(M) - Z(m)$ положительны. В силу того что $\xi_{2m} < \xi_{2m_c} < \xi_{2M}$ и $m < m_c < M$, для двух последних интегралов будем

иметь следующие оценки:

$$(m - M) \left[\int_1^m \frac{m_c \xi d\xi}{(M_c^2 + k^2 \xi (m_c - \xi)^2)^{3/2}} + \int_{\xi_{2M}}^{d^2} \frac{m_c \xi d\xi}{(m_c^2 + k^2 \xi (m_c - \xi)^2)^{3/2}} \right] > \\ > (m - M) \ln \left(d^2 \frac{m}{\xi_{2M}} \right)$$

Следовательно, будем иметь $Z_0(M) - Z(m) > 0$, а так как $Z_0(M) = 0$, то $Z(m) < 0$.

Рассмотрим теперь производную

$$\frac{dZ}{dH} = \int_1^{\xi_1} \left[\frac{1}{\xi} - \frac{m^2}{(m^2 + k^2 \xi (H - \xi)^2)^{3/2}} \right] d\xi + \int_{\xi_2}^{d^2} \left[\frac{1}{\xi} - \frac{m^2}{(m^2 + k^2 \xi (H - \xi)^2)^{3/2}} \right] d\xi$$

При $H \in [m, H_{\max}]$ в силу того что

$$\sqrt{m^2 + k^2 \xi (H - \xi)^2} \geq \xi$$

на отрезках $[1, \xi_1]$ и $[\xi_2, d^2]$ получим $dZ/dH > 0$. Из монотонности $Z(H)$ следует, что уравнение $Z(H) = 0$ имеет на отрезке $[m, H_{\max}]$ только одно решение.

Таким образом, при $m < M(k)$, $k > k_1$ внутри потока существует твердое ядро. Так как $H > m$, то $p_{rz}(\xi_1)$ и $p_{rz}(\xi_2)$ имеют разные знаки. Как и в п. 3°, профили скоростей имеют прямолинейные участки и скорость движения ядра в направлении оси z будет максимальной скоростью течения в продольном направлении (фиг. 5). Линия L_{23} будет верхней границей для течений рассмотренного типа (фиг. 1).

Исследуем теперь характер течения внутри зазора при $m > M(k)$, $k \geq k_1$ и $m > 1$, $k < k_1$. Совершенно аналогично предыдущему, составив разность $Z(m) - Z_0(M)$, можно доказать, что при $m > M(k)$ будем иметь $Z(m) > 0$. Неравенство $Z(m) > 0$ будет справедливо и при $k < k_1$, хотя форма функции $Z(H)$ будет несколько отличаться от (2.22). С другой стороны, для $Z(H)$ в рассматриваемых условиях будут справедливы оценки

$$Z(H) < Z^+(H) = H \ln H - (H - 1), \quad Z^+(1) = 0, \quad \frac{dZ}{dH} > 0, \quad H \in [1, m]$$

Из перечисленных свойств $Z(H)$ ясно, что уравнение $Z(H) = 0$ имеет на отрезке $[1, m]$ единственное решение.

С качественной стороны, течение будет определяться характером решений уравнения (2.14). При $H < m$ могут представиться три случая:

- а) на отрезке $[1, d^2]$ уравнение (2.14) корней не имеет;
- б) на отрезке $[1, d^2]$ уравнение (2.14) имеет только один корень $\xi_1 < d^2$, а второй положительный корень выходит за пределы указанного промежутка;
- в) на отрезке $[1, d^2]$ уравнение (2.14) имеет два различных корня: $m < \xi_1 < \xi_2 < d^2$.

Случай (а) будет соответствовать течениям с полным пластическим разрешением среды внутри зазора. На диаграмме состояний течениям этого типа будут соответствовать точки области G_5 , расположенные ниже прямой $m = d^2$, а характерные профили скоростей будут такими, как это указано на фиг. 6. Аналитическая форма решений для этого случая, когда $\Phi(\xi) > 0$ при всех $\xi \in [1, d^2]$, может быть получена аналогично тому, как это было сделано в п. 4°. Функция $Z(H)$ в этом случае будет иметь вид

$$Z(H) = \int_1^{d^2} \frac{H - \xi}{\xi} \Phi(\xi) d\xi \quad (2.23)$$

и уравнение $Z(H) = 0$ будет иметь единственное решение на отрезке $[1, m]$.

На кривых L_{35} и L_{45} , ограничивающих G_5 снизу, $\Phi(\xi)$ будет обращаться в нуль только в одной точке отрезка $[1, d^2]$. Последнее может осуществляться двумя способами: либо уравнение (2.14) имеет на отрезке $[1, d^2]$ кратный корень, либо $\xi_1 = d^2$. Уравнение (2.14) после замены переменных $x = 1/\xi$ можно представить в виде

$$x^3 + \left(\frac{kH}{m}\right)^2 x^2 - \frac{2k^2H+1}{m^2} x + \frac{k^2}{m^2} = 0 \quad (2.24)$$

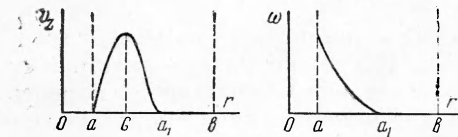
Существование кратного корня (2.24) возможно при условии равенства нулю дискриминанта уравнения

$$\frac{1}{4} \left[\frac{k^2}{m^2} + \frac{2}{27} \left(\frac{kH}{m}\right)^6 + \left(\frac{kH}{m}\right)^2 \frac{2k^2H+1}{3m^2} \right]^2 - \frac{1}{27} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{kH}{m}\right)^4 + \frac{2k^2H+1}{m^2} \right]^3 = 0 \quad (2.25)$$

Кратный корень (2.24) тогда можно записать в форме

$$R = \xi_1 = \xi_2 = \frac{3m^2}{2k^2H+1} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{kH}{m}\right)^2 + \sqrt{\frac{1}{9} \left(\frac{kH}{m}\right)^4 + \frac{2k^2H+1}{3m^2}} \right]$$

Легко видеть, что при $k = 0$ условие (2.25) не может выполняться ни при каком конечном m . Уравнения (2.25) совместно с (2.23) определяют некоторую зависимость $m = F(k)$, которой на диаграмме состояний будет соответствовать линия L_{35} . При $k \rightarrow \infty$ функция $F(k) \rightarrow (d^2 - 1)/\ln d^2$.



Фиг. 7

Величина R не должна превосходить d^2 , в противном случае функция $\Phi(\xi) > 0$ на отрезке $[1, d^2]$; поэтому левее точки $A(m_2, k_2)$ (фиг. 2), координаты которой определяются из системы уравнений (2.23), (2.25) и уравнения $R = d^2$, указанное ранее определение нижней границы области G_5 неприменимо. Можно показать, что при $m > m_2$, $k < k_2$ уравнение (2.14) для любого $H \in [1, m]$ не может иметь на отрезке $[1, d^2]$ более одного корня, а следовательно, при $k < k_2$ уравнение нижней границы области G_5 будет определяться из уравнения (2.23) совместно с условием $\xi_1 = d^2$.

Рассмотрим теперь случай (б). Заметим, что при $k = 0$ уравнение (2.25) имеет два положительных корня: $x_1 = 1/m$, $x_2 = 0$ или $\xi_1 = m$ и $\xi_2 = \infty$. Если k достаточно мало, то $\xi_2 > d^2$, в то время, как $\xi_1 < d^2$. Решение имеет физический смысл только при $H < m$

$$\mu v_z = \frac{1}{2} g \int_a^r \frac{G-r^2}{r} \Phi(r) dr, \quad \mu \omega = \frac{M}{2\pi L} \int_r^{a_1} \frac{2}{r^3} \Phi(r) dr \quad (2.26)$$

а функция $Z(H)$ теперь имеет вид

$$Z(H) = \int_1^{\xi_1} \frac{H-\xi}{\xi} \Phi(\xi) d\xi \quad (2.27)$$

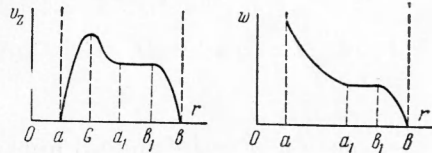
Система (2.14), (2.26) будет частным случаем системы (2.14) — (2.15), а однозначная разрешимость последней была доказана ранее.

Если k возрастает от нуля, то при фиксированном m ξ_2 будет убывать, а ξ_1 возрастать. При $m > m_2$ ξ_1 раньше ξ_2 достигнет точки $\xi = d^2$ и, наоборот, при $m = m_2$ для некоторого k будем иметь $\xi_1 < \xi_2 = d^2$. Уравнение (2.26) совместно с уравнением $\xi_2 = d^2$ будет определять некоторую $k = K_1(m)$, которой на диаграмме состояний будет соответствовать линия L_{34} . При $m \rightarrow 1$ будем иметь $K_1 \rightarrow k_1$, при $m \rightarrow m_2$ функция $K_1(m) \rightarrow k_2$. При $k < K_1(m)$ течения в зазоре будут соответствовать точки области G_4 . Течение будет распространяться только на часть зазора, прилегающую к внутреннему цилиндру, а твердое ядро будет неподвижно и заполняет остальную часть зазора вплоть до внешнего цилиндра. Профили скоростей для области показаны на фиг. 7.

В зависимости от того, больше или меньше m величины m_2 , судьба ядра при увеличении k будет различной. Действительно, при $m > m_2$ ядро полностью разрушится прежде, чем оно успеет отойти внутрь потока ($\xi_1 = d^2$ на линии L_{45}), а при $m < m_2$ дальнейшее увеличение k от $k = K_1(m)$ приводит к отделению ядра от внешнего цилиндра. В этом случае (2.14) будет иметь решения типа (в) $m < \xi_1 < \xi_2 < d^2$. Течениям внутри зазора будут в этом случае соответствовать точки области G_3 . В силу того что $H < m$, будем иметь

$$P_{rz}(\xi_1) < 0, P_{rz}(\xi_2) < 0, P_{rz}(H) = 0$$

Профиль скоростей v_z теряет в отличие от течений, соответствующих области G_2 , качественный зеркально-симметричный характер относительно ядра (фиг. 8). Скорость движения ядра в продольном направлении перестает быть максимальной скоростью среди всех v_z в зазоре. На линии L_{23} функция $P_{rz}(\xi_1)$ обращается в нуль, что и обуславливает качественное изменение v_z в G_3 по сравнению с G_2 .



Фиг. 8

В заключение рассчитаем поле давлений внутри зазора. Для областей G_5 и G_4 будем иметь соответственно

$$p = -gz + \rho \int_r^b r \omega^2 dr, \quad p = -gz + \rho \int_r^{a_1} r \omega^2 dr$$

где ω определяется формулами (2.18) и (2.27).

В этом случае, когда ядро отошло внутрь потока, условие движения ядра как твердого тела можно записать в виде

$$\Pi(a_1) + \frac{1}{2} \rho \omega_1^2 (b_1^2 - a_1^2) = \Pi(b_1)$$

где ω_1 — угловая скорость вращения ядра. Уравнение для определения $\Pi(r)$ в системе (2.1) должно интегрироваться отдельно для каждой из областей (1) и (2) (фиг. 5). Интегрируя, окончательно получим

$$P_{(1)} = -gz + \rho \int_r^{a_1} r \omega_{(1)}^2 dr + \rho \int_{b_1}^b r \omega_{(2)}^2 dr - \frac{1}{2} \rho \omega_1^2 (b_1^2 - a_1^2)$$

$$P_{(2)} = -gz + \rho \int_r^b r \omega_{(2)}^2 dr$$

где ω_1 и ω_2 задаются формулами (2.12).

Автор благодарит Г. Г. Черного за внимание и руководство при выполнении предлагаемой работы.

Поступила 5 VII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградов Г. В., Мамаков А. А., Павлов В. П. Экспериментальное исследование аномально-вязких тел при сложном напряженном состоянии. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 6.
2. Виноградов Г. В., Мамаков А. А., Тябин Н. В. Течение аномально-вязких тел в условиях сложного напряженного состояния. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 2.
3. Воларович М. П., Гуткин А. М. Течение пластично-вязкого тела между двумя параллельными плоскими стенками и в кольцевом пространстве между коаксиальными трубками. ЖТФ, 1946, т. XVI, вып. 3.
4. Reiner M. Deformation strein and flow. London, 1960.
5. Воларович М. П., Толстой Д. М. Определение постоянных пластического потока минеральных суспензий. ЖФХ, 1933, т. IV, № 6.
6. Колмогоров А. Н., Фомин С. Ф. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд-во МГУ, 1954, вып. 1.