

8. Сарайкин В. А. Смещение границы полупространства при распространении под углом к ней трещины продольного сдвига // Тез. докл. конф. по распространению упругих и упругопластических волн.— Фрунзе, 1983.— Ч. 2.
 9. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны.— Л.: Судостроение, 1972.

г. Новосибирск

Поступила 24/VIII 1988 г.

УДК 539.3:534.1

В. В. Ларченко

БИФУРКАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ВОЗМУЩЕНИЯ СПЕКТРА КРИТИЧЕСКИХ ДАВЛЕНИЙ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Изложены новые явления в бифуркационной потере устойчивости упругой оболочки в условиях сингулярного возмущения. Показано, в частности, что при возмущении срединной поверхности и нагрузки изменяются тип бифуркации точек ветвления, группа вращения малой формы равновесия, кратность собственных значений. Сформулированы условия на функционалы уравнения разветвления, при которых кратность увеличивается до заданной. Это позволяет существенно уточнить теорию моделей потери устойчивости. Для установления отмеченных фактов существенно наличие сгущения в спектре при $\mu \rightarrow 0$ (μ — естественный малый параметр при старших производных). В рамках проведенных исследований предложена теоретико-экспериментальная методика оценки эффективности электрофизического воздействия на тонкие оболочки.

1. Пусть (r, φ) — полярная система координат, начало которой находится в вершине пологого сферического сегмента. Рассмотрим в пространстве $\dot{H}^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$, $\Omega = [0, 1) \times [0, 2\pi]$ краевую задачу Маргерра — Власова [1—3]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \mu^{2(3-k)} \Delta^2 w &= \theta \Delta \Phi + \mu^q [L(w, \Phi) + L(w_\tau, \Phi)] + \mathcal{P}(r), \quad (r, \varphi) \in \Omega, \\ \mu^{2(k-1)} \Delta^2 \Phi &= -\theta \Delta w - \mu^q [L(w, w) + 2L(w, w_\tau)]/2, \\ w &= w' = 0, \quad A\Phi = B\Phi = 0, \quad r \in \partial\Omega, \\ rL(u, v) &= u''Av + v''Au - 2r^{-1}BuBv, \quad A(\cdot) = (\cdot)' + r^{-1}(\cdot)'' , \\ B(\cdot) &= [(\cdot)' - r^{-1}(\cdot)], \quad \mathcal{P}(r) = p + \delta\eta(r), \quad p \in \{p_n\}, \quad |\delta| \ll 1. \end{aligned}$$

Здесь w — нормальное перемещение срединной поверхности; Φ — функция напряжения Эри; $\mathcal{P}(r)$ — внешнее давление; $\{p_n\}$ — последовательность критических давлений совершенного сферического купола; δ — плотность возмущения давления; $\mu^2 = h/a\gamma$ — естественный малый параметр; h — толщина; $2a = \text{diam } \Omega$; $\gamma^2 = 12(1 - \nu^2)$; $\nu \in (0, 0, 5)$ — коэффициент Пуассона; θ — полураствор; $w_\tau(r, \varphi)$ — 2π -периодическое возмущение срединной поверхности такое, что $w_\tau(r, \varphi) \in \mathcal{F}_\tau(\Omega)$, $|\tau_n| \ll 1$, $\|f_n(r)\|_c = 1$, где

$$\mathcal{F}_\tau(\Omega) = \left\{ f_\tau \in \dot{H}^2(\Omega) \mid f_\tau(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^\tau(r) \cos n\varphi, \quad f_n^\tau(r) = \tau_n f_n(r) \right\}.$$

Если решение задачи (1.1) известно, то переход к размерным переменным задается формулами

$$(1.2) \quad \begin{aligned} F &= \mu^{2(k-1)+q} E a^2 \Phi, \quad \{W, W_\tau\} = a \mu^q \{w, w_\tau\}, \\ R &= ar, \quad \{Q_p, \rho_\delta\} = \mu^{2(k-1)+q} E \gamma \{p, \delta\}. \end{aligned}$$

Здесь и далее k, q — числовые параметры, при которых искомые неизвестные в (1.2) имеют порядок $O(1)$ при $\mu \rightarrow 0$.

2. Проектируя возмущение решения на собственные функции задачи (1.1), аналогично [4] введем малый параметр ξ_n и представим вектор-функцию (w, Φ) в виде ряда Пуанкаре — Ляпунова в окрестности простой точ-

ки неосесимметричной бифуркации:

$$(2.1) \quad \omega \sim \int_1^r \omega(z) dz + \xi_n r^n \omega_n(r) \cos n\varphi + \xi_n^2 \left[\int_1^r g_n(z) dz + r^{2n} \gamma_n(r) \cos 2n\varphi \right] + \dots,$$

$$\Phi \sim \int_0^r f(z) dz + \zeta_n r^n \varphi_n(r) \cos n\varphi + \xi_n^2 \left[\int_0^r \psi_n(z) dz + r^{2n} \delta_n(r) \cos 2n\varphi \right] + \dots$$

Используя (2.1), сведем систему Маргерра — Власова к рекуррентной последовательности краевых задач. Нулевое приближение по ξ_n :

$$(2.2) \quad \mu^{2(3-k)} \mathcal{A} \omega = \theta r f + \mu^q \omega f + (1/2) p r^2, \quad \mu^{2(k-1)} \mathcal{A} f = \\ = -\theta r \omega - (1/2) \mu^q \omega^2,$$

$$\omega(1) = f(1) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} |\omega r^{-1}| < \infty, \quad \lim_{r \rightarrow 0} |f r^{-1}| < \infty, \quad \mathcal{A}(\cdot) = r \frac{d}{dr} r^{-1} \frac{d}{dr} r(\cdot).$$

Нелинейная задача на собственные значения относительно параметра p имеет вид

$$(2.3) \quad \mu^{2(3-k)} \Delta_n^2 \omega_n = \theta \Delta_n \varphi_n + \mu^q [L_f^n \omega_n + L_\omega^n \varphi_n], \\ \mu^{2(k-1)} \Delta_n^2 \varphi_n = -\theta \Delta_n \omega_n - \mu^q L_\omega^n \omega_n, \\ r = 1, \quad \chi_n = \chi_n' = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} |\chi_n' r^{-1}| < \infty, \quad \lim_{r \rightarrow 0} |\chi_n''' r^{-1}| < \infty, \quad \chi_n = \omega_n, \quad \varphi_n,$$

где $\Delta_n(\cdot) = (\cdot)'' + (2n+1)r^{-1}(\cdot)'$; $L_u^n(\cdot) = r^{-1}u'[(\cdot)' + (n-n^2)r^{-2}(\cdot)] + r^{-1}u[u'' + 2nr^{-1}(\cdot)' + nr^{-2}(n-1)(\cdot)]$.

Второе приближение по ξ_n для осесимметричных компонент запишем как

$$(2.4) \quad \mu^{2(3-k)} \mathcal{A} g_n = \theta r \psi_n + \mu^q [\omega \psi_n + g_n f] + \Omega_n(\omega_n, \varphi_n), \\ \mu^{2(k-1)} \mathcal{A} \psi_n = -\theta r g_n - \mu^q \omega g_n - (1/2) \Omega_n(\omega_n, \omega_n), \\ \Omega_n(\omega_n, \varphi_n) = (1/2) \mu^q r^{2n} [\sigma_n \omega_n \sigma_n \varphi_n - n^2 r^{-1} (\varphi_n \sigma_n \omega_n + \omega_n \sigma_n \varphi_n) + \\ + n^2 r^{-2} \omega_n \varphi_n], \quad \sigma_n(\cdot) = nr^{-1}(\cdot) + (\cdot)', \\ g_n(1) = \psi_n(1) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} |r^{-1} g_n| < \infty, \quad \lim_{r \rightarrow 0} |r^{-1} \psi_n| < \infty.$$

Краевая задача для неосесимметричных составляющих второго приближения Пуанкаре — Ляпунова следующая:

$$(2.5) \quad \mu^{2(3-k)} \Delta_{2n}^2 \gamma_n = \theta \Delta_{2n} \delta_n + \mu^q [L_\omega^{2n} \delta_n + L_f^{2n} \gamma_n] + \alpha_n(\omega_n, \varphi_n), \\ \mu^{2(k-1)} \Delta_{2n}^2 \delta_n = -\theta \Delta_{2n} \gamma_n - \mu^q L_\omega^{2n} \gamma_n - (1/2) \alpha_n(\omega_n, \omega_n), \\ 2\alpha_n(\omega_n, \varphi_n) = (\vartheta_n \omega_n s_n \varphi_n + s_n \omega_n \vartheta_n \varphi_n + 2n^2 r^{-2} m_n \omega_n m_n \varphi_n) \mu, \\ \vartheta_n(\cdot) = (\cdot)'' + 2nr^{-1}(\cdot)' - l_n(\cdot), \quad l_n(\cdot) = (n-n^2)r^{-2}(\cdot), \quad s_n(\cdot) = \\ = r^{-1}(\cdot)' + l_n(\cdot), \quad m_n(\cdot) = r^{-1}(\cdot) - \sigma_n(\cdot), \\ \beta_n(1) = \beta_n'(1) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} |\beta_n' r^{-1}| < \infty, \quad \lim_{r \rightarrow 0} |\beta_n''' r^{-1}| < \infty, \quad \beta_n = \gamma_n, \quad \delta_n.$$

Вывод уравнения разветвления изложен в [5]. Некоторые его особенности пояснены в [4]. В принятых обозначениях оно имеет вид

$$(2.6) \quad G_n(\xi_n, \delta, \tau_n) = 4\xi_n^3 L_{30}^n + \tau_n L_\tau^n + 4\xi_n \delta L_{11}^n + \dots = 0, \\ L_{11}^n = \int_0^1 g_n'(r) S(r) dr, \quad L_\tau^n = \mu^q \int_0^1 f_n(r) D_n(\omega_n, \varphi_n, \omega, f, r) dr, \\ L_{30}^n = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ r^{4n+1} \left[\gamma_n \alpha_n(\omega_n, \varphi_n) + \frac{1}{2} \delta_n \alpha_n(\omega_n, \omega_n) \right] - \right.$$

$$- \psi_n \Omega_n(\omega_n, \omega_n) - 2g_n \Omega_n(\omega_n, \varphi_n) \} dr, \quad H_d(\cdot) = d\vartheta_n(\cdot) + d'\sigma_n(\cdot),$$

$$S(r) = \int_0^r \left(\int_0^t t' \eta(t') dt' \right) dt, \quad D_n(\omega_n, \varphi_n, \omega, f, r) = r^n [H_f \omega_n + H_\omega \varphi_n - n^2(\omega_n f' + \varphi_n \omega')].$$

Структура квазиполинома (2.6) и явное выражение для функционала L_{11}^n позволяют выделить бифуркационно неустойчивые формы равновесия. Действительно, пусть μ, θ, n фиксированы, $\tau_n = 0, p \in \{p_n\}$. Малое решение $\xi_n(\delta)$ будет бифуркационно неустойчивым, если для одних возмущений $S(r)$ уравнение $G(\xi_n, \delta, 0) = 0$ разрешимо при $\delta > 0$, для других — при $\delta < 0$. Содержательно это определение значит, что тип ветвления и механические явления, их сопровождающие, для неустойчивых форм зависят от распределения внешней нагрузки. Из теоремы Пьюизе, примененной к (2.6), следует, что, чтобы такое свойство имело место, достаточно на разных $S_n(r)$ изменение знака коэффициента L_{11}^n . Заметим, что по смыслу вывода L_{11}^n означает работу внешней силы на малой форме равновесия. Поэтому представляется естественным те решения $\xi_n(\delta)$, окрестность существования которых не зависит от знака вариации работы, отнести к устойчивым. Отсюда и из свойств функционала L_{11}^n очевиден критерий бифуркационной неустойчивости.

Введем множества $B_n^+ = \{r | g_n'(r) > 0\}, B_n^- = \{r | g_n'(r) < 0\}$. Если $B_n^+, B_n^- \neq \emptyset$, то малое решение $\xi_n(\delta)$ неустойчиво. Таким образом, чтобы установить указанное свойство решения задачи Маргерра — Власова (1.1), достаточно проинтегрировать систему (2.4) и проверить, является ли функция $g_n'(r)$ знакопеременной.

Пусть $\tau_n \neq 0$. Согласно [5], знак δ -окрестности существования $\xi_n(\delta)$ для сферической оболочки с достаточно малыми геометрическими несовершенствами не зависит от этих возмущений. Причем функция $\text{sign } \delta$ имеет один знак при $\tau_n = 0$ и $\tau_n \neq 0, |\tau_n| \ll 1$. Однако исследование уравнения (2.6) существенно сложнее при $\tau_n \neq 0$, так как оно содержит два независимых параметра δ и τ_n .

Применяя подготовительную теорему Вейерштрасса, построим для $G_n(\xi_n, \delta, \tau_n)$ полином его имени:

$$(2.7) \quad \xi_n^3 + H_2^n \xi_n^2 + H_1^n \xi_n + H_0^n = 0,$$

$$H_0^n = (1/4) L_\tau^n (L_{30}^n)^{-1} \tau_n + \dots, \quad H_1^n = L_{11}^n (L_{30}^n)^{-1} \delta + \dots, \quad H_2^n = O(\delta) + \dots$$

Здесь для аналитических функций $H_k^h(\delta, \tau_n)$ ($k = 0, 1, 2$) приведены лишь главные члены.

Среди значений δ, τ_n выделим те, которые лежат на дискриминантной линии. Для этого параметр Пуанкаре — Ляпунова должен одновременно обращать в тождества полином Вейерштрасса и уравнение

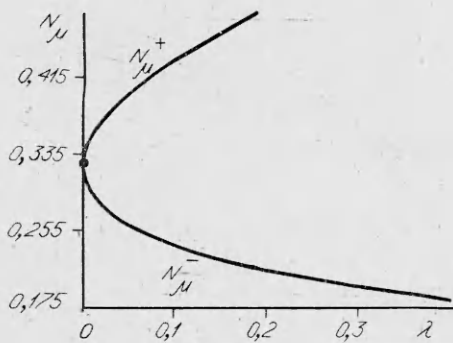
$$(2.8) \quad 3\xi_n^2 + 2H_2^n \xi_n + H_1^n = 0.$$

Составим результат $\mathcal{R}(\delta, \tau_n)$ для (2.7), (2.8). Применяя диаграммную технику Ньютона и теорему Пьюизе, из требования $\mathcal{R}(\delta, \tau_n) = 0$ получим возмущение собственного значения несовершенной оболочки

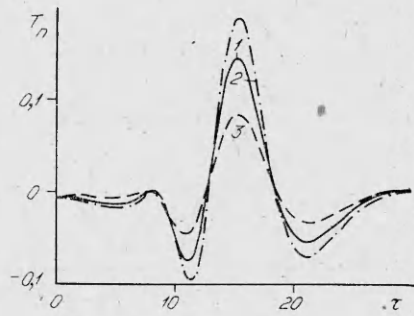
$$(2.9) \quad \delta = -\frac{3}{4} \frac{L_{30}^n}{L_{11}^n} (\tau_n L_\tau^n / L_{30}^n)^{2/3} + O(\tau_n^{4/3}), \quad L_{11}^n \neq 0, \quad L_{30}^n \neq 0.$$

Из (2.9) вытекает ряд заключений.

В последовательности $\{p_n\}$, упорядоченной по значению p -координат точки ветвления, возможно перераспределение с изменением типа бифуркации, если в начале спектра для одних $n=m$ функция $\text{sign}(L_{30}^m L_{11}^m)$ больше нуля, а для других $n=k$ $\text{sign}(L_{30}^k L_{11}^k)$ меньше нуля. В первом случае $\delta < 0$ и, следовательно, p_m , отвечающее собственной функции, имеющей группу вращения C_m , убывает, во втором — p_k возрастает. При



Р и с. 1



Р и с. 2

наличии сгущения в $\{p_n\}$, обусловленного сингулярным возмущением, это приводит к тому, что в неравенство $p_m > p_k$ при соответствующем выборе τ_m и τ_k можно изменить знак на противоположный. Амплитуды геометрических несовершенств оказываются при этом весьма малыми, так как здесь обсуждаются только такие элементы из $\{p_n\}$, которые удовлетворяют оценке

$$(2.10) \quad |p_m - p_k| < C_{k,m}\mu, \quad \mu \ll 1$$

($C_{k,m}$ — константа, не зависящая от μ , $C_{k,m} \ll 1$).

Таким образом, ясно, что смену знака в окрестности p^* у функции $\text{sign}(L_{30}^n L_{11}^n)$ необходимо учитывать при исследовании механизма потери устойчивости. Если L_{30}^n и L_{11}^n знакоопределены на первых элементах последовательности $\{p_n\}$, то, аналогично рассуждая, получаем, что перераспределение в $\{p_n\}$ также имеет место при достаточно больших геометрических несовершенствах. В новой последовательности точек ветвления $\{p_i'\}$, упорядоченной по p -координате, изменится соответствие между номером собственного значения и группой вращения собственной функции. Однако в этом случае не произойдет смены типа бифуркации малых форм равновесия, как это было раньше.

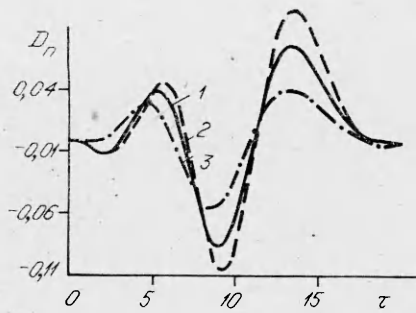
Очевидно, что количественные характеристики расхождения между $\{p_n\}$ и $\{p_i'\}$ зависят от $f_n(r) \in \mathcal{F}_\tau(\Omega)$.

3. Приближенный анализ краевых задач (2.2), (2.3) при $q = 1$, $k = 2$ проведен вариационным методом [6–8]. Для $\mu < \mu_0$, $\mu_0 \ll 1$ в расчетах вместо (ω, f) использовались нулевые члены разложения по целым степеням μ [9]:

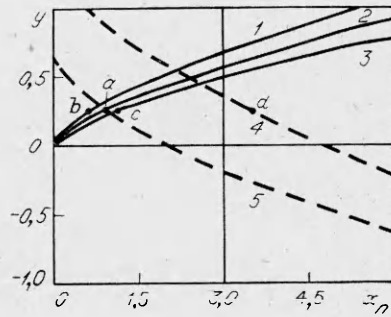
$$\omega(r, \mu) \sim \sum_{i=0}^j \mu^i [\omega_i(r) + \Pi_i \omega(\tau)],$$

$$f(r, \mu) \sim \sum_{i=0}^j \mu^i [f_i(r) + \Pi_i f(\tau)], \quad \mu\tau = 1 - r.$$

Здесь $(\cdot)_i$, $\Pi_i(\cdot)$ строят первым и вторым процессами процедуры пограничных функций. Обосновывается асимптотика методом Ньютона — Канторовича, если в качестве начального приближения принять отрезки рядов при $7 \leq j < \infty$ [10]. Необходимые априорные оценки получены лишь для $3\mu < \theta^2 p$. Это ограничение, а также результаты расчетов при различных μ позволили принять для μ_0 значение 10^{-4} . Заметим, что обоснование асимптотических разложений и построение проводятся по известной схеме. Тем не менее вопрос об их применении в (1.1) до сих пор остался открытым. Причина тому — затруднение в задании порядка механических величин в (1.2) при $\mu \rightarrow 0$. Выбор $k = 2$ почти очевиден [4], но указать порядок нелинейных членов сложно. Тот факт, что именно $q = 1$ представляет интерес при обосновании асимптотики, установлен лишь в процессе реализаций вычислений [6, 7]. Для других k и q точек неосесимметричной бифуркации не обнаружено.



Р и с. 3



Р и с. 4

Численный анализ (2.3)—(2.5) проведен ортогональной прогонкой [4, 11]. Для повышения устойчивости счета процесс ортогонализации Шмидта заменен в [4] вычислением базиса преобразованиями отражения. Изложение такой модификации прогонки дано в [11] (внимание автора на целесообразность ее применения обратил С. К. Годунов).

Функция распределения точек неосесимметричной бифуркации приведена на рис. 1. Здесь и далее $\theta = 0,15$, $\mu = 10^{-6}$, $\nu = 0,3$. Введена она по формуле

$$(3.1) \quad N_{\mu}(\lambda) = \mu^{-(\lambda_{k+1} - \lambda_k)^{-1}[\lambda + k\lambda_{k+1} - (k+1)\lambda_k]}, \\ \lambda \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}], k = n, n \pm 1, n \pm 2, \dots, \lambda_k = p_k/p^* - 1.$$

Согласно (3.1), механический смысл имеют только те λ , на которых выполняется равенство $\text{Entier}(\mu^{-1}N_{\mu}(\lambda)) = \mu^{-1}N_{\mu}(\lambda)$. Видно, что $N_{\mu}(\lambda)$ имеет две ветви $N_{\mu}^+(\lambda)$, $N_{\mu}^-(\lambda)$ и $\lambda = 0$ — начало спектра — это точка ветвления. Выбор параметра μ сделан малым, чтобы в пределах практической сходимости $N_{\mu}(\lambda)$ совпало с $N_0(\lambda)$, где $N_0(\lambda) = \lim_{\mu \rightarrow 0} N_{\mu}(\lambda)$. Тем самым $N_{\mu}(\lambda)$ на рис. 1 задает асимптотику спектра критических давлений.

Оценивая с ее помощью константы в (2.10), легко понять, что $C_{k,m} \rightarrow \min_{k,m}$ при $\lambda \rightarrow 0$, и, значит, p^* является точкой сгущения последовательности $\{p_n\}$.

На рис. 2 приведена $T_n(\tau) = 10g_n'(\tau)$ для $N_{\mu} = 0,329$, $N_{\mu}^+ = 0,385$, $N_{\mu}^- = 0,245$ (линии 1—3). Во всех случаях использовано условие нормировки $\|\omega_n\|_c = \mu$. Так как оба множества B_n^+ и B_n^- не пустые, то на основании предложенного критерия заключаем: малая форма равновесия, отвечающая каждой кривой на рис. 2, бифуркационно неустойчива. На одних возмущениях $S(r)$ она существует при $\delta > 0$, на других — при $\delta < 0$.

В $f_n(r)$ введем новую переменную $\tau = \mu^{-1}(1 - r)$. Рассмотрим функционал L_{τ}^n из (2.6) как интегральный оператор Фредгольма, заданный на элементах $f_n(\tau)$. На рис. 3 приведено его ядро $D_n(\tau)$ для $n = \text{Entier}(\mu^{-1}N_{\mu})$, $N_{\mu} = 0,329; 0,385; 0,315$ (кривые 1—3); $D_n(\tau)$ локализовано при $\tau < 20$. Это неравенство указывает размер области контроля несовершенств в тонкой оболочке. Существование экстремумов в $D_n(\tau)$ определяет те τ , изменение формы срединной поверхности в которых в наибольшей степени изменяет возмущение критического давления при фиксированной амплитуде τ_n . Закономерности перераспределения в спектре несовершенной оболочки показаны на рис. 4. Построения проведены

при $\eta(r) = \text{const}$ и $L_{\tau}^n = \sup_{f_n(\tau)} \int_0^1 f_n(r) D_n(\omega_n, \varphi_n, \omega, f, r) dr$, $f_n \in C$. Здесь

$y = 10^2(\lambda_n + \delta/p^*)$, $\mu x_n = 10^3\tau_n$, группа вращения C_n собственной функции определяется, как и раньше, через $N_{\mu} = 0,335; 0,329; 0,325; 0,295; 0,305$ (линии 1—5). Кривые характеризуют способ потери устойчивости. Если y лежит на штриховой линии, то ветвление формы равновесия сопровождается хлопком оболочки, в противном случае наблюдается явление

ние выпучивания. Ограничимся сначала двумя дискриминантами (кривые 2, 5). При $x_n = 0$ минимальная точка бифуркации лежит в точке $(0, 0)$. При увеличении x_n одно собственное значение возрастает, другое убывает. Если x_n равно абсциссе точки a , то критическое давление будет двукратно вырожденным. Дальнейшее смещение x_n вправо приводит к тому, что первое собственное значение снова станет простым, но изменятся C_n и способ потери устойчивости. Наличие других дискриминантов может повысить максимальную кратность вырождения. В частности, для тех возмущений, для которых x_n равно абсциссе точек a, b, c, d , оно достигает пяти. Вообще говоря, кратные критические давления появляются тогда, когда функционалы уравнения (2.6) и амплитуды геометрических несовершенств удовлетворяют условию

$$(3.2) \quad p + \delta(L_{30}^n, L_{11}^n, L_{\tau}^n, \tau_n) = \text{const}$$

одновременно для нескольких n .

Выше рассмотрено лишь одно предельное свойство неосесимметричной бифуркации. В другом случае можно так задать $w_{\tau}(r, \varphi) \in \mathcal{F}_{\tau}(\Omega)$, чтобы в некоторой окрестности начала спектра $\{p_n\}$ не существовало другой точки, кроме первой. Действительно, возьмем для определенности два близких элемента p_l и p_k из $\{p_n\}$, $\mu l = 0,329$, $\mu k = 0,335$. Очевидно, для p_l и p_k существуют два достаточно больших непересекающихся отрезка параметра p , если для геометрических несовершенств срединной поверхности выполняется соотношение $|\tau_k| \gg |\tau_l|$.

Подведем итоги.

1. Тонкая несовершенная сферическая оболочка теряет устойчивость хлопком.

2. Варьируя распределения геометрических несовершенств и амплитуд, можно моделировать с помощью (2.9) разнообразные случаи потери устойчивости, если существует сгущение в спектре критических давлений совершенной оболочки.

Ранее целесообразность учета этого эффекта при развитии бифуркационной теории устойчивости неоднократно обсуждалась в [12–17].

Согласно существующим представлениям, закритическому деформированию тонкой сферической оболочки отвечает цепочка последовательных бифуркаций, причем многообразие форм потери устойчивости связано не столько с количеством точек ветвления в отдельной цепочке, сколько с возможностью реализации большого числа таких цепочек [8]. В связи с этим перераспределение в начале спектра представляет особый интерес, так как раскрывает механизм «рождения» первой точки в указанной модели потери устойчивости.

3. Для малых $\mu > 0$ остается типичным ветвление решения без вырождения. Для увеличения кратности критического давления необходимо выполнение условия (3.2).

Заметим, что в рассуждениях нигде, по существу, не используются радиусы срединной поверхности, а основная формула (2.9) не содержит в явном виде параметров оболочки. Численные значения коэффициентов уравнения разветвления необходимы для конкретизации изложения методики выбора геометрических несовершенств, изменяющих собственные значения до заданных. Ниже указано одно из возможных ее приложений, основанное на использовании формулы (2.9).

4. Рассмотрим устойчивость цилиндрической оболочки, сжатой осевым усилием σ и подвергнутой локальному тепловому удару в области Ω_0 . На рис. 5 приведены результаты эксперимента для мишени, изготовленной из стали X18H9T. Оболочка имеет толщину $h = 10^{-3}$ м. На ее торцах $r = R$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z = 0$, L моделировались условия жесткого защемления $w = w_z' = 0$, $v = u_{\varphi}' = 0$, где w, v, u — нормальные и касательные перемещения в направлении e_r и e_z соответственно, (R, φ, z) — координаты цилиндрической системы. Особенность таких опытов заключена в диапазоне изменения потока энергии и времени действия излучения. Используемая установка позволяла достигать для первой величин

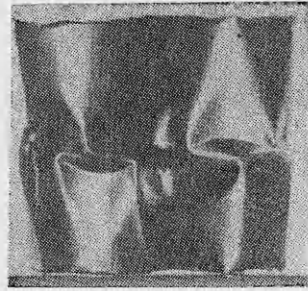


Рис. 5

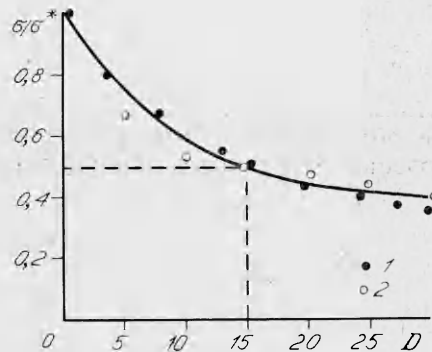


Рис. 6

ны 1 кДж, для второй оно равно по порядку 10^{-3} с. Причем в рассматриваемой задаче поток энергии имеет неоднородную (пиковую) структуру с длительностью одного пика 10^{-8} с. Известно, что результаты таких локальных тепловых воздействий определяются плотностью потока мощности Q . В целом здесь Q превосходит свое критическое значение Q^* , при котором в мишени в некоторой области $\Omega' \subset \Omega_0$ наступают фазовые переходы. Физические процессы, их сопровождающие, описаны в [18, 19]. Более подробно методика приведенного выше эксперимента изложена в [20, 21].

На рис. 5 видны характерная ромбовидная форма потери устойчивости, область Ω_0 , расположенная на общем ребре, и нерегулярная граница $\partial\Omega'$. Для такой задачи интерес представляет следующая постановка вопроса. Пусть заданы параметры локального теплового потока и тонкой оболочки вращения. Требуется определить зависимость точки бифуркации от диаметра D области Ω_0 .

Ввиду очевидной сложности моделирования физико-механических явлений оценим в рамках теории начального закритического деформирования возмущение критического усилия δ_σ , вызванное действием излучения, уточняя δ_σ специальным выбором несовершенств срединной поверхности. Именно: продолжим по непрерывности систему Маргерра — Бласова в область теплового удара Ω_0 так, чтобы оболочка заняла вместо двусвязной односвязную область $\Omega \times L$. Ее геометрические несовершенства представим в виде суммы $w_\tau(z, \varphi) + W_\tau(z, \varphi)$. Каждое слагаемое имеет ту же группу вращения, что и первая собственная форма прецизионной оболочки, край которой жестко зашпемлен, а модуль Юнга, коэффициент Пуассона и геометрические параметры L/R , h/R совпадают с оболочкой, подвергнутой электрофизическому воздействию. Положим, кроме того, что $W_\tau(z, \varphi)$ отлична от нуля лишь в полосе шириной D , содержащей Ω_0 , а зависимость $w_\tau(z, \varphi)$ от z описывается указанной собственной функцией. С учетом этих допущений имеем [5, 22]

$$(4.1) \quad \delta_\sigma^{3/2} = \frac{3}{2} l \sqrt{-3b^n (\tau_n + CKD) \sigma / \sigma^*}, \quad \delta_\sigma = 1 - l\sigma / \sigma^*,$$

$$b^n \equiv -L_{30}^n / L_{11}^n = -0,827.$$

Здесь σ — критическое усилие оболочки, подвергнутой электрофизическому воздействию; $\sigma^* = \min_n \{\sigma_n\}$; σ_n — точка спектра цилиндрической оболочки при $w_\tau(z, \varphi) \equiv 0$, $W_\tau(z, \varphi) \equiv 0$; $\tau_n = h^{-1} \|w_\tau\|_c$; C — константа, определяемая формой геометрического несовершенства области Ω_0 ; K — свободный параметр; l — отношение бифуркационного усилия, измеренного в эксперименте, к его значению для совершенной цилиндрической оболочки в отсутствие воздействия.

На рис. 6 приведены в сравнении расчетные и экспериментальные усилия для $L/R = 2$. Значение σ , полученное по формуле (2.9), обозначено точками 1, а данные непосредственных измерений — линией и точ-

ками 2. Параметр K определялся из условия согласования расчетного значения σ и экспериментального при $D = 15 \text{ м} \cdot 10^{-3}$. При этом получено, что $K = 2,71$ при $\tau_n = 0,332$, $C = 0,0196$ и $l = 0,474$. Видно, что точки бифуркации могут быть предсказаны методами теории возмущений собственных значений по данным лишь одного контрольного эксперимента, в котором определяется свободный параметр K дискриминантной кривой (4.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Marguerre K. Zur Theorie der gekrümmten Platte grosser Formänderung // Proc. 5th Intern. Congr. appl. mech., Cambridge, 1938.— N. Y.: Willey, 1939.
2. Огибалов П. М., Колтунов М. А. Оболочки и пластины.— М.: Изд-во МГУ, 1969.
3. Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек.— М.: Наука, 1978.
4. Ларченко В. В. Асимптотический анализ неосесимметричных форм равновесия тонкой полой сферической оболочки // ПММ.— 1980.— Т. 44, вып. 6.
5. Ларченко В. В. Неосесимметричная бифуркация решения и устойчивость оболочек вращения в условиях сингулярного возмущения // ПМТФ.— 1985.— № 6.
6. Ларченко В. В. Ветвление решения уравнений сферической оболочки в условиях сингулярного возмущения // ПМТФ.— 1987.— № 4.
7. Ларченко В. В. Адаптирующийся вариационный метод в условиях неединственности решения и сингулярного возмущения // ДАН СССР.— 1988.— Т. 299, № 2.
8. Ларченко В. В. Бифуркация решения в условиях сингулярного возмущения // ЖВММФ.— 1987.— Т. 27, № 4.
9. Ларченко В. В. Применение асимптотического метода при численном интегрировании сингулярно-возмущенных уравнений // ЖВММФ.— 1976.— Т. 16, № 2.
10. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений.— М.: Наука, 1981.
11. Кузнецов С. В. Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Вычислительные методы линейной алгебры/Отв. ред. С. К. Годунов.— Новосибирск: Наука, 1985.
12. Бендик Н. Н., Корнев В. М. О плотности собственных значений в задачах устойчивости тонких упругих оболочек // ПММ.— 1971.— Т. 35, вып. 2.
13. Корнев В. М. Асимптотические явления и их анализ в теории оболочек: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1972.
14. Kornev V. M., Ermolenko V. M. Sensibility of shells to buckling disturbances in connection with parameters of critical loading spectrum // Intern. J. Engng Sci.— 1980.— V. 18, N 2.
15. Корнев В. М. О решении задач устойчивости оболочек с учетом плотности собственных значений // Теория оболочек и пластин.— Л.: Судостроение, 1975.
16. Ермоленко В. М. Спектр собственных чисел в задачах устойчивости сжато-растянутых пологих оболочек // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1982.— Вып. 55.
17. Ермоленко В. М. О плотности собственных чисел в некоторых задачах устойчивости ортотропных оболочек // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1977.— Вып. 32.
18. Действие излучения большой мощности на металлы/Под ред. А. М. Бонч-Бруевича и М. А. Ельяшевича.— М.: Наука, 1970.
19. Углов А. А., Смуров И. Ю., Лохов Ю. Н. К расчету абляции пластины конечной толщины // ДАН СССР.— 1981.— Т. 256, № 6.
20. Моссаковский В. И., Андреев Л. В., Замковой Л. Я., Ободан Н. И. Равновесные состояния цилиндрических оболочек при действии локальных возмущений // ДАН СССР.— 1977.— Т. 237, № 5.
21. Моссаковский В. И., Андреев Л. В., Замковой Л. Я., Ободан Н. И. Создание конечных возмущений в оболочках с помощью луча лазера // ДАН СССР.— 1977.— Т. 237, № 4.
22. Ямаки Н. Закрытое поведение и чувствительность к несовершенствам круговой цилиндрической оболочки, подверженной сжатию // Теоретическая и прикладная механика: Тр. XIV Междунар. конф. IUTAM.— М.: Мир, 1979.

г. Новосибирск

Поступила 16/V 1988 г.,
в окончательном варианте — 24/VIII 1988 г.