УДК 519.652

# О равномерной сходимости параболической сплайн-интерполяции на классе функций с большими градиентами в пограничном слое*

И.А. Блатов[1], А.И. Задорин[2], Е.В. Китаева[3]

[1]Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, ул. Льва Толстого, 23, Самара, 443010

[2]Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. В.А. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090

[3]Самарский национальный исследовательский университет им. Акад. С.П. Королева, Московское шоссе, 34, Самара, 443086

E-mails: blatow@mail.ru (Блатов И.А.), zadorin@ofim.oscsbras.ru (Задорин А.И.), el_kitaeva@mail.ru (Китаева Е.В.)

**Блатов И.А., Задорин А.И., Китаева Е.В.** О равномерной сходимости параболической сплайн-интерполяции на классе функций с большими градиентами в пограничном слое // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 2. — С. 131–144.

Рассматривается задача параболической сплайн-интерполяции по Субботину функций с большими градиентами в пограничном слое. В случае равномерной сетки доказано, а в случае сетки Шишкина экспериментально показано, что при параболической сплайн-интерполяции функций с большими градиентами в экспоненциальном пограничном слое погрешность может неограниченно расти при стремлении малого параметра к нулю при фиксированном числе узлов сетки. Предложен аппроксимационный процесс параболическими сплайнами дефекта 1, для которого получены равномерные по малому параметру оценки погрешности.

**DOI:** 10.15372/SJNM20170202

**Ключевые слова:** *сингулярное возмущение, пограничный слой, сетка Шишкина, параболический сплайн, модификация, оценка погрешности.*

**Blatov I.A., Zadorin A.I., Kitaeva E.V.** About the uniform convergence of parabolic spline interpolation on the class of functions with large gradients in the boundary layer // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2017. — Vol. 20, № 2. — P. 131–144.

A problem of the Subbotin parabolic spline-interpolation of functions with large gradients in the boundary layer is considered. In the case of a uniform grid it has been proved and in the case of the Shishkin grid it has been experimentally shown that with a parabolic spline-interpolation of functions with large gradients the error in the exponential boundary layer can unrestrictedly increase with a fixed number of grid nodes. A modified parabolic spline has been constructed. Estimates of the interpolation error of the constructed spline don't depend from a small parameter.

**Keywords:** *singular perturbation, boundary layer, Shishkin mesh, parabolic spline, modification, estimation of error.*

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 15-01-06584, № 16-01-00727).

# Введение

Конвективно-диффузионные процессы с преобладающей конвекцией, как известно, моделируются на основе краевых задач для уравнений с малым параметром $\varepsilon$ при старших производных. Решения таких задач имеют большие градиенты, что сказывается на точности классических разностных схем. Для численного решения таких задач строятся специальные разностные схемы, обладающие равномерной по параметру $\varepsilon$ точностью. Широко известны два подхода для построения $\varepsilon$-равномерно сходящихся разностных схем: подгонка схемы к погранслойной составляющей [1] и применение классических разностных схем на сетках, сгущающихся в пограничном слое [2, 3]. В большинстве случаев применяются схемы на сгущающихся сетках, поскольку, как показано в [4], для многих важных классов уравнений в частных производных невозможно построение равномерно сходящихся подгоночных схем. В последнее время наибольшее распространение получили кусочно-равномерные сетки Шишкина [3]. Однако после получения сеточного решения важной является задача построения гладкого восполнения для всех значений независимых аргументов с погрешностью, соответствующей погрешности разностной схемы. Поэтому необходим соответствующий сходящийся также равномерно по малому параметру и с тем же порядком точности аппроксимационный процесс.

Одним из наиболее распространенных подходов к решению таких задач является сплайн-интерполяция. В частности, параболические сплайны широко применяются для гладкой интерполяции функций. Такие сплайны исследованы в [5–8] и во многих других работах. Однако, в соответствии с [9], применение полиномиальных интерполяционных формул к функциям с большими градиентами в пограничном слое может приводить к существенным погрешностям. В [10] показано, что погрешность кусочно-полиномиальной интерполяции на сетке Шишкина [3] равномерна по возмущающему параметру $\varepsilon$. Однако такая интерполяция не является гладкой. В [11] для функций с большими градиентами в пограничном слое построен неполиномиальный аналог гладкого параболического сплайна. Построенный сплайн является точным на погранслойной составляющей, задающей основной рост функции в пограничном слое, на равномерной сетке получена оценка погрешности, равномерная по выделенной с точностью до множителя погранслойной составляющей. Однако вид погранслойной составляющей не всегда известен, и в этом случае наиболее естественной представляется классическая сплайн-интерполяция на сетках, для которых получены разностные решения.

В данной работе исследуется параболическая сплайн-интерполяция по Субботину [6, 12] на равномерной сетке и на кусочно-равномерной сетке Шишкина [3] для функций с большими градиентами в пограничном слое. Получено, что сходимость интерполяционного процесса не является равномерной по малому параметру, поэтому необходима разработка специальных равномерно по параметру сходящихся аппроксимационных процессов для данного класса задач. Такой аппроксимационный процесс предложен и исследован в настоящей работе.

**Основные обозначения.** Пусть $\Omega = \{x_n,\ n = 0, 1, \dots, N\}$ — сетка интервала $[0, 1]$. Обозначим через $S(\Omega, k, 1)$ пространство полиномиальных сплайнов степени $k$ дефекта 1 [8] на сетке $\Omega$. В случае необходимости будем считать разбиение $\Omega$ продолженным левее точки 0 с шагом $h_1 = x_1 - x_0$ и правее точки 1 с шагом $h_N = x_N - x_{N-1}$. Под $C$ и $C_j$ будем подразумевать положительные постоянные, не зависящие от параметра $\varepsilon$ и числа узлов сетки. При этом один и тот же символ $C_j$ может обозначать разные константы. Будем писать $f(\varepsilon, N) = O(g(\varepsilon, N))$, если при всех достаточно больших натуральных $N$ и $\varepsilon \in (0, 1]$ справедливо неравенство $|f| \le C|g|$. Будем писать $f = O^*(g)$, если $f = O(g)$

и $g = O(f)$, т.е. символ $O^*$ означает, что $f(\varepsilon, N)$ и $g(\varepsilon, N)$ — величины одного порядка при $N \to \infty$, $\varepsilon \in (0,1]$. Пусть $C[a,b]$, $L_2[a,b]$ — пространства непрерывных и квадратично суммируемых на $[a,b]$ функций с нормами $\|\cdot\|_{C[a,b]}$ и $\|\cdot\|_{L_2[a,b]}$ соответственно, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2[0,1]$. Пусть $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ обозначает норму квадратной $n\times n$ матрицы, согласованной с максимум-нормой вектора. Будем говорить, что квадратная матрица $A = \{a_{kl}\}$ имеет диагональное преобладание по строкам с показателем преобладания $r > 0$, если справедлива формула

$$\min_k \left( |a_{kk}| - \sum_{l\ne k} |a_{kl}| \right) = r.$$

## 1. Постановка задачи

Будем предполагать, что интерполируемая функция $u(x)$ представима в виде

$$u(x) = q(x) + \Phi(x), \quad x \in [0,1], \tag{1.1}$$

где

$$\left|q^{(j)}(x)\right| \le C_1, \qquad \left|\Phi^{(j)}(x)\right| \le \frac{C_1}{\varepsilon^j}\, e^{-x/\varepsilon}, \quad 0 \le j \le 3, \tag{1.2}$$

где функции $q(x)$ и $\Phi(x)$ в явном виде не заданы, $\varepsilon \in (0,1]$.

Согласно (1.2), регулярная составляющая $q(x)$ имеет производные, ограниченные до третьего порядка, а погранслойная составляющая $\Phi(x)$ имеет производные, не ограниченные равномерно по параметру $\varepsilon$.

В соответствии с [3, 13, 14] представление (1.1) с ограничениями (1.2) имеет место для решения сингулярно возмущенной краевой задачи:

$$\varepsilon u''(x) + a_1(x)u'(x) - a_2(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = A,\ u(1) = B, \tag{1.3}$$

где

$$a_1(x) \ge 1, \quad a_2(x) \ge 0, \quad \varepsilon > 0,$$

функции $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ — достаточно гладкие. При малых значениях параметра $\varepsilon$ решение задачи (1.3) имеет большие градиенты в погранслойной области у границы $x = 0$ и представимо в виде (1.1), при этом параметр $\varepsilon$ в (1.2) соответствует обозначениям задачи (1.3).

Исследуем задачу параболической сплайн-интерполяции функций с большими градиентами, имеющих представление (1.1).

## 2. Формулировка основных результатов

Пусть $\Omega$ — некоторая сетка интервала $[0,1]$ с узлами $x_n$, $n = 0,1,\ldots,N$, $x_0 = 0$, $x_N = 1$ и шагами $h_n = x_n - x_{n-1}$, $1 \le n \le N$.

Введем вспомогательную сетку

$$\bar\Omega = \left\{\bar x_n,\ -1 \le n \le N\right\}, \quad \bar x_n = \frac{x_n + x_{n+1}}{2},\ 0 \le n \le N-1, \ \ \bar x_{-1} = x_0 - \frac{h_1}{2}, \ \ \bar x_N = x_N + \frac{h_N}{2}.$$

Пусть $g_2(x,u) \in S(\bar{\Omega},2,1)$ — интерполяционный параболический сплайн на сетке $\bar{\Omega}$, определяемый из условий интерполяции:

$$g_2(x_n,u) = u(x_n), \quad 0 \le n \le N, \quad g_2'(0,u) = u'(0), \quad g_2'(1,u) = u'(1). \tag{2.1}$$

Равномерную с шагом $h = 1/N$ сетку на промежутке $[0,1]$ обозначим символом $\Delta$.

**Теорема 1.** *В случае равномерной сетки $\Omega = \Delta$ найдется такая постоянная $C$, что при всех натуральных $N$ и $\varepsilon \in (0,1]$ справедлива оценка*

$$\|u(x) - g_2(x,u)\|_{C[0,1]} \le C(N\varepsilon)^{-3}. \tag{2.2}$$

*Если в (1.1) $\Phi(x) = e^{-x/\varepsilon}$, то имеет место и оценка снизу*

$$\|u(x) - g_2(x,u)\|_{C[0,1]} \ge C_1 \min\big\{(N\varepsilon)^{-1},(N\varepsilon)^{-3}\big\}. \tag{2.3}$$

**Следствие 1.** *Интерполяционный процесс (2.1) на последовательности равномерных сеток $\Delta$ является сходящимся при $N \to \infty$ для каждого фиксированного $\varepsilon \in (0,1]$, но эта сходимость не является равномерной по параметру $\varepsilon$. В соответствии с (2.3) погрешность интерполяции неограниченно растет при заданном $N$ и $\varepsilon \to 0$.*

Эта и следующая теоремы будут доказаны в п. 4.

Из теоремы 1 следует необходимость анализа применимости адаптивных сеток при интерполяции функций вида (1.1). Исследуем возможность применения сетки Шишкина [3]. В соответствии с [3] зададим на промежутке $[0,1]$ кусочно-равномерную сетку $\Omega$ с узлами $x_n$, $n = 0,1,\ldots,N$, и шагами:

$$h_n = h = \frac{\sigma}{N/2}, \quad n = 1,\ldots,\frac{N}{2}, \qquad h_n = H = \frac{1-\sigma}{N/2}, \quad n = \frac{N}{2}+1,\ldots,N. \tag{2.4}$$

В (2.4) зададим

$$\sigma = \min\left\{\frac{1}{2},\, 3\,\varepsilon\ln N\right\}. \tag{2.5}$$

**Замечание 1.** В дальнейшем будем считать, что $N = 2N_0 \ge 6$.

Итак, пусть функция $u(x)$ задана в узлах сетки $\Omega$, $u_n = u(x_n)$, $n = 0,1,\ldots,N$. Исследуем погрешность интерполяции параболическим сплайном на сетке (2.4) с заданием параметра $\sigma$ согласно (2.5).

В соответствии с [7, с. 56] для интерполяционного параболического сплайна $g_2(x,u) \in S(\bar{\Omega},2,1)$ справедлива следующая оценка погрешности:

$$\big|g_2(x,u) - u(x)\big| \le C\big\|u^{(3)}\big\|_{C[0,1]} \max_n h_n^3. \tag{2.6}$$

Из (2.6) следует, что если производная $u^{(3)}(x)$ является ограниченной, то сплайн $g_2(x,u)$ обладает третьим порядком точности по шагу сетки. Однако, в силу (1.2), производная $u^{(3)}(x)$ неограниченно растет у границы $x = 0$ с уменьшением $\varepsilon$.

Заметим, что $g_2(x,u) = g_2(x,q) + g_2(x,\Phi)$, а в силу условий (1.2) и (2.6):

$$\big\|q(x) - g_2(x,q)\big\|_{C[0,1]} \le C_2 \max_n h_n^3 \le C_2 N^{-3}.$$

Поэтому для построения сплайна, аппроксимирующего $u(x)$ с порядком $O\big(N^{-3}\ln^3 N\big)$ равномерно по $\varepsilon \in (0,1]$, необходимо и достаточно обеспечить равномерную по $\varepsilon \in (0,1]$ оценку

$$\big\|\Phi(x) - g_2(x,\Phi)\big\|_{C[0,1]} \le C_2 N^{-3}\ln^3 N. \tag{2.7}$$

В случае когда в (2.5) $\sigma = 1/2$, оценка (2.7) имеет место в силу (2.6) и того, что в этом случае $\max_n h_n = 1/N$, $\big\|u^{(3)}\big\|_{C[0,1]} \le C\varepsilon^{-3} \le C\ln^3 N$.

Ниже будем предполагать, что $\sigma < 1/2$. Далее для краткости будем использовать обозначение $g_2(x) = g_2(x,\Phi)$, $g_2(x) \in S(\bar\Omega, 2, 1)$.

**Замечание 2.** В настоящей работе будет приведен численный пример неравномерной сходимости интерполяционного процесса (2.1) для семейства функций вида (1.1) при $\varepsilon \in (0,1]$ на сетке Шишкина (2.4). Поэтому важной является задача построения аппроксимационного процесса, для которого сходимость будет равномерной по $\varepsilon$.

Модифицируем интерполяционный сплайн в случае сетки Шишкина (2.4). Положим $\tilde x_{N/2} = \bar x_{N/2} = (x_{N/2} + x_{N/2+1})/2$, $\tilde x_n = x_n$, $n \in [0, N/2-1] \cup [N/2+1, N]$. Пусть $gm_2(x,u)$ — интерполяционный параболический сплайн, определяемый из условий:

$$gm_2(\tilde x_n, u) = u(\tilde x_n), \quad n \in [0,N], \qquad gm_2'(0,u) = u'(0), \qquad gm_2'(1,u) = u'(1). \tag{2.8}$$

Единственным отличием $gm_2(x,u)$ от $g_2(x,u)$ является то, что узел интерполяции $x_{N/2}$ заменяется узлом $\bar x_{N/2}$. Узлы самого сплайна при этом не меняются и совпадают с узлами сетки $\bar\Omega$.

**Теорема 2.** *При выполнении условия $\varepsilon \ln N \le 1/18$ для сплайна $gm_2(x,u)$, интерполирующего данные на сетке Шишкина (2.4), найдется постоянная $C$, для которой справедлива оценка погрешности*

$$\big\|u(x) - gm_2(x,u)\big\|_{C[0,1]} \le CN^{-3}\ln^3 N. \tag{2.9}$$

**Следствие 2.** *Пусть*

$$g(x,u) = \begin{cases} gm_2(x,u), & \varepsilon \ln N \le 1/18, \\ g_2(x,u), & \varepsilon \ln N > 1/18. \end{cases} \tag{2.10}$$

*Тогда сплайн $g(x,u)$ определяет аппроксимационный процесс, сходящийся при $N \to \infty$ равномерно по параметру $\varepsilon \in (0,1]$ с порядком $O\big(N^{-3}\ln^3 N\big)$.*

**Доказательство следствия 2.** При $\varepsilon \ln N \le 1/18$ утверждение следствия непосредственно вытекает из теоремы 2. При $\varepsilon \ln N \ge 1/6$ в силу (2.4) и (2.5) будет $\sigma = 1/2$ и сетка Шишкина станет равномерной. Поскольку в этом случае $\varepsilon > C/\ln N$, то утверждение следствия вытекает из теоремы 1. Наконец, при $\varepsilon \ln N \in [1/18, 1/6]$ все шаги сетки Шишкина будут величинами порядка $O^*(1/N)$, а в силу (1.2) $\big\|u^{(3)}\big\|_{C[0,1]} \le C\varepsilon^{-3} \le C\ln^3 N$. Поэтому требуемая оценка вытекает из (2.6). □

**Замечание 3.** Предполагается, что функция $u(x)$ задана своими значениями в точках сетки $\Omega$, а $\bar{x}_{N/2} \notin \Omega$. Поэтому для получения оценок вида (2.7), (2.9) необходимо найти значение $u\big(\bar{x}_{N/2}\big)$ с погрешностью порядка $O\big(\ln^3 N/N^3\big)$. Как показано в [10], это можно сделать с помощью многочлена Лагранжа невысокой степени по известным значениям в соседних с $\bar{x}_{N/2}$ узлах. Аналогичным образом на основе многочлена Лагранжа можно найти значения $hu'(0)$ и $Hu'(1)$ с тем же порядком точности. Как вытекает из вида системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), рассматриваемой в следующем пункте, этого достаточно для получения искомой оценки погрешности порядка $O\big(N^{-3}\ln^3 N\big)$.

**Замечание 4.** Для модифицированного сплайна $gm_2(x,u)$ узел сплайна $\bar{x}_{N/2}$ совпадает с узлом интерполяции. Поэтому сплайн $gm_2(x,u)$ на отрезке $[\bar{x}_{N/2}, 1]$ определяется независимо от значений в узлах интерполяции из отрезка $[0, x_{N/2}]$, а затем происходит гладкая склейка. Это следует также из того факта, что матрица СЛАУ для определения параметров сплайна, рассматриваемая в следующем пункте, является блочной верхнетреугольной.

## 3. Вспомогательные результаты

Рассмотрим модифицированный сплайн $gm_2(x,u)$ из (2.8). Обозначим через $\bar{N}_{n,l}(x)$ нормализованный $B$-сплайн степени $l$ на сетке $\bar{\Omega}$ [8]. Для функций $\bar{N}_{n,l}(x)$ справедливы формулы [8, с. 31]:

$$\bar{N}_{n,l}(x) = \frac{x - x_n}{x_{n+l} - x_n}\bar{N}_{n,l-1}(x) + \frac{x_{n+l+1} - x}{x_{n+l+1} - x_{n+1}}\bar{N}_{n+1,l-1}(x), \tag{3.1}$$

$$\bar{N}'_{n,l}(x) = \frac{l}{x_{n+l} - x_n}\bar{N}_{n,l-1}(x) - \frac{l}{x_{n+l+1} - x_{l+1}}\bar{N}_{n+1,l-1}(x). \tag{3.2}$$

Далее для краткости обозначим $gm_2(x) = gm_2(x,u)$. Представим $gm_2(x)$ в виде

$$gm_2(x) = \sum_{n=-3}^{N-1} \alpha_n \bar{N}_{n,2}(x). \tag{3.3}$$

Из условий интерполяции (2.8) получаем систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-3}^{N-1} \alpha_n \bar{N}'_{n,2}(0) = u'(0),\\
&\sum_{n=-3}^{N-1} \alpha_n \bar{N}_{n,2}(\tilde{x}_k) = u(\tilde{x}_k), \quad 0 \le k \le N,\\
&\sum_{n=-3}^{N-1} \alpha_n \bar{N}'_{n,2}(1) = u'(1).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Преобразуем СЛАУ (3.4) в соответствии с [15, 16]. Для этого вычислим значения входящих в нее параболических сплайнов и их производных по формулам (3.1), (3.2) и исключим из двух первых и двух последних уравнений неизвестные $\alpha_{-3}$ и $\alpha_{N-1}$. В результате формулы для $\alpha_{-3}$ и $\alpha_{N-1}$ будут иметь вид:

$$\alpha_{-3} = \alpha_{-1} - 2hu'(0), \qquad \alpha_{N-1} = \alpha_{N-3} + 2Hu'(1), \tag{3.5}$$

а СЛАУ для остальных коэффициентов после умножения на 8 всех уравнений примет вид

$$A\alpha = U, \tag{3.6}$$

где $A = \{a_{n,k}\}$, $-2 \le n,\ k \le N-2$, — матрица порядка $(N+1) \times (N+1)$, $U = (U_{-2}, U_{-1}, \ldots, U_{N-2})^\top$ — $(N+1)$-вектор. При этом ненулевые элементы матрицы $A$ имеют следующий вид:

$$a_{n,n} = 6, \quad a_{n,n-1} = a_{n,n+1} = 1, \quad n \in [-1, N/2-4] \cup [N/2, N-3], \tag{3.7}$$

$$a_{-2,-1} = a_{N-2,N-3} = 2, \quad a_{-2,-2} = a_{N-2,N-2} = 6, \tag{3.8}$$

$$a_{N/2-3,N/2-4} = 1, \quad a_{N/2-3,N/2-3} = 3 + 4\frac{H+2h}{H+3h}, \quad a_{N/2-3,N/2-2} = \frac{4h}{H+3h}, \tag{3.9}$$

$$a_{N/2-1,N/2-2} = \frac{4H}{3H+h}, \quad a_{N/2-1,N/2-1} = 3 + \frac{8H+4h}{3H+h}, \quad a_{N/2-1,N/2} = 1, \tag{3.10}$$

$$a_{N/2-2,N/2-2} = \frac{16H}{3H+h}, \quad a_{N/2-2,N/2-1} = \frac{8H+8h}{3H+h}, \tag{3.11}$$

а остальные элементы равны нулю.

Элементы вектора $U$ имеют вид:

$$\begin{aligned} &U_{-2} = 8u(0) + 2hu'(0), \\ &U_n = 8u(x_{n+2}), \quad -1 \le n \le N-3, \\ &U_{N-2} = 8u(1) - 2Hu'(1). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Из (3.7)–(3.11) вытекает, что во всех строках, кроме строк с номерами $N/2-3$, $N/2-2$, $N/2-1$, матрица $A$ имеет диагональное преобладание с показателем преобладания $r = 4$, в строке с номером $N/2-3$ показатель преобладания $r = 2 + 4\frac{H+h}{H+3h} \ge 2$, в строке с номером $N/2-2$ показатель преобладания $r = 8\frac{H-h}{3H+h}$, а в строке с номером $N/2-1$ показатель преобладания $r = 2 + 4\frac{H+h}{3H+h} \ge 2$. Таким образом, при $h/H \le 1/5$ во всех строках будет диагональное преобладание с показателями преобладания $r \ge 2$. Значит, при этом вся матрица будет иметь строгое диагональное преобладание по строкам с показателем преобладания, не зависящим от $H, h$. Отсюда вытекает обратимость матрицы $A$ и равномерная ограниченность $\left\|A^{-1}\right\|_\infty$. Условие $h/H \le 1/5$ выполнено, если $\varepsilon \ln N \le 1/18$. Таким образом, доказана следующая лемма.

**Лемма 1.** *При выполнении условия $\varepsilon \ln N \le 1/18$ матрица $A$ обратима и для некоторой постоянной $C$ имеет место оценка $\left\|A^{-1}\right\|_\infty \le C$.*

Изучим аппроксимационные свойства пространства $S(\bar\Omega, 2, 1)$.

**Лемма 2.** *Пусть функция $u(x)$ имеет вид* (1.1) *с оценками* (1.2)*. Тогда найдется такая функция $gp_2(x) \in S(\bar\Omega, 2, 1)$, что будут справедливы оценки:*

$$\left\|u(x) - gp_2(x)\right\|_{C[0,1]} \le CN^{-3}\ln^3 N, \tag{3.13}$$

$$\left\|h_{n+1}(u'(x) - gp_2'(x))\right\|_{C[\bar x_n, \bar x_{n+1}]} \le CN^{-3}\ln^3 N, \quad n = -1, N-1. \tag{3.14}$$

**Доказательство.** Будем считать функцию $u(x)$ продолженной левее точки $x = 0$ и правее точки $x = 1$ многочленами Тейлора второй степени с центрами в $x = 0$ и $x = 1$ соответственно. Обозначим через $P_2$ множество всех многочленов второй степени. Тогда, согласно [6, с. 137], существует такая функция $gp_2(x) \in S(\bar{\Omega}, 2, 1)$, что справедливы оценки:

$$\big\|u(x) - gp_2(x)\big\|_{C[\bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}]} \leq C \inf_{g \in P_2} \big\|u(x) - g(x)\big\|_{C[\bar{x}_{n-1}, \bar{x}_{n+2}]}, \quad -1 \leq n \leq N-1. \tag{3.15}$$

Зафиксируем произвольный отрезок $[\bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}]$. Обозначим через $P_n(x)$ многочлен Тейлора степени 2 функции $u(x)$ с центром разложения в точке $\bar{x}_{n+2}$. Имеем

$$u(x) = P_n(x) + \frac{1}{2!} \int_{\bar{x}_{n+2}}^{x} (x-s)^2 u^{(3)}(s)\, ds. \tag{3.16}$$

Из (3.16), (1.2) для $-1 \leq n \leq N/2 - 3$ получаем

$$\big\|u(x) - P_n(x)\big\|_{C[\bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}]} \leq Ch^3\big(1 + \varepsilon^{-3} e^{-\bar{x}_n/\varepsilon}\big) \leq C_1 h^3 \big(1 + \varepsilon^{-3}\big),$$

откуда с учетом того, что $h = O^*(\varepsilon \ln N/N)$, получаем

$$\big\|u(x) - P_n(x)\big\|_{C[\bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}]} \leq C_2 \frac{\ln^3 N}{N^3}, \quad -1 \leq n \leq N/2 - 3. \tag{3.17}$$

Пусть $N/2 - 2 \leq n \leq N-1$, $x \in [\bar{x}_{n-1}, \bar{x}_{n+2}]$. Тогда

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\bar{x}_{n+2}}^{x} (x-s)^2 u^{(3)}(s)\, ds \right| &\leq C \int_{x}^{\bar{x}_{n+2}} (s-x)^2 \big(1 + \varepsilon^{-3} e^{-s/\varepsilon}\big)\, ds \\
&\leq CH^3 + Ce^{-x/\varepsilon} \int_{x}^{\bar{x}_{n+2}} (s-x)^2 \varepsilon^{-3} e^{-(s-x)/\varepsilon}\, ds \\
&= CH^3 + Ce^{-x/\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x}^{\bar{x}_{n+2}} \Big(\frac{s-x}{\varepsilon}\Big)^2 e^{-(s-x)/\varepsilon}\, ds \\
&\leq CH^3 + C_1 e^{-x/\varepsilon} \leq CH^3 + C_1 e^{-(\bar{x}_{n-1})/\varepsilon} \\
&\leq CH^3 + C_2 e^{-(\bar{x}_{N/2})/\varepsilon} \leq \frac{C_2}{N^3} \leq C_3 \frac{\ln^3 N}{N^3}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Из (3.17), (3.18) получаем, что

$$\big\|u(x) - P_n(x)\big\|_{C[\bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}]} \leq C_4 \frac{\ln^3 N}{N^3}, \quad -1 \leq n \leq N-1. \tag{3.19}$$

Из (3.15), (3.19) получаем (3.13).

Докажем (3.14). Для этого заметим, что в силу (3.13), (3.15), (3.19):

$$\big\|gp_2(x) - P_n(x)\big\|_{C[\bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}]} \leq C_2 \frac{\ln^3 N}{N^3}, \quad -1 \leq n \leq N-1. \tag{3.20}$$

Но функция $gp_2(x) - P_n(x)$ на отрезке $[\bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}]$ есть многочлен второй степени. Поэтому в силу эквивалентности норм в пространстве многочленов второй степени на фиксированном отрезке будем иметь

$$\left\|gp_2'(x) - P_n'(x)\right\|_{C[\bar{x}_n,\bar{x}_{n+1}]} \le \frac{C}{h_{n+1}}\left\|gp_2(x) - P_n(x)\right\|_{C[\bar{x}_n,\bar{x}_{n+1}]} \le \frac{C_3}{h_{n+1}}\,\frac{\ln^3 N}{N^3}. \qquad (3.21)$$

Далее, дифференцируя равенство (3.16), получаем

$$u'(x) = P_n'(x) + \int_{\bar{x}_{n+2}}^{x} (x-s)u^{(3)}(s)\,ds. \qquad (3.22)$$

Повторяя для (3.22) выкладки, проделанные с (3.16) при доказательстве (3.13), получаем

$$\left\|u'(x) - P_n'(x)\right\|_{C[\bar{x}_n,\bar{x}_{n+1}]} \le C_3\frac{\ln^2 N}{\varepsilon N^2}, \quad -1 \le n \le N-1. \qquad (3.23)$$

Из (3.21), (3.23) с учетом того, что $h_1 = h = O^*(\varepsilon \ln N/N)$, получаем (3.14) для $n=-1$. В случае $n = N-1$ заметим, что в силу замечания 1 имеем $\left\|u^{(3)}\right\|_{C[\bar{x}_{N-2},\bar{x}_{N+1}]} \le C(1+\varepsilon^{-3}e^{-1/(3\varepsilon)}) \le C_1$. Поэтому для этого отрезка из (3.21), (3.22) сразу получаем (3.14) для $n = N-1$. □

Установим аналогичный результат в случае равномерной сетки $\Delta$.

**Лемма 3.** *Пусть функция $u(x)$ имеет вид* (1.1) *с оценками* (1.2). *Тогда найдется такая функция $gp_2(x) \in S(\Delta,2,1)$, что будут справедливы оценки*:

$$\left\|u(x) - gp_2(x)\right\|_{C[0,1]} \le C(\varepsilon N)^{-3}, \qquad (3.24)$$

$$\left\|N^{-1}(u'(x) - gp_2'(x))\right\|_{C[\bar{x}_n,\bar{x}_{n+1}]} \le C(\varepsilon N)^{-3}, \quad n=-1, N-1. \qquad (3.25)$$

Доказательство (3.24), (3.25) совершенно аналогично (3.16)–(3.23) с учетом различий сеток $\Delta$ и $\Omega$.

## 4. Доказательство теорем

**Доказательство теоремы 2.** Введем функцию $err(x) = gm_2(x) - gp_2(x)$, где функция $gp_2(x)$ определена в лемме 2. Представим ее в виде

$$err(x) = \sum_{n=-3}^{N-1} \beta_n \bar{N}_{n,2}(x). \qquad (4.1)$$

Тогда по аналогии (3.4)–(3.6) для коэффициентов $\beta_n$ получим систему:

$$A\beta = ERR \qquad (4.2)$$

и

$$\beta_{-3} = \beta_{-1} - 2h\cdot err'(0), \qquad \beta_{N-1} = \beta_{N-3} + 2H\cdot err'(1), \qquad (4.3)$$

где

$$err'(0) = u'(0) - gp_2'(0), \qquad err'(1) = u'(1) - gp_2'(1), \qquad (4.4)$$

$$ERR = \{ERR_n\}, \quad ERR_n = 8(u(x_{n+2}) - gp_2(x_{n+2})), \quad -2 \le n \le N-2, \qquad (4.5)$$

причем в силу леммы 2 и (4.4), (4.5) будут справедливы оценки:

$$\max\left\{|h\cdot err'(0)|,|H\cdot err'(1)|\right\}\le C\frac{\ln^3 N}{N^3},\qquad \max_{-2\le n\le N-2}|ERR_n|\le C\frac{\ln^3 N}{N^3}. \tag{4.6}$$

Из леммы 1 и (4.3), (4.6) получаем, что

$$\max_{-3\le n\le N-1}|\beta_n|\le C\frac{\ln^3 N}{N^3},$$

откуда следует, что

$$\left\|gm_2(x)-gp_2(x)\right\|_{C[x_n,x_{n+1}]}\le C_1\frac{\ln^3 N}{N^3},\quad 0\le n\le N-1. \tag{4.7}$$

Из (4.7) и леммы 2 получаем утверждение теоремы 2. □

**Доказательство теоремы 1.** Оценки (2.2) доказываются по аналогии с обоснованием (2.9) с применением леммы 3 вместо леммы 2.

Докажем оценку (2.3). Поскольку для составляющей $q(x)$ в силу (2.6) погрешность интерполяции порядка $O(N^{-3})$, то достаточно показать, что при $\Phi(x)=e^{-x/\varepsilon}$:

$$\left\|e^{-x/\varepsilon}-g_2(x,\Phi)\right\|_{C[0,\bar{x}_0]}\ge C_1\min\left\{(N\varepsilon)^{-1},(N\varepsilon)^{-3}\right\}. \tag{4.8}$$

Делая замену переменной $x/\varepsilon=\tau$, получим, что (4.8) эквивалентно неравенству

$$\left\|e^{-\tau}-g_2(\varepsilon\tau,\Phi)\right\|_{C[0,(2N\varepsilon)^{-1}]}\ge C_2\min\left\{(N\varepsilon)^{-1},(N\varepsilon)^{-3}\right\}. \tag{4.9}$$

Рассмотрим два случая: $(2N\varepsilon)^{-1}\ge C_3>0$ и $(2N\varepsilon)^{-1}\le C_3$, где $C_3$ — достаточно малая, но не зависящая от $N$ и $\varepsilon$, константа.

1. Пусть $(2N\varepsilon)^{-1}\ge C_3>0$. Тогда имеем

$$\left\|e^{-\tau}-g_2(\varepsilon\tau,\Phi)\right\|_{C[0,(2N\varepsilon)^{-1}]}\ge C\left\|e^{-\tau}\right\|_{C[0,(2N\varepsilon)^{-1}]},$$

поскольку погрешность аппроксимации экспоненты многочленом фиксированной степени на отрезке длины $O^*(1)$ не может быть меньше величины порядка $C$-нормы экспоненты на этом отрезке [17]. Учитываем, что для ограниченных по норме $u,v$ из неравенств $\|u-v\|\ge C\|u\|$, $C\|u-v\|\ge C\|v\|-C\|u\|$ следует, что $(1+C)\|u-v\|\ge C\|v\|$. На основе этого получаем, что

$$\left\|e^{-\tau}-g_2(\varepsilon\tau,\Phi)\right\|_{C[0,(2N\varepsilon)^{-1}]}\ge C_1\left\|g_2(\varepsilon\tau,\Phi)\right\|_{C[0,(2N\varepsilon)^{-1}]}. \tag{4.10}$$

Наконец, в силу условия $g_2'(0,\Phi)=\Phi'(0)=-\varepsilon^{-1}$, будет

$$\begin{aligned}\left\|g_2(\varepsilon\tau,\Phi)\right\|_{C[0,(2N\varepsilon)^{-1}]}&=\left\|g_2(x,\Phi)\right\|_{C[0,(2N)^{-1}]}=\left\|a_1x^2-\frac{1}{\varepsilon}x+a_3\right\|_{C[0,(2N)^{-1}]}\\&=\left\|\frac{a_1}{(2N)^2}y^2-\frac{1}{2N\varepsilon}y+a_3\right\|_{C[0,1]}\ge\frac{C_3}{\varepsilon N}.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Из (4.10), (4.11) следует (4.9) в первом случае.

2. Пусть $(2N\varepsilon)^{-1} \le C_3$. Тогда представим $e^{-\tau}$ в виде:

$$e^{-\tau} = -\frac{\tau^3}{3!} + Q_2(\tau) + O\big((N\varepsilon)^{-4}\big), \tag{4.12}$$

где $Q_2(\tau)$ — многочлен Тейлора второй степени функции $e^{-\tau}$ с центром в нуле. Тогда аналогично (4.11) получим, что

$$\inf_{P \in P_2} \Big\| -\frac{\tau^3}{3!} + Q_2(\tau) - P(\tau) \Big\|_{C[0,(2N\varepsilon)^{-1}]} \ge C_3 (N\varepsilon)^{-3}. \tag{4.13}$$

Из (4.12), (4.13) при достаточно малом $C_3 > 0$ аналогично (4.10), (4.11) получаем (4.9) в рассматриваемом случае. □

## 5. Результаты численных экспериментов

Зададим функцию вида (1.1):

$$u(x) = \cos\frac{\pi x}{2} + e^{-x/\varepsilon}, \quad x \in [0,1].$$

Результаты расчетов сведены в три таблицы. В таблицах приведены максимальные погрешности сплайновой интерполяции, вычисленные в узлах сгущенной сетки, получающейся из исходной расчетной сетки разбиением каждого ее сеточного интервала на 10 равных частей. В табл. 1 приведены погрешности для параболического сплайна $g_2(x,u)$ на равномерной сетке. Результаты вычислений согласуются с теоремой 1 и подтверждают, что погрешность интерполяции растет с уменьшением параметра $\varepsilon$ при фиксированном значении $N$. При заданном $\varepsilon$ точность повышается с увеличением $N$.

**Таблица 1.** Погрешность параболического сплайна $g_2(x,u)$ на равномерной сетке

| $\varepsilon$ \ $N$ | $2^4$ | $2^5$ | $2^6$ | $2^7$ | $2^8$ | $2^9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $2.82 \cdot 10^{-7}$ | $1.76 \cdot 10^{-8}$ | $1.16 \cdot 10^{-9}$ | $1.02 \cdot 10^{-10}$ | $4.30 \cdot 10^{-12}$ | $2.68 \cdot 10^{-13}$ |
| $10^{-1}$ | $3.43 \cdot 10^{-4}$ | $2.33 \cdot 10^{-5}$ | $1.51 \cdot 10^{-6}$ | $9.58 \cdot 10^{-8}$ | $6.03 \cdot 10^{-9}$ | $4.11 \cdot 10^{-10}$ |
| $10^{-2}$ | 0.43 | $8.38 \cdot 10^{-2}$ | $9.72 \cdot 10^{-3}$ | $8.00 \cdot 10^{-4}$ | $5.59 \cdot 10^{-5}$ | $3.65 \cdot 10^{-6}$ |
| $10^{-3}$ | 9.88 | 4.58 | 1.93 | 0.66 | 0.15 | $2.03 \cdot 10^{-2}$ |
| $10^{-4}$ | $1.05 \cdot 10^{2}$ | $5.23 \cdot 10^{1}$ | $2.58 \cdot 10^{1}$ | $1.25 \cdot 10^{1}$ | 5.90 | 2.59 |
| $10^{-5}$ | $1.06 \cdot 10^{3}$ | $5.30 \cdot 10^{2}$ | $2.64 \cdot 10^{2}$ | $1.32 \cdot 10^{2}$ | $6.56 \cdot 10^{1}$ | $3.24 \cdot 10^{1}$ |
| $10^{-6}$ | $1.06 \cdot 10^{4}$ | $5.30 \cdot 10^{3}$ | $2.65 \cdot 10^{3}$ | $1.33 \cdot 10^{3}$ | $6.62 \cdot 10^{2}$ | $3.30 \cdot 10^{2}$ |
| $10^{-7}$ | $1.06 \cdot 10^{5}$ | $5.30 \cdot 10^{4}$ | $2.65 \cdot 10^{4}$ | $1.33 \cdot 10^{4}$ | $6.63 \cdot 10^{3}$ | $3.30 \cdot 10^{3}$ |
| $10^{-8}$ | $1.06 \cdot 10^{6}$ | $5.30 \cdot 10^{5}$ | $2.65 \cdot 10^{5}$ | $1.33 \cdot 10^{5}$ | $6.63 \cdot 10^{4}$ | $3.31 \cdot 10^{4}$ |

В табл. 2 приведены погрешности для $g_2(x,u)$ на сетке Шишкина. Из таблицы видно, что погрешность возрастает при уменьшении $\varepsilon$ для фиксированного $N$. Результаты табл. 3 для модифицированного сплайна $gm_2(x,u)$ демонстрируют равномерную по $\varepsilon$ сходимость, что соответствует теореме 2.

На рисунке приведены графики $u(x)$ и $g_2(x,u)$, иллюстрирующие отклонение интерполяционного сплайна по Субботину от интерполируемой функции в случае кусочно-равномерной сетки при фиксированном $N$ и малом $\varepsilon$.

**Таблица 2.** Погрешность сплайна $g_2(x, u)$ на кусочно-равномерной сетке с $\sigma$ из (2.5)

| $\varepsilon \backslash N$ | $2^4$ | $2^5$ | $2^6$ | $2^7$ | $2^8$ | $2^9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $9.38 \cdot 10^{-6}$ | $1.18 \cdot 10^{-6}$ | $1.47 \cdot 10^{-7}$ | $1.84 \cdot 10^{-8}$ | $2.31 \cdot 10^{-9}$ | $2.89 \cdot 10^{-10}$ |
| $10^{-1}$ | $1.44 \cdot 10^{-3}$ | $2.50 \cdot 10^{-4}$ | $3.64 \cdot 10^{-5}$ | $4.90 \cdot 10^{-6}$ | $6.35 \cdot 10^{-7}$ | $8.09 \cdot 10^{-8}$ |
| $10^{-2}$ | $4.37 \cdot 10^{-3}$ | $1.58 \cdot 10^{-3}$ | $4.49 \cdot 10^{-4}$ | $1.04 \cdot 10^{-4}$ | $2.15 \cdot 10^{-5}$ | $4.03 \cdot 10^{-6}$ |
| $10^{-3}$ | $7.05 \cdot 10^{-3}$ | $1.58 \cdot 10^{-3}$ | $4.49 \cdot 10^{-4}$ | $1.04 \cdot 10^{-4}$ | $2.15 \cdot 10^{-5}$ | $4.03 \cdot 10^{-6}$ |
| $10^{-4}$ | $7.32 \cdot 10^{-2}$ | $4.08 \cdot 10^{-3}$ | $4.49 \cdot 10^{-4}$ | $1.04 \cdot 10^{-4}$ | $2.15 \cdot 10^{-5}$ | $4.03 \cdot 10^{-6}$ |
| $10^{-5}$ | $7.35 \cdot 10^{-1}$ | $4.11 \cdot 10^{-2}$ | $2.36 \cdot 10^{-3}$ | $1.39 \cdot 10^{-4}$ | $2.15 \cdot 10^{-5}$ | $4.03 \cdot 10^{-6}$ |
| $10^{-6}$ | 7.35 | $4.11 \cdot 10^{-1}$ | $2.37 \cdot 10^{-2}$ | $1.40 \cdot 10^{-3}$ | $8.46 \cdot 10^{-5}$ | $5.18 \cdot 10^{-6}$ |
| $10^{-7}$ | 73.5 | 4.11 | $2.37 \cdot 10^{-1}$ | $1.40 \cdot 10^{-2}$ | $8.46 \cdot 10^{-4}$ | $5.19 \cdot 10^{-5}$ |
| $10^{-8}$ | 735 | 41.1 | 2.37 | $1.40 \cdot 10^{-1}$ | $8.46 \cdot 10^{-3}$ | $5.19 \cdot 10^{-4}$ |

**Таблица 3.** Погрешность модифицированного сплайна $gm_2(x, u)$ на кусочно-равномерной сетке с $\sigma$ из (2.5)

| $\varepsilon \backslash N$ | $2^4$ | $2^5$ | $2^6$ | $2^7$ | $2^8$ | $2^9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $9.38 \cdot 10^{-6}$ | $1.18 \cdot 10^{-6}$ | $1.47 \cdot 10^{-7}$ | $1.84 \cdot 10^{-8}$ | $2.31 \cdot 10^{-9}$ | $2.89 \cdot 10^{-10}$ |
| $10^{-1}$ | $1.44 \cdot 10^{-3}$ | $2.50 \cdot 10^{-4}$ | $3.64 \cdot 10^{-5}$ | $4.90 \cdot 10^{-6}$ | $6.35 \cdot 10^{-7}$ | $8.09 \cdot 10^{-8}$ |
| $10^{-2}$ | $4.37 \cdot 10^{-3}$ | $1.58 \cdot 10^{-3}$ | $4.49 \cdot 10^{-4}$ | $1.04 \cdot 10^{-4}$ | $2.15 \cdot 10^{-5}$ | $4.03 \cdot 10^{-6}$ |
| $10^{-3}$ | $4.37 \cdot 10^{-3}$ | $1.58 \cdot 10^{-3}$ | $4.49 \cdot 10^{-4}$ | $1.04 \cdot 10^{-4}$ | $2.15 \cdot 10^{-5}$ | $4.03 \cdot 10^{-6}$ |
| $10^{-4}$ | $4.37 \cdot 10^{-3}$ | $1.58 \cdot 10^{-3}$ | $4.49 \cdot 10^{-4}$ | $1.04 \cdot 10^{-4}$ | $2.15 \cdot 10^{-5}$ | $4.03 \cdot 10^{-6}$ |
| $10^{-5}$ | $4.37 \cdot 10^{-3}$ | $1.58 \cdot 10^{-3}$ | $4.49 \cdot 10^{-4}$ | $1.04 \cdot 10^{-4}$ | $2.15 \cdot 10^{-5}$ | $4.03 \cdot 10^{-6}$ |
| $10^{-6}$ | $4.37 \cdot 10^{-3}$ | $1.58 \cdot 10^{-3}$ | $4.49 \cdot 10^{-4}$ | $1.04 \cdot 10^{-4}$ | $2.15 \cdot 10^{-5}$ | $4.03 \cdot 10^{-6}$ |
| $10^{-7}$ | $4.37 \cdot 10^{-3}$ | $1.58 \cdot 10^{-3}$ | $4.49 \cdot 10^{-4}$ | $1.04 \cdot 10^{-4}$ | $2.15 \cdot 10^{-5}$ | $4.03 \cdot 10^{-6}$ |
| $10^{-8}$ | $4.37 \cdot 10^{-3}$ | $1.58 \cdot 10^{-3}$ | $4.49 \cdot 10^{-4}$ | $1.04 \cdot 10^{-4}$ | $2.15 \cdot 10^{-5}$ | $4.03 \cdot 10^{-6}$ |

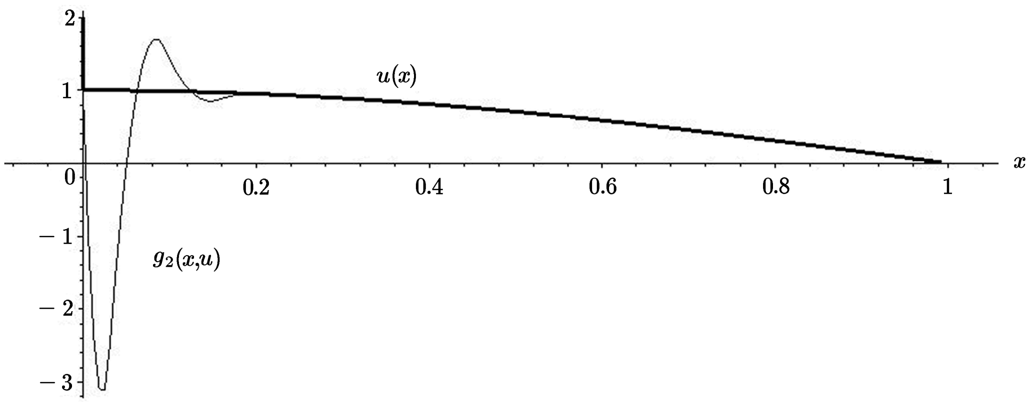


**Рис.** Графики $u(x)$ и $g_2(x, u)$ при $\varepsilon = 10^{-7}$, $N = 32$ на сетке Шишкина

*Благодарности.* Авторы выражают глубокую благодарность Ю.С. Волкову за полезные обсуждения.

## Литература


1. **Ильин А.М.** Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки. — 1969. — Т. 6, № 2. — С. 237–248.
2. **Бахвалов Н.С.** К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1969. — Т. 9, № 4. — С. 841–890.
3. **Шишкин Г.И.** Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. — Екатеринбург: УрО РАН, 1992.
4. **Шишкин Г.И.** Аппроксимация решений сингулярно возмущенных краевых задач с параболическим пограничным слоем // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1989. — Т. 29, № 7. — С. 963–977.
5. **Ahlberg J.H., Nilson E.N., and Walsh J.L.** The Theory of Splines and their Applications. — New York: Academic Press, 1967.
6. **Бор К.Де.** Практическое руководство по сплайнам. — М.: Радио и связь, 1985.
7. **Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.** Сплайны в вычислительной математике. — М.: Наука, 1976.
8. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980.
9. **Задорин А.И.** Метод интерполяции для задачи с пограничным слоем // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2007. — Т. 10, № 3. — С. 267–275.
10. **Задорин А.И.** Интерполяция Лагранжа и формулы Ньютона–Котеса для функций с погранслойной составляющей на кусочно-равномерных сетках // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 3. — С. 289–303.
11. **Zadorin A.I.** Spline interpolation of functions with a boundary layer component // Inter. J. Numer. Anal. Mod., series B. — 2011. — Vol. 2, № 2–3. — P. 262–279.
12. **Волков Ю.С.** Интерполяция сплайнами четной степени по Субботину и по Марсдену // Украинский математический журнал. — 2014. — Т. 66, № 7. — С. 891–908.
13. **Miller J.J.H., O'Riordan E., and Shishkin G.I.** Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems: Error Estimates in the Maximum Norm for Linear Problems in One and Two Dimensions (Revised Edition). — Singapore: World Scientific, 2012.
14. **Linss T.** The necessity of Shishkin decompositions // Applied Mathematics Letters. — 2001. — Vol. 14. — P. 891–896.
15. **Волков Ю.С.** О нахождении полного интерполяционного сплайна через $B$-сплайны // Сибирские электронные математические известия. — 2008. — Т. 5. — С. 334–338.
16. **Volkov Yu.S.** Obtaining a banded system of equations in complete spline interpolation problem via $B$-splines basis // Central Europen J. of Mathematics. — 2012. — Vol. 10, № 1. — P. 352–356.
17. **Блатов И.А., Китаева Е.В.** Сходимость метода адаптации сеток Н.С. Бахвалова для сингулярно возмущенных краевых задач // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 1. — С. 43–55.


*Поступила в редакцию 27 июня 2016 г.,*
*в окончательном варианте 8 ноября 2016 г.*

## Литература в транслитерации


1. **Il'in A.M.** Raznostnaya skhema dlya differencial'nogo uravneniya s malym parametrom pri starshey proizvodnoy // Matem. zametki. — 1969. — T. 6, № 2. — S. 237–248.

2. **Bahvalov N.S.** K optimizacii metodov resheniya kraevyh zadach pri nalichii pogranichnogo sloya // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1969. — T. 9, № 4. — S. 841–890.
3. **Shishkin G.I.** Setochnye approksimacii singulyarno vozmushchennyh ellipticheskih i parabolicheskih uravneniy. — Ekaterinburg: UrO RAN, 1992.
4. **Shishkin G.I.** Approksimaciya resheniy singulyarno vozmushchennyh kraevyh zadach s parabolicheskim pogranichnym sloem // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1989. — T. 29, № 7. — S. 963–977.
5. **Ahlberg J.H., Nilson E.N., and Walsh J.L.** The Theory of Splines and their Applications. — New York: Academic Press, 1967.
6. **Bor K.De.** Prakticheskoe rukovodstvo po splaynam. — M.: Radio i svyaz', 1985.
7. **Stechkin S.B., Subbotin Yu.N.** Splayny v vychislitel'noy matematike. — M.: Nauka, 1976.
8. **Zav'yalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L.** Metody splayn-funkciy. — M.: Nauka, 1980.
9. **Zadorin A.I.** Metod interpolyacii dlya zadachi s pogranichnym sloem // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2007. — T. 10, № 3. — S. 267–275.
10. **Zadorin A.I.** Interpolyaciya Lagranzha i formuly N'yutona–Kotesa dlya funkciy s pogransloynoy sostavlyayushchey na kusochno-ravnomernyh setkah // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2015. — T. 18, № 3. — S. 289–303.
11. **Zadorin A.I.** Spline interpolation of functions with a boundary layer component // Inter. J. Numer. Anal. Mod., series B. — 2011. — Vol. 2, № 2–3. — P. 262–279.
12. **Volkov Yu.S.** Interpolyaciya splaynami chetnoy stepeni po Subbotinu i po Marsdenu // Ukrainskiy matematicheskiy zhurnal. — 2014. — T. 66, № 7. — S. 891–908.
13. **Miller J.J.H., O'Riordan E., and Shishkin G.I.** Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems: Error Estimates in the Maximum Norm for Linear Problems in One and Two Dimensions (Revised Edition). — Singapore: World Scientific, 2012.
14. **Linss T.** The necessity of Shishkin decompositions // Applied Mathematics Letters. — 2001. — Vol. 14. — P. 891–896.
15. **Volkov Yu.S.** O nahozhdenii polnogo interpolyacionnogo splayna cherez $B$-splayny // Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya. — 2008. — T. 5. — S. 334–338.
16. **Volkov Yu.S.** Obtaining a banded system of equations in complete spline interpolation problem via $B$-splines basis // Central Europen J. of Mathematics. — 2012. — Vol. 10, № 1. — P. 352–356.
17. **Blatov I.A., Kitaeva E.V.** Skhodimost' metoda adaptacii setok N.S. Bahvalova dlya singulyarno vozmushchennyh kraevyh zadach // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2016. — T. 19, № 1. — S. 43–55.