

ЭЛЕКТРОКОНВЕКЦИЯ ЖИДКИХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

В. В. Никитин

(Новосибирск)

Исследована зависимость пондеромоторных сил, вызывающих электроконвекцию, от свойств жидкости и напряженности электростатического поля бесконечной заряженной пластины и на основе полученных решений введен параметр относительной интенсификации теплообмена в различных диэлектриках во внешнем электростатическом поле.

Известно, что электрическое поле интенсифицирует теплоотдачу к жидкостям и газам. Необходимыми условиями возникновения электроконвекции являются градиенты напряженности поля и коэффициента поляризации среды вблизи теплопередающей поверхности, однако экспериментально обнаружено также влияние однородного электростатического поля на свободную конвекцию диэлектрика [1]. В данном случае можно пренебречь краевыми эффектами и считать поле однородным всюду, исключая области вблизи пластин конденсатора. Здесь напряженность поля уменьшается в результате поляризации среды, которая возникает вследствие ориентации молекул с постоянным и (или) индуцированным дипольным моментом, а также в результате разделения зарядов в электрическом поле поверхности. Используемые жидкие диэлектрики имеют малую, но все же отличную от нуля проводимость  $\sigma = 10^{-4} - 10^{-12} \text{ ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$  и в этом смысле могут рассматриваться как весьма слабые растворы электролитов. Наблюдавшееся Сентфлебеном [2] значительное влияние ничтожных следов загрязнения диэлектриков на теплопередачу подтверждает это положение. При этом характерный масштаб области пространственного заряда на поверхности лежит в диапазоне  $1/\kappa = 10^{-8} - 10^{-4} \text{ м}$ , что обычно значительно меньше области изменения электростатического потенциала. Однако именно в области экранирования локализованы пондеромоторные силы, вызывающие дополнительный конвективный поток жидкости.

Ниже в качестве модели рассчитано электростатическое поле в полубесконечной жидкости с заданным потенциалом на плоской границе при экранировании заряда границы ионами противоположного знака. Полученные решения позволяют найти распределение электрострикционных сил в неоднородном температурном поле жидкости, их отношение к термическому изменению гравитационных сил и критерий подобия, характеризующие интенсификацию теплообмена в электростатическом поле. Так как рассмотрен лишь один механизм поляризации среды, возможно обобщение полученных результатов на случай находящихся во внешнем электрическом поле цилиндра, радиус которого превышает радиус экранирования, и нагретой плоскости.

1. Пусть плоская заряженная поверхность  $y = 0$  граничит с полубесконечным объемом слабого раствора бинарного электролита. Среднюю концентрацию  $n_\infty$  ионов каждого знака в единице объема считаем настолько малой, что дебаевский радиус экранирования  $1/\kappa$  значительно превышает масштаб осреднения электрического поля.

Найдем зависимости безразмерных величин суммарной концентрации ионов, объемной плотности заряда, напряженности и потенциала электростатического поля

$$n = \frac{n_+ + n_-}{2n_\infty}, \quad q = \frac{n_+ - n_-}{2n_\infty}, \quad \epsilon = \frac{eE}{\kappa kT}, \quad \Phi = \frac{e\phi}{kT} \quad (1.1)$$

от безразмерной координаты по нормали к поверхности

$$\theta = \kappa y, \quad \kappa = (8\pi e^2 n_\infty / \epsilon_d kT)^{1/2} \quad (1.2)$$

Здесь  $E, \Phi$  — размерные значения напряженности и потенциала поля,  $n_+, n_-$  — концентрации положительных и отрицательных ионов,  $e$  —

абсолютный заряд иона,  $kT$  — температура (в энергетических единицах),  $\varepsilon_d$  — диэлектрическая проницаемость.

Для простоты считаем электролит симметричным (модули зарядовых чисел равны  $|z_+| = |z_-| = 1$ ) и коэффициенты диффузии равными  $D_i = D = \text{const}$ , что приближенно справедливо для наиболее распространенных диссоциирующих примесей при их малой концентрации. Рассматривая жидкости и газы, либо обладающие большой диэлектрической прочностью, либо индифферентные по отношению к заряженной поверхности, будем пренебрегать током утечки заряда поверхности

$$j_i = eD (z_i e n_i E / kt - \nabla n_i) = 0$$

Это условие вместе с уравнениями Максвелла приводит к следующей системе уравнений:

$$q_0 = n\varepsilon, \quad n_0 = q\varepsilon, \quad \varepsilon_0 = q, \quad \varphi_j = -\varepsilon \quad (1.3)$$

Отсюда, исключая  $q$  и  $n$ , получаем уравнение для напряженности поля в жидкости

$$\varepsilon \varepsilon_{000} - \varepsilon_0 \varepsilon_{00} - \varepsilon^3 \varepsilon_0 = 0 \quad (1.4)$$

Здесь индексами обозначены переменная и порядок производных. При условии электронейтральности среды вдали от поверхности

$$q, \varepsilon \rightarrow 0, \quad n \rightarrow 1 \quad \text{при } \theta \rightarrow \infty$$

и при заданном электростатическом потенциале поверхности (для определенности — положительно заряженной) относительно бесконечности

$$\varphi(0) = \varphi_0 > 0, \quad \varphi(\infty) = 0$$

получим

$$\varphi = 2 \operatorname{lnch} \frac{\theta + \theta_0}{2}, \quad \varepsilon = \frac{2}{\operatorname{sh}(\theta + \theta_0)} \quad \left( \theta_0 = \operatorname{lnch} \frac{\varphi_0}{4} \right) \quad (1.5)$$

Это же решение может быть получено не только из условия отсутствия амбиполярно-диффузионного потока ионов, но и методом самосоглазованного поля. Действительно, если в соответствии с теорией Дебая — Хюккеля [3] примем статистическое распределение ионов в электростатическом поле

$$n_+ = n_\infty \exp(-\varphi), \quad n_- = n_\infty \exp \varphi \quad (1.6)$$

то уравнение Пуассона примет вид

$$\varphi_{00} = \operatorname{sh} \varphi, \quad \varphi(\infty) = \varphi_0(\infty) = 0 \quad (1.7)$$

и даст то же соотношение между напряженностью и потенциалом поля, которое следует и из уравнения (1.5)

$$\varepsilon = 2 \operatorname{sh} \varphi / 2 \quad (1.8)$$

Однако в непосредственной окрестности пластины эти решения лишены физического смысла как в случае значительной степени ионизации жидкости, так и для сильно заряженной поверхности. В области применимости полученных решений должны выполняться следующие два критерия.

Во-первых, среднее расстояние между противоположными ионами должно быть меньше расстояния, определяемого условием слабости энергии кулоновского взаимодействия отрицательных ионов по сравнению с их сред-

ней кинетической энергией

$$n_-^{-1/2} \geq \delta = e^2 / \epsilon_d k T$$

Во-вторых, среднее расстояние между положительными ионами должно быть не больше расстояния до поверхности

$$n_+^{-1/2} \leq y$$

Используя решения (1.5), (1.6), запишем оба критерия в виде

$$\text{th} \frac{\theta + \theta_0}{2} \geq \max \left\{ \frac{\kappa \delta}{\sqrt{8\pi}}, \left( \frac{8\pi \kappa \delta}{\theta^2} \right)^{1/2} \right\} \quad (1.9)$$

Предварительно исследуем первую часть неравенства. Она справедлива в области

$$\theta \geq \ln \left( \frac{\sqrt{8\pi} + \kappa \delta}{\sqrt{8\pi} - \kappa \delta} \text{th} \frac{\varphi_0}{4} \right)$$

и, в частности, всюду при  $\theta \geq 0$ , если потенциал поверхности не превышает критического значения

$$[\varphi_0] = \ln (8\pi / \kappa \delta) \quad (1.10)$$

Запишем это выражение в ином виде, используя соотношение кинетической теории между коэффициентом электропроводности  $\sigma$  и подвижностью ионов  $w$  [4]

$$\sigma = 2n_\infty e w, \quad w = eD / \epsilon_d k T$$

Тогда

$$\kappa = (4\pi \sigma / D)^{1/2}, \quad [\varphi_0] = \ln (2D / \sigma \delta^2) \quad (1.11)$$

и значения радиуса экранирования и критического потенциала можно легко оценить при помощи табличных параметров (число Шмидта  $S = \nu / D$  для большинства маловязких жидкостей с примесной проводимостью имеет порядок  $10^3$ , а для газов близко к единице). Например, для сухого воздуха, рассматриваемого как слабо ионизованный газ, критический потенциал поверхности равен  $[\varphi_0] \approx 30$ , тогда как для химически чистой, дистиллированной и морской (соленость 0.035) воды  $[\varphi_0] \approx 20, 10, 1$  соответственно. Последнюю, однако, нельзя считать слабым раствором электролита, так как в этом случае дебаевский радиус экранирования и диаметр молекулы воды соизмеримы.

Практический интерес представляют случаи  $\varphi_0 \gg 4$ , так как безразмерный электростатический потенциал отнесен к величине  $kT / e = 0.03 e$  (при  $T = 300^\circ \text{K}$ ), а полученные значения  $[\varphi_0]$  меньше технических критериев сильной заряженности поверхности. Исследуя далее неравенство (1.9), найдем, что в области  $\theta < 1$  экранирования заряда поверхности последняя часть неравенства является определяющей для жидкостей со средней концентрацией ионов  $n_\infty \ll \delta^{-3}$ , т. е. практически для всех жидких диэлектриков. В результате область применимости решений (1.5) и (1.8) определяется однозначно, ее безразмерная граница  $\theta_*$  оказывается слабой функцией степени ионизации среды

$$\theta \geq \theta_* = 2(\pi \kappa \delta)^{1/2} \sim 0.1 \quad (1.12)$$

а потенциал  $\varphi_*$  на границе значительно меньше потенциала поверхности

$$\varphi_* = 2 \ln \text{th} (\pi \kappa \delta)^{1/2} \ll \varphi_0$$

Потенциал поля в непосредственной близости к поверхности запишем в виде трех членов ряда Маклорена

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_0'(0) \theta + 1/2 \varphi_0''(0) \theta^2 \quad \text{при } \theta \ll 1$$

и, сопрягая решения для потенциала и его производной на границе  $\theta_*$ , определим напряженность поля и объемную плотность заряда

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= -\varphi_0'(0) = \frac{2}{\theta_*} \left( \varphi_0 - 2 \ln \operatorname{cth} \frac{\theta_*}{2} - \frac{2}{\operatorname{sh} \theta_*} \right) \\ q_0 &= -\varphi_0''(0) = \frac{2}{\theta_*^2} \left( \varphi_0 - 2 \ln \operatorname{cth} \frac{\theta_*}{2} - \frac{2\theta_*}{\operatorname{sh} \theta_*} \right) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Заметим, что последними членами, содержащими гиперболические функции, можно пренебречь, так как при принятых ранее ограничениях

$$\varepsilon_0 > \varphi_0 (\lambda \kappa \delta)^{-1/3} > (2\pi)^{-0.3} \varphi_0 > 1$$

и считать распределение потенциала в области экранирования параболическим

$$\varphi = \varphi_0 (1 - \theta / \theta_*)^2 \quad (1.14)$$

Такая общепринятая операция «сшивания» решений обладает меньшей точностью по сравнению с методом асимптотического сращивания [5], но требует и меньшей информации о физико-химических явлениях на заряженной поверхности. Однако указанным методом можно воспользоваться в частном случае для определения средней напряженности  $\langle \varepsilon \rangle$  поля, локализованного в пределах радиуса экранирования поверхностного заряда. При этом внутреннее решение для потенциала может быть записано в размерном виде  $\Phi = \Phi_0 - \gamma E$  (при  $\theta \leq 1$ ), не содержащем в качестве характерного масштаба длины ни  $\delta$ , ни  $1/\kappa$ , а внешним решением является одночленное разложение  $\varphi = \varepsilon$  уравнения (1.14) в области  $\theta \gg 1$ . Сращивая их пределы при  $\theta \rightarrow 1$  и  $\theta \rightarrow 0$  соответственно, получаем  $\langle \varepsilon \rangle = \varphi_0$ , что следует, в частности, и из уравнения (1.13).

2. При механическом и тепловом равновесии среды помимо гравитационных сил  $\mathbf{f}_g = \rho \mathbf{g}$  на молекулы действуют пондеромоторные силы, направленные к заряженной поверхности вне зависимости от знака заряда и имеющие объемную плотность

$$\mathbf{f}_e = -\frac{\kappa_1}{2} \nabla E^2, \quad \kappa_1 = \frac{\varepsilon_d - 1}{4\pi} = \frac{\rho N}{M} \left( \beta + \frac{p_0^2}{3kT} \right) \quad (2.1)$$

Здесь  $\kappa_1$  и  $\beta$  — коэффициенты поляризации среды и отдельной молекулы,  $\rho$  и  $M$  — плотность и молекулярный вес,  $p_0$  — постоянная составляющая дипольного момента молекулы,  $N$  — число Авогадро. Вне области экранирования пондеромоторные силы малы

$$f_e = \kappa_1 E^2 \operatorname{cth} (\theta + \theta_*), \quad \theta > \theta_*$$

Это позволяет с достаточной точностью считать их локализованными в слое  $\theta \leq \theta_*$  со средней плотностью

$$\langle f_e \rangle = 1/2 \kappa_1 E_0^2 \quad (2.2)$$

При нарушении теплового равновесия среды приращение этих сил равно

$$\Delta f_e = - \left[ \frac{\partial \langle f_e \rangle}{\partial T} \right]_{T=T_0} \Delta T = \langle f_e \rangle \left[ \alpha + \frac{1}{2T_0} \left( 1 + \frac{2}{1 + 3\beta k T_0 p_0^{-2}} \right) \right] \Delta T \quad (2.3)$$

При дифференцировании выражения (2.2) помимо зависимости дебаевского радиуса экранирования  $1/\kappa$  и коэффициента поляризации  $\kappa_1$  от температуры жидкости  $T$  учтено термическое расширение

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha\Delta T), \quad \alpha = -\frac{1}{\rho_0} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial T} \right]_p, \quad \Delta T = T_0 - T \ll T_0$$

Здесь  $\rho_0$  и  $T_0$  — параметры жидкости на поверхности тела (при  $y = 0$ ).

Напряженность же поля на поверхности постоянна вследствие отсутствия пульсаций температуры на стенке и равна

$$E_0 = \Phi_0 \left[ \frac{\pi (8n_{\infty} e)^2}{\varepsilon_d k T} \right]^{1/2} \quad (2.4)$$

При общепринятой методике экспериментального исследования электроконвекции нагреваемое тело находится во внешнем электрическом поле, поэтому напряженность  $E_0$  может быть рассчитана обычным образом, если характерный размер тела значительно больше радиуса экранирования.

Термическое приращение пондеромоторных сил (2.3) не зависит от полярности заряда и в отличие от изменения гравитационных сил  $\Delta f_g = \rho_0 g \alpha \Delta T$  всегда направлено противоположно градиенту температуры среды, создавая дополнительный конвективный поток. Степень интенсификации теплообмена в электростатическом поле характеризует отношение указанных сил, равное

$$V = \frac{\Delta f_e}{\Delta f_g} = v E_0^2, \quad v = \frac{\kappa(\varepsilon_d - 1)}{8\pi\rho g} \left[ 1 + \frac{1}{2\alpha T_0} \left( 1 + \frac{2}{1 + 3\beta k T_0 \rho_0^{-2}} \right) \right] \quad (2.5)$$

Выражение в квадратных скобках в среднем равно  $1 + 1/\alpha T_0$ , так как для бездипольных молекул оно равно  $1 + 1/2\alpha T_0$ , а для молекул с преимущественной ориентационной поляризацией оно равно  $1 + 3/2\alpha T_0$ . Вместе с уравнением (1.11) это позволяет записать параметр  $v$ , объединяющий свойства жидкости, в удобном для приближенных расчетов виде

$$v \cong \frac{\varepsilon_d - 1}{4\rho g} \left( 1 + \frac{1}{\alpha T_0} \right) \left( \frac{\sigma S}{\pi v} \right)^{1/2} \quad (2.6)$$

Отсюда получим следующие закономерности. Интенсификация теплообмена в электрическом поле растет с увеличением полярности молекул и диэлектрической проницаемости и с уменьшением вязкости, молекулярного веса и сжимаемости среды при прочих равных условиях.

Нагревание неполярных жидкостей ведет к увеличению параметра  $v$  вследствие уменьшения вязкости и электрического сопротивления, тогда как для полярных жидкостей имеется и противоположно направленная тенденция, связанная с нарушением ориентационного порядка. Наконец, эффект электроконвекции сильнее проявляется в жидкостях, нежели в газах, ввиду значительного различия значений числа Шмидта и коэффициента объемного расширения.

Умножив последовательно на критерии Рейнольдса и Прандтля отношение термического приращения пондеромоторных сил к стоковой силе сопротивления движению жидкого моля, получим электроконвекционные аналоги критериев Грасгофа и Рэлея

$$G_e = GV, \quad R_e = RV$$

