ЛИТЕРАТУРА

1. **Прандтль Л., Титьенс О.** Гидро- и аэромеханика. Т. 2. М.—Л., Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, 1935.
2. **Аэродинамика.** Под общей редакцией В. Ф. Дюрэнд. Т. 2. М.—Л., Государственное издательство оборонной промышленности, 1939.
3. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М., Мир, 1973.
4. **Widnall S. E.** The structure and dynamics of vortex filaments.—In: Annual Rev. Fluid Mech. Vol. 7. Palo Alto, California, Annual Revs. Inc., 1975.
5. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., Наука, 1973.
6. **Leibovich S.** The structure of vortex breakdown.— In: Annual Rev. Fluid Mech. Vol. 10. Palo Alto, California, Annual Revs. Inc., 1978.
7. **Белоцерковский С. М., Ништ М. И.** Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М., Наука, 1978.
8. **Kaden H.** Aufwicklung einer unstabilen Unstetigkeitsfläche.— Ingenieur-Archiv, 1931, Bd 2, Ht 2.
9. **Moore D. W., Saffman P. G.** Axial flow in laminar trailing vortices.— Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1973, vol. 333, N 1595.
10. **Moore D. W.** The rolling up of a semi-infinite vortex sheet.— Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1975, vol. 345, N 1642.
11. **Mangler K. W., Weber J.** The flow field near the centre of a rolled-up vortex sheet.— J. Fluid Mech., 1967, vol. 30, pt 1.
12. **Guiraud J. P., Zeytounian R. Kh.** A double-scale investigation of the asymptotic structure of rolled-up vortex sheets.— J. Fluid Mech., 1977, vol. 79, pt 1.
13. **Kirde K.** Untersuchungen über die zeitliche Weiterentwicklung eines Wirbels mit vorgegebener Anfangsverteilung.— Ingenieur-Archiv, 1962, Bd 31, Ht6.
14. **Batchelor G. K.** Axial flow in trailing line vortices.— J. Fluid Mech., 1964, vol. 20, pt 4.
15. **Guiraud J. P., Zeytounian R. Kh.** A note on the viscous diffusion of rolled vortex sheets.— J. Fluid Mech., 1979, vol. 90, pt 1.
16. **Berger S. A.** Laminar wakes. N. Y., American Elsevier Publishing Company, Inc., 1971.
17. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Механика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1954.
18. **Рыжов О. С., Терентьев Е. Д.** О возмущениях, которые связаны с созданием подъемной силы, действующей на тело в трансзвуковом потоке диссипирующего газа.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
19. **Сычев В. В.** О течении в ламинарном гиперзвуковом следе за телом.— In: Fluid Dynamics Transactions. Vol. 3. Warszawa, PWN, 1966.
20. **Рыжов О. С., Терентьев Е. Д.** Ламинарный гиперзвуковой след за несущим телом.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 2.
21. **Werlé H.** Hydrodynamic flow visualization.— In: Annual Rev. Fluid Mech. Vol. 5. Palo Alto, California, Annual Revs. Inc., 1973.

УДК 532.5

ДЕМПФИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ КРЫЛА САМОЛЕТА АВТОМАТИЧЕСКИ УПРАВЛЯЕМЫМИ ВНУТРЕННИМИ СИЛАМИ

В. И. Меркулов

(*Новосибирск*)

Увеличение абсолютных размеров летательных аппаратов приводит к уменьшению их динамической жесткости. Уменьшается как частота собственных колебаний, так и коэффициент конструкционного демпфирования. При этом деформации, вызванные импульсными силами, затухают медленно, а периодические возмущения могут усиливаться за счет резонанса. Все это приводит к уменьшению ресурса конструкции.

В данной работе исследуются различные способы демпфирования упругих колебаний с использованием внутренних сил. Амплитуда, частоты и фаза дей-

ствия сил регулируются системой управления. В качестве управляющего действия рассмотрены перемещающаяся масса, внутреннее натяжение, гибкий вал и гиромотор. В отличие от известного способа, в котором используются внешние аэродинамические силы, такое управление сохраняет свою эффективность и на аэродроме, где, как оказалось, самолет подвергается наибольшей динамической нагрузке.

1. Изгибно-крутильные колебания крыла малой стреловидности и большого удлинения можно описать с помощью двухкомпонентного вектора-функции $\{w(y, t), \theta(y, t)\}$ [1]. Здесь $w(y, t)$ — вертикальные смещения от положения равновесия оси жесткости крыла; $\theta(y, t)$ — поворот хорды крыла вокруг оси жесткости. Эти величины являются функциями координаты сечения y и времени t. В этих переменных свободные изгибно-крутильные колебания крыла описываются следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$m\ddot{w} - s_y\ddot{\theta} + (EIw'')'' = 0; \tag{1.1}$$

$$J_y\ddot{\theta} - s_y\ddot{w} - (GJ\theta')' = 0, \tag{1.2}$$

где $m(y, t)$ — распределение массы крыла вдоль оси, которая будет включать в себя и массу моторных гондол и топливных отсеков (выгорание топлива делает эту массу медленной функцией времени. В случае управления с помощью перемещающихся в крыле масс появится быстроменяющийся член);

$J_y(y, t)$ — полярный момент инерции крыла относительно упругой оси; s_y — статический момент, определяемый произведением массы m на расстояние между осью жесткости и осью инерции.

Произведения EI и GJ представляют собой изгибную и крутильную жесткость крыла.

В уравнениях (1.1) точками обозначено дифференцирование по времени, а штрихами — производные по пространственной переменной y.

Защемленный фюзеляжем конец крыла удовлетворяет краевым условиям

$$w = w' = \theta = 0 \qquad \text{при } y = 0.$$

Свободный конец крыла подчиняется следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} &EIw'' = (EIw'') = 0 \quad &(1.3)\\ &GJ\theta' = 0 \quad &(1.4)\end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad y = L$$

(L — длина крыла).

Вектор-функцию свободных колебаний, как известно, можно искать в виде

$$e^{i\omega_0 t}\{f_w(y),\ f_\theta(y)\},$$

где ω_0 — собственные частоты; f_w, f_θ — собственные функции колебаний упругой конструкции.

Для собственной частоты ω_0 справедливо выражение

$$\omega_0^2 = \frac{\int_0^L \left[EI(f_w'')^2 + GJ(f_\theta')^2\right] dy}{\int_0^L \left(mf_w^2 - 2s_y f_w f_\theta + J_y f_\theta^2\right) dy}, \tag{1.5}$$

которое будет в дальнейшем использоваться. Ниже рассматривается только одна частота и одна собственная форма. Однако, используя принцип суперпозиции, справедливый для линейной задачи, можно распространить полученные результаты на общий случай.

Ограничивая рассмотрение случаев малых управляющих воздействий, можно считать, что форма деформации описывается теми же собственными функциями $\{f_w(y),\ f_\theta(y)\}$, что и для свободных колебаний, а меняется только собственная частота ω_0, которая приобретает в этом случае отрицательную мнимую часть. При этом вещественная часть меняется на величину второго порядка малости. Понятие малой величины будет уточнено ниже.

2. Перемещающуюся в крыле массу проще всего реализовать путем кругового вращения вокруг некоторой точки $y = l_1$ сосредоточенной массы m_0. Если радиус окружности, по которой перемещается масса, обозначить через r, частоту вращения — ω_1, то к распределенной массе крыла m добавится функция времени и координаты $m_1 = m_0\delta[y - l_1 + r\sin\omega_1(t - t_0)]$, где δ — дельта-функция, которая обращается в бесконечность в точке с координатой $y = l_1 - r\sin\omega_1(t - t_0)$. Кроме того, к моменту инерции крыла добавится функция

$$J_1 = m_0 r^2 \sin^2\omega_1(t - t_0)\delta[y - l_1 + r\sin\omega_1(t - t_0)].$$

Для этого случая система изгибно-крутильных колебаний крыла приобретает вид

$$\begin{aligned} &(2.1) \qquad m\ddot{w} - s_y\ddot{\theta} + d/dt(m_1\dot{w}) - d/dt(sm_1\dot{\theta}) + (EIw'')'' = 0,\\ &\qquad\quad J_y\ddot{\theta} - s_y\ddot{w} + d/dt(J_1\dot{\theta}) - d/dt(sm_1\dot{w}) - (GJ\theta')' = 0,\end{aligned}$$

где s — расстояние между осью жесткости и осью инерции крыла, которое будем считать постоянным.

Благодаря малости управляющих воздействий решение системы (2.1) с краевыми условиями (1.3), (1.4) можно искать в виде произведений

$$w(y,\ t) = A(t)f_w(y), \quad \theta = A(t)f_\theta(y),$$

где $\{f_w(y),\ f_\theta(y)\}$ — вектор-функция свободных колебаний; $A(t)$ — неизвестная функция времени. Для определения этой функции можно воспользоваться уравнением энергии. Для этого нужно умножить уравнения (2.1) на функции w и θ, сложить, проинтегрировать по переменной y в пределах от 0 до L. Если при этом использовать краевые условия (1.3), (1.4), соотношение (1.5) и представление для w и θ, то для функции A получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(2.2) \qquad \frac{d^2A}{dt^2} + \omega_0^2 A + \frac{\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{dA}{dt}\displaystyle\int_0^L \left(m_1 f_w^2 + J_1 f_\theta^2 - 2sm_1 f_w f_\theta\right) dy\right]}{\displaystyle\int_0^L \left(mf_w^2 + J_y f_\theta^2 - 2s_y f_\theta f_w\right) dy}.$$

С точностью до величин второго порядка малости относительно m_1 и J_1 знаменатель можно вычислять при постоянных функциях $m(y)$ и $J_y(y)$, не учитывая переменные части, вносимые подвижной массой

$$N = \int_0^L \left(mf_w^2 + J_y f_\theta^2 - 2s_y f_\theta f_w\right) dy.$$

Что касается числителя, то его можно значительно упростить. Для этого, во-первых, вычислим входящий сюда интеграл, используя то обстоятельство, что функции m_1 и J_1 являются дельта-функциями

$$Q = \int_0^L \left(m_1 f_w^2 + J_1 f_\theta^2 - 2sm_1 f_\theta f_w\right) dy = m_0 \left[f_w^2 (l_1 - r\sin\omega_1 t) + \right.$$

$$\left. + r^2 \sin^2\omega_1 t f_\theta^2 (l_1 - r\sin\omega_1 t) - 2sf_w (l_1 - r\sin\omega_1 t) f_\theta (l_1 - r\sin\omega_1 t)\right.$$.

Так как радиус r значительно меньше расстояния между узлами собственной функции $\{f_w, f_\theta\}$, то можно осуществить разложения

$$f_w (l_1 - r\sin\omega_1 t) = f_w(l_1) - r\sin\omega_1 t f_w'(l_1),$$

$$f_\theta (l_1 - r\sin\omega_1 t) = f_\theta(l_1) - r\sin\omega_1 t f_\theta'(l_1).$$

Теперь для функции Q, отбрасывая величины второго порядка, получим представление $Q = M_1 - M_2 \sin\omega_1 t$, где

$$M_1 = m_0 \left[f_w^2(l_1) - 2sf_\theta(l_1) f_w(l_1)\right];$$

$$M_2 = m_0 \left[2rf_w(l_1) f_w'(l_1) - 2srf_w' f_\theta - 2srf_\theta'(l_1) f_w(l_1)\right].$$

Таким образом, уравнение (2.2) приобретает вид

(2.3)
$$\frac{d^2A}{dt^2} + \Omega^2 A - \frac{M_2\omega_1}{N}\cos\omega_1 t \frac{dA}{dt} = 0,$$

где
$$\Omega^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{M_1}{N\omega_0^2}\right).$$

Обращает на себя внимание тот факт, что управляющее воздействие вошло в коэффициент уравнения (2.3). Такое управление называют параметрическим.

Для решения уравнения (2.3) можно применить метод Ван-дер-Поля [2].

Для этого положим $x = A$, $z = dA/dt$ и перепишем уравнение (2.3) в виде системы

(2.4)
$$dx/dt = z,$$

$$dz/dt + \Omega^2 x - (M_2\omega_1 z/N)\cos\omega_1 t = 0,$$

решение которой будем искать в виде

(2.5)
$$x = a(t)\cos[\Omega t + \chi(t)],\quad z = -a(t)\omega_1 \sin[\Omega t + \chi(t)],$$

где $a(t)$ и $\chi(t)$ — неизвестные медленно меняющиеся функции времени.

После подстановки представления (2.5) в систему (2.4) получим

(2.6)
$$\frac{da}{dt}\cos\psi - a\frac{d\chi}{dt}\sin\psi = 0,$$

$$\frac{da}{dt}\sin\psi + a\frac{d\chi}{dt}\cos\psi = \frac{aM_2\omega_1}{N}\cos\omega_1 t\sin\psi,$$

где $\psi = \Omega t + \chi(t)$. Из последней системы можно исключить $d\chi/dt$ и получить

(2.7)
$$\frac{da}{dt} = \frac{aM_2\omega_1}{N}\cos\omega_1 t\sin^2\psi.$$

Согласно методу Ван-дер-Поля, коэффициент уравнения (2.7) допускает осреднение по времени или, что то же самое, по переменной ψ. Результат осреднения зависит от выбора частоты и фазы управления, которые до сих пор оставались произвольными.

Легко видеть, что средняя величина будет отлична от нуля только в том случае, если частота управления будет равняться 2Ω.

Выбрав фазу управления, совпадающую с χ, получим $da/dt = -aM_2\Omega/2N$.

Отсюда следует, что амплитуда колебаний будет убывать по закону

$$a(t) = a(0)\exp\left[-\alpha\Omega t\right],$$

где

$$\alpha = \frac{m_0 r\left[f_w(l_1)f'_w(l_1) - sf'_w(l_1)f_\theta(l_1)\right]}{2\int\limits_0^L\left(mf_w^2 + J_y f_\theta^2 - 2s_y f_w f_\theta\right)dy}.$$

Что касается фазы χ, то, разрешая систему (2.6) относительно $d\chi/dt$, получим

$$d\chi/dt = (M_2\Omega/N)\cos\omega_1 t\sin 2\psi.$$

Отсюда видно, что фаза χ является мало изменяющейся функцией, в среднем сохраняющей свое постоянное значение.

3. Решим задачу демпфирования колебаний крыла путем создания внутреннего продольного напряжения. Уравнения изгибно-крутильных колебаний крыла в этом случае запишутся в виде

$$m\ddot{w} - s_y\ddot{\theta} - Tw'' + (EIw'')'' = 0, \qquad J_y\ddot{\theta} - s_y\ddot{w} - (GJ\theta')' = 0,$$

где $T(t)$ — натяжение троса.

Как и выше, энергетическим методом сведем задачу к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $A(t)$

$$\frac{d^2A}{dt^2} + \omega_0^2(1-\tau)A(t) = 0,$$

где

$$\tau = \frac{T\left\{f'_w(L)f(L) - \int\limits_0^L\left[f'(y)\right]^2 dy\right\}}{\omega_0^2\int\limits_0^L\left(mf_w^2 - 2s_y f_w f_\theta + J_y f_\theta^2\right)dy}.$$

Представим функцию $A(t)$ в виде $A(t) = a(t)\cos(\omega_0 t - \chi)$, где $a(t)$ — медленно меняющаяся амплитуда колебаний. Методом Ван-дер-Поля найдем уравнение для амплитуды $a(t)$

$$\frac{da}{dt} + \frac{\tau(t)\,\omega_0 a}{2}\sin 2\psi = 0.$$

Закон управления $\tau(t)$, как это видно из уравнения, следует выбрать таким:

$$\tau(t) = \tau_0\sin 2\psi.$$

Тогда уравнение для амплитуды с усредненным по времени коэффициентом приобретает вид

$$da/dt + {}^1/_4\tau_0\omega_0 a = 0.$$

Откуда $a(t) = a(0)\exp\left[-{}^1/_4\tau_0\omega_0 t\right]$.

Коэффициент демпфирования в этом случае определяется формулой

$$\alpha = \frac{1}{4}\tau_0 = \frac{T\left\{f'_w(L)f_w(L) - \int\limits_0^L\left[f'_w(y)\right]^2 dy\right\}}{4\omega_0^2\int\limits_0^L\left(mf_w^2 - 2s_y f_w f_\theta + J_y f_\theta^2\right)dy}.$$

С помощью формулы (1.5) знаменатель можно выразить через потенциальную энергию деформированного крыла. Кроме того, в числителе можно пренебречь интегралом от квадрата малой величины. Тогда

$$\alpha = \frac{Tf'_w(L)\, f_w(L)}{4\int\limits_0^L \left[EI\left(f''_w\right)^2 + GJ\left(f'_\theta\right)^2\right] dy}.$$

Произведение Tf'_w представляет собой проекцию силы T на поперечную координату. При этом α оказывается равным $^1/_4$ отношения работы управляющей силы к потенциальной энергии деформированного крыла.

Требование $\alpha \ll 1$ необходимо, с одной стороны, для справедливости сделанных выше приближений и, с другой стороны, позволяет обойтись малыми управляющими силами. В то же время чрезмерно малое α будет соответствовать медленно затухающим колебаниям.

Заслуживает внимания тот факт, что рассмотренные механизмы демпфирования колебаний сохраняют свою эффективность и в том случае, если изгиб не сопровождается кручением крыла. Коэффициент демпфирования путем перемещения массы в этом случае будет иметь значение

$$\alpha = \frac{m_0 r f_w(l_1)\, f'_w(l_1)}{N}.$$

При управлении с помощью переменного внутреннего напряжения

$$\alpha = \frac{Tf'_w(L)\, f_w(L)}{\omega^2 \int\limits_0^L m f_w^2\, dy}.$$

4. Теперь рассмотрим демпфирование с помощью момента, который создается гибким валом-торсионом, проходящим через все крыло. Один конец вала соединяется с внешним концом крыла, а другой конец, расположенный в фюзеляже самолета, с помощью гидромеханизма может закручиваться по определенному закону.

Колебание крыла при наличии момента, приложенного в сечении $y = l$, записывается в виде

$$m\ddot{w} - s_y\ddot{\theta} + (EIw'')'' = 0,$$

$$J_y\ddot{\theta} - s_y\ddot{w} - (GJ\theta')' = M\delta(l - y),$$

где $M(t)$ — величина момента; $\delta(l - y)$ — дельта-функция.

Исходя из сделанного предположения о малости управляющего воздействия, будем искать решение в обычной форме. Для функции $A(t)$ получим уравнение

$$\frac{d^2A}{dt^2} - \omega_0^2 A = \frac{M(t)\, f_\theta(l)}{\int\limits_0^L \left(m f_w^2 + J_y f_\theta^2 - 2 s_y f_\theta f_w\right) dy}.$$

Управляющий момент определим следующим законом:

$$M = -M_0\omega_0 f_\theta(l) dA/dt.$$

В этом случае функция $A(t)$ будет убывать по закону

$$A(t) = A(0)\exp\left[-\alpha\omega_0 t\right],$$

где

$$\alpha = M_0 f_\theta^2/N.$$

Амплитуда крутящего момента M_0 определяется произведением жесткости вала на угол кручения и, конечно, пределом прочности. Возможность закручивать вал на большой угол, ограничиваемый только пределом прочности, позволяет использовать материал вала в максимальной степени и тем самым уменьшить его вес.

Особый интерес представляет собой управление с помощью гироскопического момента. Если во всех предыдущих случаях требовалась система датчиков колебаний, усилители и силовые механизмы, то в данном случае маховик, или, лучше сказать, гиромотор, позволяет объединить все функции системы управления и тем самым достичь ее предельной простоты и надежности.

Обозначим буквой K кинетический момент маховика. Для случая большого кинетического момента и небольшой угловой скорости прецессии его оси можно пользоваться законом движения оси [3]

$$K\omega_y = M_x, \quad K\omega_x = -M_y,$$

где ω_x и ω_y — угловые скорости поворота оси маховика вокруг осей x и y; M_x и M_y — соответствующие проекции приложенного к нему момента.

Для демпфирования изгибно-крутильных колебаний крыла маховик должен быть связан с крылом так, чтобы крутильные колебания крыла вызывали такие же повороты оси маховика вокруг оси y, т. е.

$$\omega_y = \dot{\theta}(l_1, t) = A(t) f_\theta(l_1).$$

Через l_1 обозначим координату y расположения маховика.

Что касается угловой скорости ω_x, то ее будем задавать специальным образом в соответствии с целью и средствами управления. Ось маховика в невозмущенном положении расположим перпендикулярно оси упругости крыла.

Компоненту угловой скорости ω_x представим в виде суммы

$$\omega_x = \partial^2 w/\partial x \partial t + \dot{\varphi}(t).$$

Здесь смешанная производная представляет собой угловую скорость изгиба оси крыла, а $\dot{\varphi}$ — угловую скорость поворота оси маховика относительно изогнутого крыла. И если первое слагаемое от нас не зависит, то скорость $\dot{\varphi}(t)$ можно выбрать по своему усмотрению в зависимости от целей и средств управления.

Достаточно общий закон управления можно задать формулой

$$\dot{\varphi} = p\dot{\theta} + \omega_0 q \theta, \tag{4.1}$$

где p и q — некоторые безразмерные коэффициенты.

Уравнения колебаний крыла при наличии гироскопических моментов запишутся в виде

$$m\ddot{w} - s_y\ddot{\theta} - [M_x\delta(l_1 - y)]' + (EIw'')'' = 0,$$

$$J_y\ddot{\theta} - s_y\ddot{w} - M_y\delta(l_1 - y) - (GJ\theta')' = 0.$$

Уравнение энергии приведет к следующему уравнению для амплитуды $A(t)$:

$$\frac{d^2A}{dt^2} + \omega_0^2 A = \frac{M_x f_w'(l_1) + M_y f_\theta(l_1)}{\int\limits_0^L \left(m f_w^2 - 2 s_y f_w f_\theta + J_y f_\theta^2\right) dy}.$$

Подставим сюда значение моментов M_x и M_y

$$M_x = K\omega_y = Kf_\theta(l_1)\frac{dA}{dt},\quad M_y = -K\omega_x = -K\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} - K\dot{\varphi} =$$

$$= Kf'_w(l_1)\frac{dA}{dt} - Kpf_\theta(l_1)\frac{dA}{dt} - KqAf_\theta(l_1)\,\omega_0.$$

В результате получим

$$\frac{d^2A}{dt^2} + \omega_0\alpha\frac{dA}{dt} + \Omega^2 A = 0, \tag{4.2}$$

где

$$\Omega^2 = \omega_0^2\left[1 + \frac{Kqf_\theta^2(l_1)}{\omega_\theta^2\int\limits_0^L\left(mf_w^2 + J_yf_\theta^2 - 2s_yf_\theta f_w\right)dy}\right];$$

$$\alpha = \frac{K\left[f'_w(l_1) + pf_\theta(l_1)\right]f_\theta(l_1)}{\omega_0\int\limits_0^L\left(mf_w^2 + J_yf_\theta^2 - 2s_yf_\theta f_w\right)dy}.$$

С достаточной точностью можно пользоваться такими выражениями для величин Ω и α:

$$\Omega = \omega_0,\quad \alpha = \frac{Kpf_\theta^2(l_1)}{\omega_0\int\limits_0^L\left(mf_w^2 + J_yf_\theta^2 - 2s_yf_wf_\theta\right)dy}. \tag{4.3}$$

Рассмотрим вопрос о физической реализации выбранного закона управления (4.1).

Наличие члена $\omega_0 q\theta$ в (4.1) приводит к некоторому изменению частоты колебаний и требует для реализации силового привода с обратной связью. Как и всегда, демпфирование обязано члену, пропорциональному скорости деформации, в данном случае $p\dot{\theta}$.

Связанные с крылом повороты вокруг оси y вызовут гироскопический момент вокруг оси Ox. Если теперь корпус маховика соединить с крылом через демпфер, который допускает поворот вокруг оси x, по закону $M_x = \varkappa\dot{\varphi}$, то обеспечим требуемую связь

$$K\dot{\theta} = \varkappa\dot{\varphi}. \tag{4.4}$$

Отсюда коэффициент p формулы (4.1)—(4.3) будет равняться

$$p = K/\varkappa.$$

Величину p желательно иметь как можно большую, однако она ограничена кинематическими условиями. Положим $\theta = \theta_0\exp(i\omega t)$, $\varphi = \varphi_0\exp(i\omega t)$. Тогда формула (4.4) даст связь для амплитуд колебаний

$$K\theta_0 = \varkappa\varphi_0.$$

Амплитуда поворота оси маховика не может превышать 90°, так как в этом положении маховик не создаст требуемого гироскопического момента. Используемые формулы вообще предполагали малость угла $\varphi_0 < 30°$. Амплитуда θ_0 определяется условиями эксплуатации. Отсюда следует так выбирать коэффициент демпфирования $\varkappa$, чтобы отношение $K/\varkappa < \varphi_0/\theta_0$, в противном случае маховик будет стучать в крайних положениях по механическим ограничителям. С математической точки зрения это приведет к нарушению условий применимости использованного описания, а с технической — уменьшит эффективность системы демпфирования.

Поступила 14 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бисплингхофф Р. Л. и др.** Аэроупругость. М., ИЛ, 1958.
2. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
3. **Лурье А. И.** Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.

УДК 532.5 : 532.135 : 541.24

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРИСТЕННЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ

В. Г. Богдевич, Г. Ф. Кобец, Г. С. Козюк, Г. С.Мигиренко,
В. И. Микута, Б. П. Миронов, Б. Г. Новиков,
В. А. Тэтянко, Ю. В. Штатнов
(*Новосибирск*)

Настоящая работа является кратким обзором исследований, постановка и проведение которых были организованы Михаилом Алексеевичем Лаврентьевым и большинство из которых выполнено под его непосредственным руководством. В этих исследованиях большое внимание уделено кавитационным течениям в тяжелой жидкости, особенностям перехода ламинарного течения в турбулентное, ламинаризации пристенных течений на проницаемых поверхностях, воздействию газовых пузырьков и полимерных добавок на структуру пристенной турбулентности.

Исследования кавитационных течений в тяжелой жидкости. Характерной особенностью кавитационных течений в тяжелой жидкости является искажение формы свободной поверхности каверны даже при весьма больших значениях чисел Фруда, вызываемое не только непосредственно силами плавучести, но и сбегающей вихревой пеленой. Это искажение формы каверны приводит к так называемым «всплытию каверны», «потере плавучести» и т. д. В наших исследованиях поверхность кавитатора и поверхность каверны рассмотрены как единая граничная поверхность тока, на части которой давление постоянное. Это позволило свести кавитационную задачу в тяжелой жидкости к хорошо изученной задаче безотрывного обтекания в невесомой жидкости, объяснить причины возникновения таких явлений, как «всплытие каверны», «потеря плавучести», и распространить формулу Кутта—Жуковского на случай кавитационных течений в тяжелой жидкости [1]

$$Y = \gamma D - \rho U_\infty \iiint_\omega \Omega_z d\omega,$$

где Y — вертикальная составляющая результирующей внешних сил, действующих на граничную поверхность тока; Ω_z — составляющая ротора скорости на горизонтальную ось, нормальную к скорости потока; ω — объем жидкого пространства, включающий и объем, ограниченный поверхностью тока.