

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛОПАСТЕЙ ОДНОРОДНОЙ РЕШЕТКИ ГИДРОТУРБИН В ЖИДКОСТИ

УДК 533.6

В. Б. Курзин, С. Н. Коробейников, В. П. Рябченко,
Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск

Лопасты гидротурбины в процессе эксплуатации неизбежно подвержены нестационарным воздействиям со стороны потока, которые вызывают их вынужденные колебания. Если частоты возбуждающих сил и собственные частоты колебаний лопастей близки между собой, то существует вероятность возникновения резонанса. По этой причине неоднократно случались поломки лопастей при эксплуатации гидротурбин. Указанные обстоятельства приводят к необходимости повышенной точности расчета собственных частот и форм колебаний лопастей. Трудности в достижении этой цели обусловлены большим числом факторов, влияющих на решение соответствующей задачи гидроупругости, в которой упругие деформации лопастей и движение жидкости должны определяться совместно.

В большинстве работ по этому вопросу, выполненных ранее, ряд таких факторов не учитывается. Так, в [1] не учитывается кривизна поверхности лопастей, а также приближенно (в плоской постановке) определяется гидродинамическое взаимодействие. Для модели лопасти в виде пластины переменной толщины выполнена и работа [2]. В наиболее полной постановке для модели лопасти в виде оболочки переменной толщины и с учетом пространственности течения эта задача рассмотрена в [3]. Однако метод конечного элемента (МКЭ), примененный в [3] для описания перемещения частиц как твердого тела, так и жидкости, требует большой памяти ЭВМ и времени расчета, что ограничивает возможности его реализации в инженерной практике.

Настоящая работа посвящена созданию метода расчета собственных колебаний лопастей для достаточно общей модели, аналогичной [3], реализация которого возможна на персональных компьютерах. С этой целью для определения гидродинамических нагрузок, действующих на лопасти, использован метод интегральных уравнений, уменьшающий на единицу размерность соответствующей гидродинамической задачи.

1. Основные предположения и постановка задачи. Рассмотрим задачу о свободных малых линейных колебаниях лопастей (рис. 1) ротора осевой гидротурбины в жидкости. Ротор моделируем кольцевой решеткой, состоящей из N достаточно тонких одинаковых лопастей, расположенных между двумя бесконечными круговыми цилиндрами радиусов R_1 и R_2 . Предположим, что взаимодействие между лопастями осуществляется только через жидкость, которая является идеальной и несжимаемой, а ее движение обусловлено лишь колебаниями лопастей.

В силу предположения о малой толщине лопастей запишем задачу относительно перемещений их срединных поверхностей. Из условия однородности решетки следует [4], что нормальные колебания их срединных поверхностей могут быть представлены в виде

$$w_m^j = u_m^j(\mathbf{x})e^{i(\omega_j + \mu_j m)} \quad (j, m = 0, 1, 2, \dots, N - 1), \quad (1.1)$$

где $\mu_j = 2\pi j/N$ — сдвиг фаз между колебаниями соседних лопастей; ω_j — собственная частота колебаний лопастей со сдвигом фаз μ_j ; u_m^j — амплитудная функция смещения срединной поверхности S_m m -й лопасти; \mathbf{x} — радиус-вектор точек поверхности S_m .

Принимая во внимание (1.1), уравнение нормальных колебаний решетки лопастей с

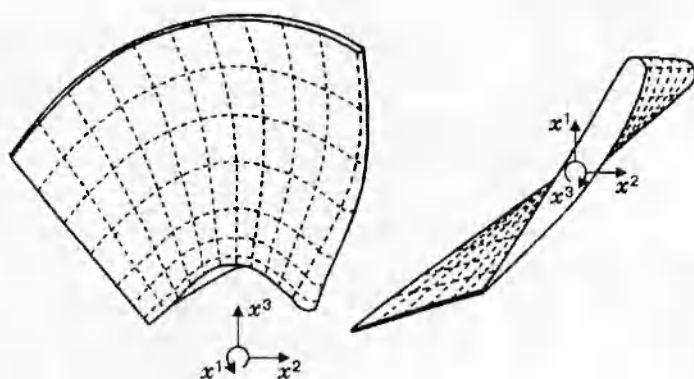


Рис. 1

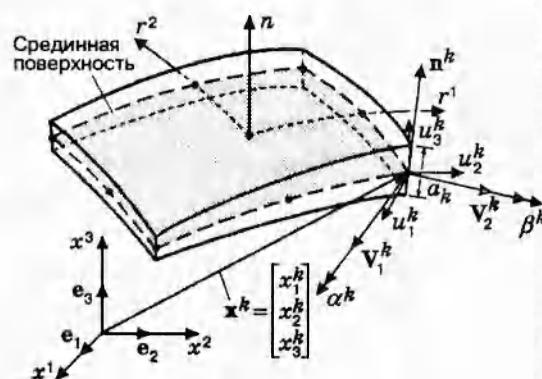


Рис. 2

учетом их гидродинамического взаимодействия можно свести к матричным уравнениям:

$$[C - \lambda_j(M + A_j)]\mathbf{X}_j = 0, \quad \lambda_j = \omega_j^2 \quad (j = 0, 1, 2, \dots, N - 1). \quad (1.2)$$

Здесь

$$A_j = \sum_{s=0}^{N-1} L_s e^{i\mu_j s};$$

$s = n - m$ при $n \geq m$; $s = N + (n - m)$ при $n < m$; L_s — матрицы коэффициентов влияния обобщенных перемещений n -й лопасти на обобщенные гидродинамические силы, действующие на m -ю лопасть; C, M — матрицы жесткости и масс; \mathbf{X}_j — вектор коэффициентов аппроксимации амплитудной функции u_m^j исходной лопасти ($m = 0$) по некоторой системе базисных функций. Задача состоит в определении собственных значений матричного уравнения (1.2), для чего предварительно необходимо выбрать систему базисных функций, построить матрицы жесткости и масс и определить гидродинамические нагрузки, действующие на колеблющиеся лопасти.

2. Применение МКЭ для определения матриц жесткости и масс. В настоящее время имеется большое число формулировок конечных элементов оболочек для расчета тонкостенных конструкций на прочность и собственные колебания. Среди них значительный интерес представляет формулировка изопараметрического конечного элемента оболочки, полученная прямым введением кинематической и статической гипотез, принятых в теории оболочек, в трехмерную теорию упругости [5, 6]:

- волокно, первоначально совпадающее с нормальным вектором к срединной поверхности оболочки, в процессе деформирования остается прямым и не изменяет своей длины (кинематическая гипотеза Тимошенко);
- напряжения в нормальном направлении к срединной поверхности оболочки пренебрежимо малы по сравнению с другими компонентами тензора напряжений.

Так как при построении этого элемента не накладываются какие-либо дополнительные ограничения на общие уравнения теории упругости, кроме приведенных выше двух, то конечный элемент можно прямо использовать для расчета непологих оболочек и оболочек с переменной толщиной. Лопатки турбин принадлежат к такому классу оболочек, и, следовательно, элемент можно естественным образом использовать для расчета деформаций таких конструкций.

В [7] предложена нелинейная формулировка описанного выше изопараметрического элемента. Используются элементы от линейного до кубического порядка аппроксимации. Матрица жесткости элемента строится таким образом, что допускает раздельное интегрирование мембранных и сдвиговых членов [5]. Этот элемент включен в библиотеку конечных

элементов вычислительного комплекса PIONER [8].

Приведем вывод выражений матриц жесткости C и масс M , полученных с помощью изопараметрического конечного элемента оболочки [7], которые требуются при решении задачи о колебаниях лопастей гидротурбин в жидкости. Так как мы изучаем линейные колебания лопастей, то матрицу C определим в линейной постановке. Рассмотрим некоторый конечный элемент (рис. 2). В качестве системы отсчета используем декартову систему координат (x^1, x^2, x^3) с единичными ортами e_1, e_2, e_3 . Пусть r^1, r^2 — естественные координаты в срединной поверхности элемента оболочки, а n — координата в нормальном направлении к срединной поверхности оболочки (рис. 2). Отметим, что система координат (r^1, r^2, n) в общем случае не является ортогональной. Пользуясь кинематической гипотезой Тимошенко, вектор перемещения некоторой материальной точки элемента оболочки можно представить в виде [5, 6]

$$u = \sum_{k=1}^K h_k u^k + \frac{n}{2} \sum_{k=1}^K a_k h_k (-\alpha^k V_2^k + \beta^k V_1^k), \quad (2.1)$$

где $h_k = h_k(r^1, r^2)$ — интерполяционные полиномы; u^k — вектор перемещения узловой точки k ; a_k — толщина оболочки в узловой точке k ; V_1^k, V_2^k — единичные ортогональные векторы в срединной поверхности оболочки в узловой точке k , которые можно построить, например, по формулам, предложенным в [5, 6]; α^k, β^k — малые повороты единичного вектора нормали n^k вокруг векторов V_1^k, V_2^k соответственно (рис. 2); индекс k пробегает значения от 1 до K , K — число узловых точек в элементе.

Компоненты тензора деформаций записываются в виде

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.2)$$

Индекс после запятой обозначает частную производную по соответствующей координате.

Введем вектор узловых перемещений элемента

$$u^e = [u_1^1, u_2^1, u_3^1, \alpha^1, \beta^1, \dots, u_1^K, u_2^K, u_3^K, \alpha^K, \beta^K]^T \quad (2.3)$$

(индекс t обозначает транспонирование). Введем также вектор, составленный из компонент тензора деформаций

$$e = [e_{11}, e_{22}, e_{33}, 2e_{12}, 2e_{13}, 2e_{23}]^T. \quad (2.4)$$

Соотношения (2.2) с помощью (2.1) и обозначений (2.3), (2.4) можно записать в векторно-матричном виде:

$$e = B u^e. \quad (2.5)$$

Компоненты матрицы B приведены в [6].

Для того чтобы учесть равенство нулю компоненты напряжения в нормальном направлении к срединной поверхности, введем локальную систему координат $(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)$ слоя с ортогональными базисными векторами $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ так, что орты \hat{e}_1, \hat{e}_2 находятся в плоскости $n = \text{const}$, а орт \hat{e}_3 направлен по нормали к этой плоскости. Во избежание путаницы отметим, что базисные орты $\bar{v}_1^k, \bar{v}_2^k, n^k$ вводятся в узловых точках срединной поверхности элемента, а базисные орты $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ строятся в точках интегрирования по объему элемента. Введем вектор, составленный из компонент тензора деформаций в слое (компонента \hat{e}_{33} исключается из рассмотрения вследствие предположения о равенстве нулю соответствующей компоненты тензора напряжений): $\hat{e} = [\hat{e}_{11}, \hat{e}_{22}, 2\hat{e}_{12}, 2\hat{e}_{13}, 2\hat{e}_{23}]^T$ (индекс Λ обозначает компоненты соответствующего вектора или тензора в системе координат слоя). Пусть Q — матрица преобразования вектора, составленного из компонент тензора дефор-

маций в декартовой системе координат (x^1, x^2, x^3) , в вектор, составленный из компонент тензора деформаций в системе координат слоя $(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)$:

$$\hat{\mathbf{e}} = Q \mathbf{e}. \quad (2.6)$$

Элементы матрицы Q находятся с помощью обычных правил преобразования компонент тензоров из одной системы координат в другую. Подставляя (2.5) в (2.6), получим $\hat{\mathbf{e}} = \hat{B} \mathbf{u}^e$, $\hat{B} = QB$.

Введем вектор, составленный из компонент тензора напряжений $\hat{\sigma}_i$ в системе координат слоя $(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)$ (предполагается выполнение равенства $\hat{\sigma}_{33} = 0$ вследствие принятой статической гипотезы): $\hat{\sigma} = [\hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{22}, 2\hat{\sigma}_{12}, 2\hat{\sigma}_{13}, 2\hat{\sigma}_{23}]^T$. Определяющие соотношения линейного изотропного упругого тела записываются в виде $\hat{\sigma} = \hat{D} \hat{\mathbf{e}}$, где матрица [5]

$$\hat{D} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{k}(1 - \nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{k}(1 - \nu)/2 \end{bmatrix}.$$

Здесь E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; \hat{k} — корректирующий множитель. Прямое использование кинематической гипотезы Тимошенко в случае упругого деформирования приводит к линейному распределению напряжений по толщине оболочки. Это обстоятельство вступает в противоречие с тем, что сдвиговые компоненты напряжений $\hat{\sigma}_{13}$, $\hat{\sigma}_{23}$ должны быть равны нулю на лицевых поверхностях оболочки. Последнее условие можно выполнить при параболическом законе распределения этих сдвиговых компонент напряжений по толщине оболочки. Параболический закон распределения сдвиговых компонент напряжения выполняется в энергетическом смысле при использовании корректировочного множителя $\hat{k} = 5/6$ [5]. В настоящей работе используется это значение множителя \hat{k} . В соответствии со стандартной техникой МКЭ матрица жесткости конечного элемента оболочки определяется по формуле [5, 6]

$$C^e = \int_{V^e} \hat{B}^T \hat{D} \hat{B} dV \quad (2.7)$$

(V^e — объем конечного элемента).

Из (2.1) и (2.3) получаем связь $\mathbf{u} = H \mathbf{u}^e$, где элементы матрицы H имеют вид

$$H = \left[\begin{array}{c|ccc|cc|c} & h_k & 0 & 0 & nh_k g_{11}^k & nh_k g_{21}^k & \\ \dots & 0 & h_k & 0 & nh_k g_{12}^k & nh_k g_{22}^k & \dots \\ & 0 & 0 & h_k & nh_k g_{13}^k & nh_k g_{23}^k & \end{array} \right].$$

Здесь $g_{1i}^k = -(a_k/2)V_{2i}^k$; $g_{2i}^k = (a_k/2)V_{1i}^k$.

В соответствии со стандартной техникой МКЭ запишем совместную матрицу масс элемента [5, 6]

$$M^e = \int_{V^e} H^T H \rho_s dV \quad (2.8)$$

(ρ_s — массовая плотность материала оболочки).

Интегрирование матриц жесткости (2.7) и матриц масс (2.8) по объему элементов проводится численно с помощью квадратурных формул Гаусса — Лежандра. Интегрирование матриц жесткости элементов можно проводить с полным порядком, с уменьшенным порядком или применять правило раздельного интегрирования мембранных и сдвиговых

членов [5, 6]. Полный порядок интегрирования зависит от степени используемых интерполяционных полиномов $h_k(r^1, r^2)$. Например, при применении полной биквадратичной аппроксимации геометрии и вектора неизвестных перемещений в срединной поверхности элемента ($K = 9$) и линейной аппроксимации по толщине элемента (линейная аппроксимация по толщине элемента совместна с кинематической гипотезой Тимошенко) полный порядок интегрирования матрицы жесткости по координатам r^1, r^2, n с помощью квадратурных формул Гаусса — Лежандра равен $3 \times 3 \times 2$ [6]. При этом общее число точек интегрирования в элементе 18. При уменьшенном порядке интегрирования используются $2 \times 2 \times 2$ квадратурные точки. При раздельном интегрировании матрицы жесткости 9-узлового конечного элемента мембранные члены интегрируются с порядком $3 \times 3 \times 2$, а сдвиговые — с порядком $2 \times 2 \times 2$. При использовании уменьшенного и раздельного порядков интегрирования матриц жесткости элементов получим более быструю сходимость к точному решению для тонких оболочек, чем при использовании полного порядка интегрирования [5, 6]. Однако их применение не всегда возможно вследствие появления нефизичных нулевых собственных мод, и такое интегрирование можно проводить не для всяких граничных условий закрепления оболочки.

Суммируя по обычной процедуре [5, 6] матрицы жесткости и матрицы масс элементов, получим глобальные матрицу жесткости C и матрицу масс M всего конечно-элементного ансамбля.

3. Определение гидродинамических нагрузок на лопасти. Рассмотрим в декартовой системе координат (x^1, x^2, x^3) кольцевую решетку N лопастей, колеблющихся в идеальной несжимаемой жидкости между двумя бесконечными соосными круговыми цилиндрами C_1 и C_2 радиусов R_1 и R_2 . Ось x^1 направлена по оси цилиндров. Предположим, что на бесконечном удалении от решетки жидкость покоится, а обтекание лопастей происходит без отрыва. По условию задачи лопасти решетки должны быть достаточно тонкими, поэтому для определения гидродинамических нагрузок их моделируем бесконечно тонкими поверхностями S_n ($n = 1, 2, \dots, N$), совпадающими со срединными поверхностями рассматриваемых лопастей.

Так как амплитуда колебаний мала, то течение жидкости будет потенциальным, и для его описания можно ввести функцию Φ , связанную с потенциалом скорости жидкости φ соотношением $\varphi = iR_2^2\omega\Phi(\mathbf{x})e^{i\omega t}$, $\mathbf{x} = [x^1, x^2, x^3]^T$.

Функция Φ удовлетворяет уравнению Лапласа всюду вне лопастей, граничным условиям непротекания на поверхностях S_n и цилиндрах C_1 и C_2 и условиям затухания возмущений вдали от решетки. В силу того что передняя и задняя кромки лопастей находятся в одинаковых условиях, решение задачи ищем в классе бесциркуляционных течений. Вихревая пелена за лопастями не образуется, так как циркуляция скорости жидкости по любому контуру, охватывающему лопасть в радиальном сечении, равняется нулю.

Для решения задачи заменим лопасти решетки S_n и цилиндры C_1 и C_2 вихревыми поверхностями и введем ротор скорости на поверхности S_n в виде $\gamma = \mathbf{n} \times [\mathbf{v}]$, где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности; $[\mathbf{v}]$ — скачок скорости при переходе через S_n . Скорость течения жидкости, индуцируемая этими вихрями, может быть определена по формуле Био — Савара:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \nabla\Phi = - \int_{S_n} \gamma \times \nabla_{\mathbf{y}} G dS, \quad G = 1/(4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|).$$

Здесь $\mathbf{y} = [y^1, y^2, y^3]^T$ — вектор положения точки на поверхности S_n ; $\nabla_{\mathbf{y}} G$ — градиент функции G , вычисленный по \mathbf{y} . Здесь и ниже величины, имеющие размерность длины, относим к радиусу внешнего цилиндра R_2 . Условие непротекания дает систему интегральных уравнений относительно вектора γ . Затухание возмущенных скоростей вдали от решетки происходит за счет выбора фундаментального решения G . В силу того что

колебания лопастей происходят с постоянным сдвигом фаз и возмущения затухают вдали от решетки, достаточно рассматривать части поверхностей цилиндров C_1 и C_2 длины L по оси x^1 и $2\pi/N$ по угловой координате в плоскости $x^1 = \text{const}$. Бесциркуляционность течения жидкости будет обеспечена при переходе к дискретному аналогу рассматриваемой задачи. Полученная система интегральных уравнений решается методом дискретных вихрей, причем в качестве основного дискретного элемента выбирается замкнутая трапециевидная вихревая рамка, вдоль сторон которой циркуляции равны и постоянны по величине, а их сумма равна нулю [9]. Для расчета бесциркуляционного обтекания плоских крыльев конечного размаха метод вихревых рамок описан в [10]. Так как вдоль одной стороны рамки циркуляция Γ постоянна, то

$$\gamma dS = \Gamma \frac{\partial y}{\partial s} ds$$

(s — переменная вдоль этой линии). В данном случае интегралы вдоль сторон вычисляются аналитически. Для кольцевой решетки удобно ввести два направления, лежащих в касательной плоскости к рассматриваемой поверхности (лопастей или цилиндров):

- 1) в направлении радиуса r ,
- 2) по касательной τ к линии сечения лопасти при $r = \text{const}$.

Вихревая рамка Π_{k_i} с циркуляцией $\Gamma_{k_i} = \Gamma(\mathbf{x}_{k_i}^0)$ ($\mathbf{x}_{k_i}^0$ — вектор положения середины вихревого отрезка $[A_{k,i}; A_{k+1,i}]$) состоит из вихревых отрезков $[A_{k,i}; A_{k+1,i}]$, $[A_{k+1,i}; A_{k+1,i+1}]$, $[A_{k+1,i+1}; A_{k,i+1}]$, $[A_{k,i+1}; A_{k,i}]$ ($k = \overline{1, N_1}$, $i = \overline{1, N_2}$, N_1 — число разбиений по r , а N_2 — по τ). На рис. 3 цифры 1 и 2 обозначают соответственно контрольные точки и точки, в которых вычисляется перепад давления, а 3 — узлы конечного элемента.

Тогда компонента γ_r вектора γ (интенсивность присоединенных вихрей), необходимая в дальнейшем при определении перепада давления на лопасти, имеет вид $\gamma_r(\mathbf{x}_{k_i}^0) = (\Gamma_{k_i} - \Gamma_{k,i-1})/\delta\tau$, так как отрезок $[A_{k,i}; A_{k+1,i}]$ входит в состав соседних вихревых рамок $\Pi_{k,i-1}$ и Π_{k_i} с разными знаками циркуляций. Здесь $\delta\tau$ — ширина вихревой рамки. При этом, так как обтекание бесциркуляционное, полагаем, что циркуляции вихревых рамок на задней кромке лопасти равны нулю.

На основе изложенного определение циркуляций вихревых рамок лопасти $\Gamma = \{\Gamma_{k_i}\}$ и цилиндров $\Gamma_1 = \{\Gamma_{1mn}\}$ сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений: $W(\mathbf{x}, \mathbf{x})\Gamma + W_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})\Gamma_1 = \mathbf{F}$, $W(\mathbf{y}, \mathbf{x})\Gamma + W_1(\mathbf{y}, \mathbf{y})\Gamma_1 = 0$. Здесь \mathbf{x} и \mathbf{y} — векторы положения точки на лопасти решетки и на цилиндрах C_1 и C_2 ; W — матрица нормальных составляющих скоростей, индуцированных вихревыми рамками лопасти с единичной циркуляцией в точках лопасти ($W(\mathbf{x}, \mathbf{x})$) или в точках, расположенных на цилиндрах C_1 и C_2 ($W(\mathbf{y}, \mathbf{x})$); W_1 — аналогичная матрица для нормальных скоростей от вихревых рамок, моделирующих влияние цилиндров C_1 и C_2 , в точках лопасти ($W_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$) и цилиндров ($W_1(\mathbf{y}, \mathbf{y})$); \mathbf{F} — вектор амплитуды нормальной составляющей скорости колебаний лопасти. Умножая второе уравнение системы слева на $W_1^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{y})$ и подставляя найденный вектор Γ_1 в первое уравнение, найдем циркуляции вихревых рамок лопасти: $\Gamma = T^{-1}\mathbf{F}$, $T = W(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - W_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})[W_1^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{y})W(\mathbf{y}, \mathbf{x})]$. Отметим, что указанный алгоритм более эффективен, если при определении скоростей, индуцированных вихревыми рамками лопастей в точках цилиндров, провести их отражение относительно цилиндров C_1 и C_2 в каждом сечении $x^1 = \text{const}$.

Для определения нестационарных гидродинамических нагрузок используется теорема Жуковского в малом для бесциркуляционного течения, согласно которой перепад давления определяется формулой

$$[p] = \rho_f \frac{\partial \Gamma_c}{\partial t}, \quad \Gamma_c = \int_{C(M)} \mathbf{n} \times \gamma d\mathbf{x},$$

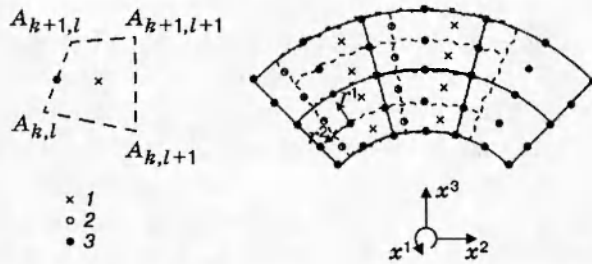


Рис. 3

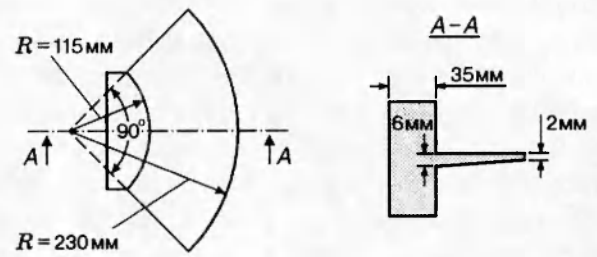


Рис. 4

где $[p] = p_- - p_+$; ρ_f — массовая плотность жидкости. Линия $C(M)$ проведена на вихревой поверхности лопасти от передней кромки до точки M , в которой определяется перепад давления.

Дискретный аналог этих соотношений имеет вид

$$p_{jm} = \sum_{k=1}^m g_{jk}, \quad g_{j1} = \Gamma_{j1}, \quad g_{jN_2} = -\Gamma_{j,N_2-1},$$

$$g_{jk} = \Gamma_{jk} - \Gamma_{j,k-1} \quad \text{при} \quad k \neq 1, k \neq N_2 \quad (j = \overline{1, N_1}, \quad m = \overline{1, N_2}).$$

Здесь p_{jm} — перепад давления в серединах присоединенных вихрей вихревых рамок. В этих формулах учтено, что циркуляции вихревых рамок на левой и правой кромках лопасти обращаются в нуль.

4. Алгоритм решения задачи на собственные значения. Решение соответствующей гидродинамической задачи методом интегральных уравнений, кроме преимуществ, отмеченных выше, создает трудности для определения матриц A_j , так как базисные функции упругих деформаций лопасти отвечают МКЭ. Для построения матриц A_j в этом случае потребовалось бы решить соответствующую гидродинамическую задачу при различных линейно независимых между собой формах колебаний лопастей столько раз, сколько конечных элементов берется для описания деформации лопасти в целом. Особенность предлагаемого алгоритма состоит в том, что применение метода итераций для решения задачи на собственные значения позволяет избежать вычисления матриц A_j в явном виде. В самом деле, матрица входит в уравнение (1.2) лишь в виде ее произведения на вектор \mathbf{X}_j , которое представляет собой вектор гидродинамической нагрузки на лопасть $\mathbf{P}_j = A_j \mathbf{X}_j$. На n -м шаге итерационного процесса, описанного ниже, этот вектор определяется с помощью решения гидродинамической задачи, сформулированной в п. 3, при заданной форме колебаний, найденной на предыдущем шаге. Непосредственно из решения указанной гидродинамической задачи находим перепад гидродинамического давления $[p_j]$ на срединной поверхности лопасти. Вектор нагрузки $\bar{\mathbf{F}}_j^e$, действующей на конечный элемент со срединной поверхностью S^e , связан с перепадом давления на нем соотношением

$$\mathbf{P}_j^e = \int_{S^e} [p_j] \mathbf{H}^T \mathbf{n} dS \quad (4.1)$$

(\mathbf{H} — матрица, определенная в п. 2). Глобальный вектор \mathbf{P}_j получается по обычному правилу суммирования [6] векторов узловых нагрузок всех элементов.

При численном интегрировании в (4.1) применялись квадратурные формулы Гаусса — Лежандра. Так как сетка точек в квадратурных формулах не совпадает с сеткой расчетных точек в методе интегральных уравнений, то приходилось проводить интерполяцию для получения перепада давления в нужных точках. При этом использовалась линейная интерполяция, так как функция перепада давления не обладает нужной гладкостью вбли-

зи передней и задней кромок. Взаимное расположение конечных элементов и вихревых рамок показано на рис. 3.

В качестве начального приближения брались собственные формы колебаний лопастей в пустоте. Экспериментальные и расчетные данные свидетельствуют о том, что собственные формы колебаний лопастей в жидкости низших трех тонов близки к соответствующим формам колебаний лопастей в пустоте. Поэтому сходимость итерационного процесса очень хорошая (что подтвердили расчеты). Так как формы колебаний лопастей низших тонов имеют малое число узловых линий, то для решения гидродинамической задачи при итерационном способе можно обойтись сравнительно малым числом вихревых рамок.

Итерационный процесс строится следующим образом. С помощью разложения Холецкого [6] для матрицы жесткости $C = LL^T$ (L – нижняя треугольная матрица) проведем преобразование уравнения (1.2):

$$[\eta_j J - L^{-1}(M + A_j)(L^T)^{-1}]Y_j = 0$$

($\eta_j = 1/\lambda_j$, $Y_j = L^T X_j$, J — единичная матрица), в результате которого получим задачу на собственные значения для эрмитовой матрицы:

$$G_j = L^{-1}(M + A_j)(L^T)^{-1}. \quad (4.2)$$

Согласно [11], первое собственное значение η_{1j} матрицы G_j можно определить методом прямых итераций вида

$$Y_j^{n+1} = G_j Y_j^n / \|Y_j^n\|_\infty, \quad (4.3)$$

где $\| \cdot \|_\infty$ — норма в l_∞ , т. е. максимальный по модулю элемент вектора. С учетом (4.2) соотношение (4.3) преобразуется:

$$Y_j^{n+1} = [L^{-1}M(L^T)^{-1}Y_j^n + L^{-1}P_j^n] / \|Y_j^n\|_\infty. \quad (4.4)$$

Здесь матрица A_j не содержится. В качестве начального приближения процесса (4.4) берется собственный вектор колебаний лопасти в пустоте, который определяется методом итераций в подпространстве [6].

Согласно [11], этот итерационный процесс сходится так, что $Y_j^n / \|Y_j^n\|_\infty \rightarrow Y_j / \|Y_j\|_\infty$, $\|Y_j^n\|_\infty \rightarrow \eta_{1j}$ при $n \rightarrow \infty$. Скорость сходимости определяется отношением η_{1j}/η_{2j} . Таким образом, если собственные значения η_{2j} и η_{1j} близки, то скорость сходимости медленная. Ее можно улучшить с помощью сдвига, при этом матрица $F_j = G_j - \zeta J$ имеет собственные значения $\eta_{1j} - \zeta$, $\eta_{2j} - \zeta, \dots$ и те же собственные векторы, что и матрица G_j . Сдвиг выбирается так, чтобы $\eta_{2j} - \zeta$ оставалось максимальным по модулю собственным значением и в то же время отношение (4.3) для матрицы F_j было меньшим. Для определения следующих собственных значений применяется метод исчерпывания с помощью унитарных преобразований [11].

5. Численная реализация алгоритма и сравнение результатов расчета с экспериментальными данными. Для численной реализации алгоритма решения поставленной задачи составлена программа расчета собственных частот и форм колебаний лопастей в жидкости (в предположении об их абсолютно жесткой заделке) на персональном компьютере IBM PC/AT/486. Эта специализированная вычислительная программа создана на базе вычислительного комплекса PIONER. В процессе отладки программы дополнительные трудности возникли при подборе тестовых примеров, которые имели бы надежную исходную информацию и достоверные результаты определения искомых величин, а также в достаточной мере отражали бы общность поставленной задачи. Наиболее подходящими с этой точки зрения авторы сочли экспериментальные данные, полученные на ПО «Ленинградский металлический завод» при исследовании частот и форм собственных колебаний секториальной пластины переменной толщины в воздухе и воде [12] и лопасти

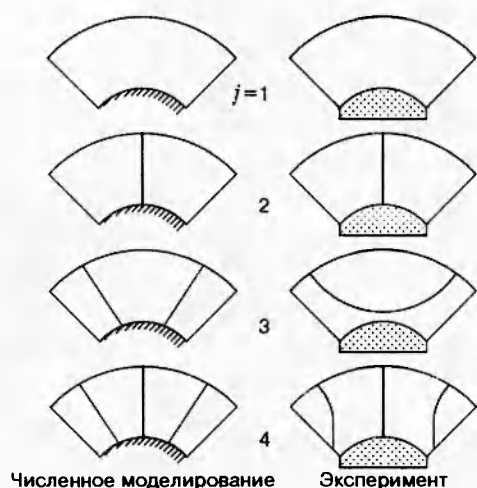


Рис. 5

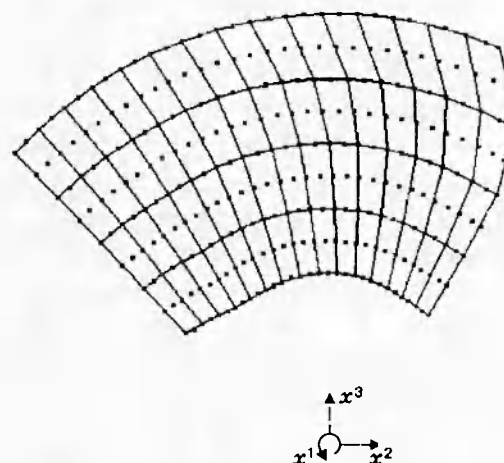


Рис. 6

ПЛ 587В, которые были любезно предоставлены В. А. Коваленко и А. П. Никифоровым. Испытания проводились резонансным методом. Образец в виде пластины переменной толщины (его размеры приведены на рис. 4) закреплялся в массивном корпусе, который подвешивался на резиновой мембране к жесткому кронштейну. Концентрично периферийному сечению образца была установлена цилиндрическая оболочка, имитирующая натурную камеру рабочего колеса. Возбуждающее усилие прикладывалось к корпусу с закрепленным в нем образцом и было направлено по оси подвески. Формы колебаний определялись по фигурам Лиссажу. Опыты в воде проводились с различным уровнем воды. Анализ полученных данных показал, что при слое воды свыше 75 мм собственная частота образца не изменяется.

В табл. 1, 2 приведены расчетные значения собственных частот $f = \omega/2\pi$ секторальной пластины в пустоте и воде соответственно, полученные для различного числа конечных элементов на лопасти, и их экспериментальные значения (вторая форма колебаний в жидкости экспериментально не зафиксирована). Формы колебаний пластины в воде практически не отличались от соответствующих форм колебаний в воздухе как в расчете, так и в эксперименте. На рис. 5 показаны узловые линии (линии нулевого смещения) первых четырех форм колебаний пластины. Видно, что расчетные значения собственных частот, за исключением 1-го тона, несколько выше, чем экспериментальные.

Проведены также расчеты собственных частот и форм колебаний лопастей для модели гидротурбины ПЛ 587В. При этом исходные данные для расчета снимались с математи-

Таблица 1

Номер тона	$f, \text{Гц}$			
	Расчет			Эксперимент
	4x6 элементов	4x9 элементов	4x12 элементов	
1	408	412	414	416
2	443	446	444	402
3	566	574	570	514
4	827	815	798	714

Таблица 2

Номер тона	$f, \text{Гц}$			
	Расчет			Эксперимент
	4x6 элементов	4x9 элементов	4x12 элементов	
1	140	144	145	159
2	212	212	209	—
3	329	320	314	277
4	545	450	486	420

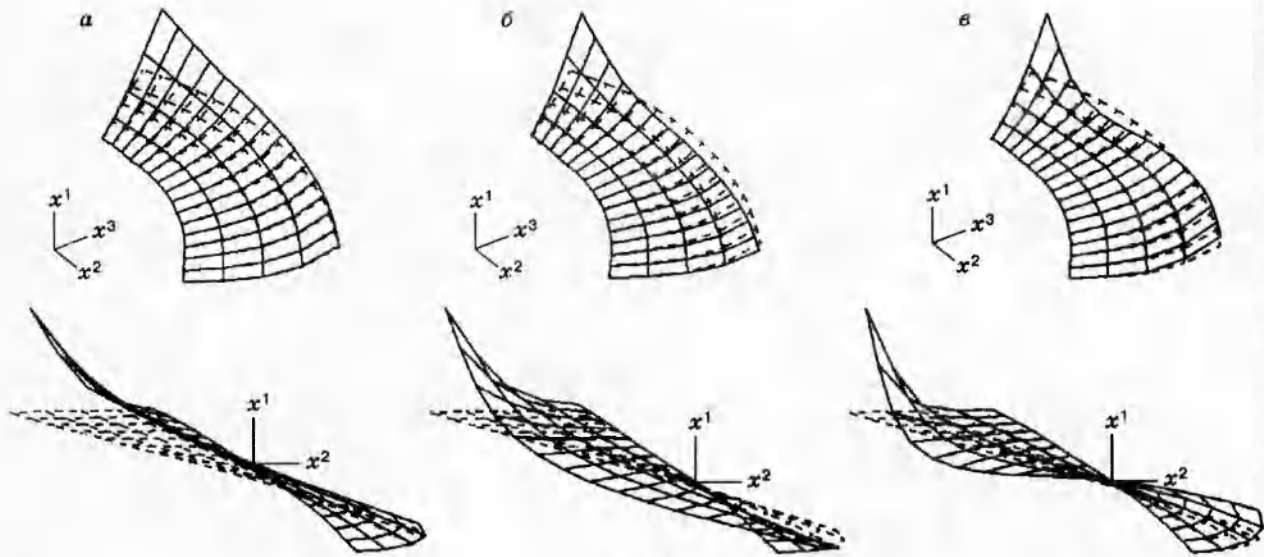


Рис. 7

ческой модели лопасти, созданной в Институте математики СО РАН. Конечно-элементная модель лопасти представлена на рис. 6. В табл. 3 приведены собственные частоты колебаний для одной лопасти, закрепленной во втулке (расчетные и экспериментальные значения). Некоторое отличие расчетных частот и форм колебаний от экспериментальных, по-видимому, связано с тем, что в расчетной модели (как для лопасти, так и для секториальной пластины) не учтена упругость заделки.

Как и для секториальной пластины, первые три формы колебаний (рис. 7, а-в соответственно) лопасти в пустоте и воде практически не отличаются друг от друга (штриховая линия — исходное положение лопасти, а сплошная — деформированное состояние). Так как собственные формы определяются с точностью до постоянного множителя, то этот множитель берется достаточно большим для лучшего представления деформированной конструкции на рис. 7.

В табл. 4 даны расчетные значения собственных частот для той же модели, но для решетки лопастей с различным углом установки и для сдвигов фазы $\mu = 0$ и π . При этом $\alpha = 0$ соответствует рабочему положению лопасти в решетке, $\alpha = \pm 10^\circ$ — повороту от исходного положения вокруг оси поворота лопасти. Полученные результаты свидетельствуют о том, что сдвиг фазы оказывает большее влияние, особенно на первую частоту, чем угол установки.

Численный эксперимент показал хорошую сходимость итерационного процесса при

Таблица 3

Номер тона	f, Гц			
	В пустоте		В воде	
	Расчет	Эксперимент	Расчет	Эксперимент
1	789	705-761	456	408-498
2	1065	880-1068	705	612-770
3	1525	1412-1496	1124	957-1066

Таблица 4

Номер тона	f, Гц					
	$\alpha = -10^\circ$		$\alpha = 0$		$\alpha = 10^\circ$	
	$\mu = 0$	$\mu = \pi$	$\mu = 0$	$\mu = \pi$	$\mu = 0$	$\mu = \pi$
1	467	448	471	448	473	448
2	709	700	714	700	716	699
3	1121	1122	1124	1122	1126	1122

вычислении собственных частот и форм колебаний. В рассмотренных примерах число итераций зависело от номера тона и не превышало пяти. Итерационный процесс продолжался до тех пор, пока относительная погрешность вычисления собственного вектора не становилась меньше 0,001. Время расчета трех низших мод составляет примерно 30 мин на компьютере IBM PC/AT/486 (40 МГц).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01220-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Горелов Д. Н., Гусева Л. А. Колебания лопастей осевых гидротурбин в потоке жидкости // Аэроупругость турбомашин: Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1980. С. 81–89.
2. Науменко В. В., Сацук В. Г., Стрельникова Е. А., Симоненко В. А. Метод дискретных особенностей в задачах о свободных колебаниях лопастей гидротурбин в идеальной несжимаемой жидкости // Тез. докл. III Всесоюз. симпоз. «Метод дискретных особенностей в задачах математической физики и его роль в развитии численного эксперимента на ЭВМ». Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1987. С. 131–132.
3. Sundqvist J. An application of ADINA to the solution of fluid-structure interaction problems // Computers and Structures. 1983. V. 17, N 5–6. P. 793–807.
4. Горелов Д. Н., Курзин В. Б., Сарен В. Э. Аэродинамика решеток в нестационарном потоке. Новосибирск: Наука, 1971.
5. Zienkiewicz O., Taylor R. The Finite Element Method (4th. ed.). London: McGraw-Hill, 1990.
6. Bathe K. J. Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Englewood Cliffs. New Jersey: Prentice — Hall, 1982.
7. Коробейников С. Н. Геометрически нелинейный анализ оболочек с учетом больших приращений поворотов // Моделирование в механике: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; ИТПМ. 1990. Т. 4, № 4. С. 119–126.
8. Korobeinikov S. N., Agapov V. P., Bondarenko M. I., Soldatkin A. N. The general purpose nonlinear finite element structural analysis program PIONER // Proc. Int. Conf. on Numerical Methods and Applications, Sofia, 1988. Sofia: Publ. House of the Bulg. Acad. Sci., 1989. P. 228–233.
9. Рябченко В. П. Расчет присоединенных масс кольцевой решетки лопастей произвольной конфигурации методом дискретных вихрей // Аэроупругость лопаток турбомашин / Тр. ЦИАМ. № 1293. 1991. Вып. 6. С. 79–86.
10. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985.
11. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.
12. Коваленко В. А., Явиц С. Н., Виноградов В. Г. Экспериментальное исследование частот и форм собственных колебаний секторной пластины переменной толщины в воздухе и воде // Техн. информация № 985. Л.: ПО Турбостроения ЛМЗ, 1980.

*Поступила в редакцию 31/VIII 1995 г.,
в окончательном варианте — 21/XII 1995 г.*