

ЛИТЕРАТУРА

1. Тоe n n i e s J. P., G r e e n E. F. Dissociation Energies of Carbon Monoxide, Nitrogen from Reflected Shock Wave studies. J. Chem. Phys., 1955, v. 126, No. 3, p. 655.
2. С т р е л о в Р., К о э н А. Ограничение методики отраженной ударной волны при изучении быстрых химических реакций. Сб. «Ударные трубы», Изд. иностр. лит., 1961.
3. З а й ц е в С. Г., С о л о у х и н Р. И. К вопросу о воспламенении адиабатически нагретой газовой смеси. Докл. АН СССР, 1958, т. 122, № 6.
4. З а й ц е в С. Г. Об измерении быстро меняющихся давлений в газовой среде. ПТЭ, 1958, № 6.
5. A l p h e r R., W h i t e D. Optical Refractivity of High-Temperature Gases. Phys. Fluids, 1959, v. 2, p. 153—169.
6. Г р и ф ф и т В. Ц. Основные результаты экспериментов на ударных трубах. Сб. под ред. А. Ферри, стр. 265.
7. Z i e n k i e w i c z H., J o h a n n e s e n N., G e r r a r d J. Further results on the over all density ratios of shock Waves in carbon dioxide. J. Fluid Mech., 1963, v. 17, p. 2.
8. G a n d o n A. G., H u r l e I. R. Measurement of Times of Vibrational Relaxation and dissociation behind Shoch Waves in N_2O_2 , air, CO, CO_2 and H_2 . Eight Symposium (international) on combustion. Pasadena California. August 28—September 3, 1959.
9. B l a c k m a n V. Vibrational relaxation on oxygen and nitrogen. J. Fluid Mech., 1956, vol. 1, No. 1.
10. M i l l i k a n R., W h i t e D. Vibrational Energy Exchange between N_2 and CO. J Chem. Phys., 1963, v. 39, No. 1, p. 98.
11. H u b e r P., K a n t r o w i t z A. Heat Capacity Lag Measurements in Various Gases. J. Chem. Phys., 1947, vol. 15, No. 5, p. 275.
12. L u k a s i c S., V o u n g J. Vibrational Relaxation Times in Nitrogen. J. Chem. Phys., 1957, vol. 27, No. 5, p. 1149.

ВЛИЯНИЕ РЕЛАКСАЦИИ НА РАСПАД ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА

В. Н. Архипов

(Москва)

После мгновенного разрушения цилиндрической или сферической оболочки, первоначально отделяющей газ под высоким давлением от окружающей газовой среды с меньшим давлением (а также после мгновенного разрушения диафрагмы в ударной трубе), происходит процесс выравнивания давлений. При этом в газе с меньшим давлением возникает бегущая (цилиндрическая, сферическая или плоская) ударная волна, а в газе высокого давления возникает центрированная волна разрежения. Газ, нагретый ударной волной, и газ, охлажденный волной разрежения, разделяются движущейся контактной поверхностью (цилиндрической, сферической или плоской). Известно [1], что в сферическом и цилиндрическом случаях через некоторое время после начала процесса в газе, прошедшем через волну разрежения, возникает вторичная ударная волна, движущаяся в направлении, противоположном направлению первой; в плоском случае такая волна не наблюдается. Здесь будет рассмотрено течение в начале процесса, когда вторичная ударная волна еще не образовалась.

Так как процесс сопровождается образованием ударной волны, большое влияние на параметры возникшего течения может оказать наличие релаксации за ударной волной.

Ниже рассмотрено влияние колебательной релаксации на течение газа в начале процесса.

1. **Постановка задачи.** Пусть r_0 — радиус оболочки (для ударной трубы r_0 — длина камеры высокого давления). Разрушение оболочки (диафрагмы) происходит в момент времени $t = 0$. Считаем, что во фронте бегущей ударной волны поступательные и вращательные степени свободы приходят в равновесие, а за фронтом ударной волны (до контактной поверхности) происходит колебательная релаксация. Релаксацию за контактной поверхностью и химические реакции во всей области течения считаем отсутствующими. Газ можно разделить на четыре области: область 1 — между ударным фронтом и контактной поверхностью, область 2 — между контактной поверхностью и центрированной волной разрежения, область 3 — центрированная волна разрежения и область 4 — невозмущенный газ высокого давления. Течение описывается следующими

уравнениями в безразмерных координатах:

$$\begin{aligned} \gamma_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma_0 u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{n \rho u}{r} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{u}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad p = \rho T \end{aligned} \quad (1.1)$$

Кроме того

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial t} + u \frac{\partial E_k}{\partial r} = \frac{E - E_k}{\tau}, \quad E = \frac{R \theta T_0}{\exp(\theta/T) - 1} \quad (\tau = \text{const}) \quad (1.2) \\ h = \frac{7}{2} \frac{p}{\rho} + E_k \quad \text{для области 1,} \quad h = \frac{5}{2} \frac{p}{\rho} \quad \text{для областей 2 и 3} \end{aligned}$$

Здесь в качестве характерных величин выбраны отрезок r_0 и p_0 , ρ_0 , T_0 , a_0 — давление, плотность, температура и скорость звука в невозмущенной области перед ударной волной; энтальпия h и энергии E , E_k отнесены к величине p_0 / ρ_0 , θ — характерная для данного газа температура, $n = 0, 1, 2$ для плоского, цилиндрического и сферического случая соответственно.

Система (1.1) обладает двумя семействами характеристик

$$(dr/dt)_{\pm} = u \pm a_f \quad (1.3)$$

вдоль которых выполняются условия

$$\gamma_0 a_f \left(\frac{du}{dt} \right)_{\pm} \pm \left(\frac{dp}{dt} \right)_{\pm} = \pm \frac{2\gamma_0 \rho^2 a_f^2 (E_k - E)}{7p\tau} \mp \frac{\gamma_0 n \rho u a_f^2}{r} \left(a_f^2 = \frac{\gamma_f p}{\gamma_0 \rho} \right) \quad (1.4)$$

Здесь a_f — «замороженная» скорость звука ($\gamma_f = \gamma_0 = 7/5$ — для области 1, $\gamma_f = \gamma_4$, $\tau = \infty$ — для областей 2, 3, 4).

Вдоль линий тока $dr/dt = u$ выполняются условия

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{E - E_k}{\tau}, \quad \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} \quad (1.5)$$

(первое условие — только в области 1).

На ударном фронте выполняются условия

$$u = \frac{2}{\gamma_0 + 1} (U + U^{-1}), \quad p = \frac{1}{\gamma_0 + 1} (2\gamma_0 U^2 - \gamma_0 + 1), \quad \rho = \frac{(\gamma_0 + 1) U^2}{(\gamma_0 - 1) U^2 + 2} \quad (1.6)$$

где U — безразмерная скорость ударного фронта, а на контактной поверхности — условия равенства предельных значений давлений и скоростей при подходе к ней с обеих сторон.

Уравнение характеристики, отделяющей область 4 от области 3, есть

$$\frac{r-1}{t} = -a_4 \quad (1.7)$$

где a_4 — безразмерная скорость звука в области 4. На этой прямой

$$p = p_4, \quad \rho = \rho_4, \quad T = T_4, \quad u = 0$$

2. Начальные условия. Введем новые переменные $y = (r-1)/t$, t . Уравнения (1.1), (1.2) для области 1 примут вид

$$\begin{aligned} \gamma_0 t \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma_0 (u-y) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ t \frac{\partial \rho}{\partial t} + (u-y) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{n \rho u t}{ty+1} = 0 \\ t \frac{\partial p}{\partial t} + (u-y) \frac{\partial p}{\partial y} - \gamma_0 t a_f^2 \frac{\partial p}{\partial t} - \gamma_0 (u-y) a_f^2 \frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{2\gamma_0 a_f^2 t \rho^2 (E - E_k)}{7p\tau} \\ t \frac{\partial E_k}{\partial t} + (u-y) \frac{\partial E_k}{\partial y} = \frac{t(E - E_k)}{\tau} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Уравнения для областей 2 и 3 получаются, если в (2.1) положить $\tau = \infty$, $E_k = 0$.
В пределе при $t \rightarrow 0$ из системы (2.1) получим систему

$$\begin{aligned} \gamma_0 (u^\circ - y) \frac{du^\circ}{dy} + \frac{1}{\rho^\circ} \frac{dp^\circ}{dy} &= 0, \\ (u^\circ - y) \frac{d\rho^\circ}{dy} + \rho^\circ \frac{du^\circ}{dy} &= 0, \quad \frac{dp^\circ}{dy} - a_f^{\circ 2} \frac{d\rho^\circ}{dy}, \quad E_k^\circ = 0, \quad f^\circ = f(y, 0) \end{aligned} \quad (2.2)$$

которая описывает течение в плоском случае (как в ударной трубе) при постоянном γ . Таким образом, начальные условия нечувствительны к геометрическим условиям и являются «замороженными».

Решение системы (2.2) можно записать в следующем виде [2]. Для области 3 ($-a_4 \leq y \leq y_0$)

$$y = u^\circ - x_f^\circ, \quad u^\circ = \frac{2(y+a_4)}{\gamma_4 + 1}, \quad \left(\frac{p^\circ}{p_4}\right)^\omega = \left(\frac{\rho^\circ}{\rho_4}\right)^\kappa = 1 - \frac{y+a_4}{2\lambda a_4} \quad (2.3)$$

Для областей 2 ($y_c \leq y \leq y_2$) и 1 ($y_2 \leq y \leq y_0$) имеем соответственно

$$\begin{aligned} u^\circ &= u_2, \quad p^\circ = p_2, \quad \rho^\circ = \rho_2, \quad a_f^\circ = a_{f2} \\ u^\circ &= u_1, \quad p^\circ = p_1, \quad \rho^\circ = \rho_1, \quad a_f^\circ = a_{f1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

причем $p_2 = p_1$, $u_2 = u_1$, а параметры с индексами 1 и 2 постоянны. Здесь

$$\begin{aligned} y_0^2 &= U_0^2 = \beta (1 + \alpha p_2), \quad y_2 = u_2 = u_1 = \frac{\bar{p}_2 - 1}{\gamma_0 U_0} \\ y_c &= a_4 \left\{ \frac{1}{\kappa} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_4}\right)^\omega \right] - \left(\frac{p_2}{p_4}\right)^\beta \right\}, \quad \omega = \frac{\gamma_4 - 1}{2\gamma_4}, \quad \kappa = \gamma_4 \omega \\ \beta &= \frac{\gamma_0 - 1}{2\gamma_0}, \quad 2\lambda = \frac{\gamma_4 + 1}{\gamma_4 - 1}, \quad \alpha = \frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0 - 1} \end{aligned}$$

а p_2 и p_1 связаны уравнением

$$\frac{p_2}{p_4} = \left[1 - (p_2 - 1) \left(\frac{\omega E_{04}}{\alpha p_2 + 1} \right)^{1/2} \right]^\varepsilon, \quad E_{04} = \frac{e_0}{e_4}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\omega}$$

где E_{04} — отношение внутренних энергий единицы массы невозмущенных газов.

Формулы (2.3), (2.4) дают систему начальных условий для уравнений (1.1), (1.2).

3. Решение для малых t . Решение системы (1.1), (1.2) для малых t будем искать в виде рядов

$$f(y, t) = f^\circ(y) + f'(y) t + \dots \quad (f^\circ(y) = f_t(y, 0), \dots, f' = u', \rho', p', E_k') \quad (3.1)$$

Систему уравнений для определения функций $f'(y)$ получим, продифференцировав уравнения (1.1), (1.2) по t и перейдя к пределу при $t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \gamma_0 u' \left(1 + \frac{du^\circ}{dy} \right) + \gamma_0 (u^\circ - y) \frac{du'}{dy} - \frac{1}{\rho^{\circ 2}} \rho' \frac{dp^\circ}{dy} + \frac{1}{\rho^\circ} \frac{dp'}{dy} &= 0 \\ \rho' + u' \frac{d\rho^\circ}{dy} + (u^\circ - y) \frac{d\rho'}{dy} + \rho' \frac{du^\circ}{dy} + \rho^\circ \frac{du'}{dy} + n\rho^\circ u^\circ &= 0 \\ p' + u' \frac{dp^\circ}{dy} + (u^\circ - y) \frac{dp'}{dy} - \gamma_0 a_f^{\circ 2} \rho' - \gamma_0 u' a_f^{\circ 2} \frac{d\rho^\circ}{dy} - & \\ - \gamma_0 (u^\circ - y) a_f^{\circ 2} \frac{d\rho^\circ}{dy} - \gamma_0 (u^\circ - y) a_f^{\circ 2} \frac{dp'}{dy} &= - \frac{2\gamma_0 \rho^{\circ 2} a_f^{\circ 2} E^\circ}{\gamma \rho^{\circ \tau}} \\ E_k' + (u^\circ - y) \frac{dE_k'}{dy} &= \frac{E^\circ}{\tau} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Эту систему можно решить лишь при $(u^\circ - y)^2 \neq a_f^{\circ 2}$, т. е. в областях 1 и 2. Здесь параметры f° постоянны, так что из системы выпадают слагаемые с df°/dy .

Решение системы (3.2) в областях 1 и 2 имеет вид

$$\begin{aligned} u' &= A_i y + B_i, & p' &= -\gamma_0 \rho^\circ (B_i + A_i u^\circ) y + C_i \\ \rho' &= -(n \rho^\circ u^\circ + A_i \rho^\circ) + D_i (u^\circ - y), & E_k' &= \frac{E^\circ}{\tau} + K (u^\circ - y) \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Индексы 1 и 2 относятся к областям 1 и 2 соответственно, f° — значения параметров потока в областях 1 и 2 при $t = 0$. Константы интегрирования A_i, B_i, C_i, D_i определяются из граничных условий, которые будут выведены ниже, а также должны подчиняться условиям

$$\begin{aligned} -\gamma_0 \rho_2 u_2 (B_2 + A_2 u_2) &= -C_2 - \gamma_0 a_{f_2}^2 (n \rho_2 u_2 + A_2 \rho_2) \\ -\gamma_0 \rho_1 u_2 (B_1 + A_1 u_2) &= -C_1 - \gamma_0 a_{f_1}^2 (n \rho_1 u_2 + A_1 \rho_1) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Константа K определяется из условия $E'(y_0) = 0$.

4. Решение в волне разрежения. Для того чтобы исследовать решение при малых t в области $-a_4 \leq y \leq y_c$, введем характеристические переменные ξ и η . Пусть ξ постоянно вдоль характеристик первого семейства и равно тому значению y , при котором в плоскости yt характеристика пересекает ось $t = 0$, а η постоянно вдоль характеристик второго семейства и равно тому значению r , при котором характеристика пересекает в плоскости rt характеристику (1.7). Тогда $-a_4 \leq \xi \leq u_2 - a_{f_2}$, $0 \leq \eta \leq 1$.

В характеристических переменных уравнения характеристик и условия вдоль характеристик запишутся в виде

$$\begin{aligned} r_\eta - (u - a_f) t_\eta &= 0, & \gamma_0 \rho a_f u_\eta - p_\eta &= \frac{\gamma_0 n \rho u a_f^2 t_\eta}{r} \\ r_\xi - (u + a_f) t_\xi &= 0, & \gamma_0 \rho a_f u_\xi + p_\xi &= -\frac{\gamma_0 n \rho u a_f^2 t_\xi}{r} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Граничные условия таковы

$$\begin{aligned} r(-a_4, \eta) &= \eta, & t(-a_4, \eta) &= -\frac{\eta - 1}{a_4}, & p(-a_4, \eta) &= p_4 \\ \rho(-a_4, \eta) &= \rho_4, & a_f(-a_4, \eta) &= a_4 \end{aligned} \quad (4.2)$$

При малых t в области $-a_4 \leq y \leq y_c$ будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} f(\xi, \eta) &= f^\circ(\xi) + f^{(1)}(\xi)(\eta - 1) + \dots \\ f^\circ(\xi) &= f^\circ(y), & f^{(1)}(\xi) &= f_\eta(\xi, 1), \dots \end{aligned}$$

Дифференцируя первое уравнение (4.1) по ξ , третье — по η и исключая из полученных уравнений $r_{\xi\eta}$, получим в пределе при $\eta \rightarrow 1$

$$2a_f^\circ t_\xi^{(1)} = t^{(1)}$$

Отсюда, так как согласно (2.3)

$$a_f^\circ = \frac{2a_4}{\gamma_4 + 1} - \frac{\xi}{2\lambda}$$

получим, с учетом граничного условия $t^{(1)}(-a_4) = 0$, что

$$t^{(1)} = -a_4^{\lambda-1} / a_f^{\circ\lambda}$$

Продифференцируем второе уравнение (4.1) по ξ , четвертое — по η , исключим из полученных уравнений $u_{\xi\eta}$ и перейдем к пределу при $\eta \rightarrow 1$. Получим

$$\begin{aligned} 2p_\xi^{(1)} + \gamma_0 (\rho^{(1)} a_f^\circ + \rho^\circ a_f^{(1)}) u_\xi - \gamma_0 (\rho^\circ a_f^\circ)_\xi &= \\ = - \left(\frac{\gamma_0 n \rho^\circ u^\circ a_f^{\circ 2}}{r} \right)_\xi t^{(1)} - 2\gamma_0 n \rho^\circ u^\circ a_f^{\circ 2} t_\xi^{(1)} \end{aligned}$$

Уравнение состояния и уравнение $p\rho^{-\gamma_4} = \text{const}$, справедливое при $-a_4 \leq y \leq y_c$, $t = 0$, дают

$$\rho^{(1)} = \frac{\rho^\circ}{\gamma_4 \rho^\circ} p^{(1)}, \quad a_f^{(1)} = \frac{\gamma_4 - 1}{2\gamma_0 \rho^\circ a_f^\circ} p^{(1)}$$

Переходя к пределу при $\eta \rightarrow 1$ во втором уравнении (4.1), имеем

$$\gamma_0 \rho^\circ a_f^\circ u^{(1)} = p^{(1)} + \gamma_0 n \rho^\circ u^\circ a_f^{\circ 2} t^{(1)}$$

так что для $p^{(1)}$ получаем дифференциальное уравнение

$$p_\xi^{(1)} + \frac{1}{a_f^\circ} p^{(1)} = \frac{1}{a_4^\lambda} \gamma_0 n \rho_4 a_f^{\circ \lambda} \left[\frac{2}{\gamma_4^2 - 1} (a_4 - a_f^\circ) + \frac{u_f^\circ}{\gamma_4 + 1} \right] \quad (4.3)$$

при выводе которого использованы также формулы (2.3). Интегрирование этого уравнения дает:

для любого γ_4 , отличного от $5/3$

$$p^{(1)} = -\frac{2}{a_4^\lambda} \gamma_0 n \lambda \rho_4 \left[\frac{2a_4}{(\gamma_4^2 - 1)(1 - \lambda)} a_f^{\circ \lambda + 1} + \frac{\gamma_4 - 3}{(\gamma_4^2 - 1)(2 - \lambda)} a_f^{\circ 2 + \lambda} \right] + C a_f^{\circ 2\lambda} \quad (4.4)$$

для $\gamma_4 = 5/3$

$$p^{(1)} = -\frac{2}{a_4^\lambda} \gamma_0 n \lambda \rho_4 \left[\frac{2a_4}{(\gamma_4^2 - 1)(1 - \lambda)} a_f^{\circ \lambda + 1} + \frac{\gamma_4 - 3}{\gamma_4^2 - 1} a_f^{\circ 2\lambda} \ln a_f^\circ \right] + C a_f^{\circ 2\lambda} \quad (4.5)$$

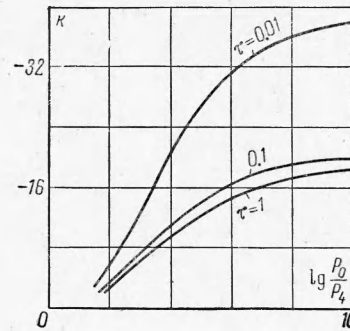
Константа интегрирования C находится из граничного условия $p^{(1)}(a_4) = 0$.

5. Граничные условия и определение констант интегрирования. Граничные условия для определения констант интегрирования в функциях $f(y)$ должны быть поставлены на ударной волне, на контактной поверхности и на характеристике, разделяющей области 2 и 3.

В плоском случае и без релаксации ударная волна и контактный фронт движутся с постоянными скоростями и в плоскости rt изображаются прямыми линиями $r = 1 + U_0 t$ и $r = 1 + u_2 t$ соответственно. Чтобы учесть эффект релаксации и эффекты цилиндрической и сферической симметрии, добавим в правых частях этих уравнений слагаемые, пропорциональные t^2 , так что уравнения ударной волны и контактного фронта в плоскости rt будут выглядеть соответственно следующим образом: $r = 1 + U_0 t + kt^2$, $r = 1 + u_2 t + bt^2$. Скорости ударной волны и контактного фронта равны тогда соответственно $U = U_0 + 2kt$, $u = u_2 + 2bt$.

На ударной волне все параметры суть функции только U . Поэтому на ударной волне ($y = y_0$)

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dU} \frac{dU}{dt} = 2k \frac{df}{dU}$$



Фиг. 1

где df/dU вычисляются по (1.6). Это дает следующие граничные условия на волне:

$$\begin{aligned} A_1 y_0 + B_1 &= \frac{4k}{\gamma_0 + 1} \left(1 + \frac{1}{U_0^2} \right) \\ -\gamma_0 \rho_1 (A_1 u_2 + B_1) y_0 + C_1 &= \frac{8k \gamma_0 U_0}{\gamma_0 + 1} \\ -(n \rho_1 u_2 + A_1 \rho_1) + D_1 (u_2 - y_0) &= \frac{8k (\gamma_0 + 1) U_0}{[(\gamma_0 - 1) U_0^2 + 2]^2} \end{aligned} \quad (5.1)$$

На контактной поверхности

$$\begin{aligned} A_1 y_2 + B_1 &= 2b, & A_2 y_2 + B_2 &= 2b \\ -\gamma_0 \rho_2 u_2 y_2 A_2 - \gamma_0 \rho_2 y_2 B_2 + C_2 &= -\gamma_0 \rho_1 y_2 (A_1 u_2 + B_1) + C_1 \end{aligned} \quad (5.2)$$

