

**ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СИСТЕМ
КРУГОВЫХ ОТВЕРСТИЙ И СТРИНГЕРОВ**

М. Э. ВУЛИЦКИЙ, И. Д. СУЗДАЛЬНИЦКИЙ

(Новосибирск)

Возникающие в технике задачи о взаимодействии различного вида концентраторов — отверстий, разрезов, ребер жесткости (стрингеров) — явились предметом ряда исследований, обзор которых дан в [1, 2]. В частности, взаимодействие отверстия с одним и двумя стрингерами рассматривалось в [1, 3], взаимодействие периодических систем разрезов и стрингеров — в [4].

В данной работе рассматривается взаимное влияние периодической системы круговых отверстий, расположенных вдоль прямой, и периодической системы стрингеров, ортогональных к этой прямой. При этом существенным является объединение методов [1, 4, 5], развитых для сингулярных концентраторов, с приемами решения задач об ослаблении плоскости отверстием и периодической системой отверстий [6, 7].

Рассмотрим пластину, содержащую периодическую систему круговых отверстий и периодическую систему стрингеров (фиг. 1). Центры отверстий γ_k ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) расположены на прямой $y=0$ в точках $x_k = 2kb$, радиусы отверстий равны ρ ($\rho < b$). Непрерывно прикрепленные к пластине стрингеры Γ_k имеют одинаковые длины $2a$ ($a < b$), перпендикулярны прямой $y=0$ и пересекают ее в точках $x_k = (2k+1)b$. Стрингеры изгибу не сопротивляются и работают лишь на растяжение; E, ν, h — соответственно модуль упругости, коэффициент Пуассона и толщина пластины; E_0, S_0 — модуль упругости и площадь поперечного сечения стрингера.

Для элементов упругих полей приняты обозначения: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ — компоненты напряжений, u, v — компоненты смещений пластины, $N(y)$ — нормальное усилие в сечении стрингера, $\varepsilon^0(y)$ — относительное удлинение его оси.

К пластине приложены растягивающие усилия

$$(1) \quad \sigma_y^\infty = p = \text{const}, \quad \sigma_x^\infty = \tau_{xy}^\infty = 0.$$

Условия равновесия любого бесконечно малого элемента стрингера $\Gamma_k = \{x = (2k+1)b, |y| < a\}$, прикрепленного к пластине по всей длине, отсутствия сопротивления стрингера изгибу и непрерывности компонентов смещений и относительного удлинения $\varepsilon_y = \partial v / \partial y$ при переходе через ось стрингера имеют вид

$$(2) \quad h(\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-) - N'(y) = 0, \quad \sigma_x^+ - \sigma_x^- = 0;$$

$$(3) \quad u^+ + iv^+ = u^- + iv^-, \quad \varepsilon_y^+ = \varepsilon_y^- = \varepsilon_y^0.$$

Выражения (2) совместно с формулой $N(y) = E_0 S_0 \varepsilon_y^0 = E_0 S_0 \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^+$ приводят к соотношению

$$(4) \quad h \int_{-a}^a [(\sigma_x + i\tau_{xy})^+ - (\sigma_x + i\tau_{xy})^-] dy - iE_0 S_0 \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^+ = 0.$$

Равенства (3), (4) определяют краевые условия для контуров Γ_k . Здесь они те же, что и в [1].

Введем функции Колосова — Мусхелишвили $\varphi(z), \psi(z)$. Согласно [6],

$$(5) \quad \sigma_x + \sigma_y = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[z\Phi'(z) + \Psi(z)],$$

$$2G(u + iv) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \quad \Phi(z) = \varphi'(z), \quad \Psi(z) = \psi'(z),$$

$$z = x + iy, \quad 2G = E/(1 + \nu), \quad \kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu).$$

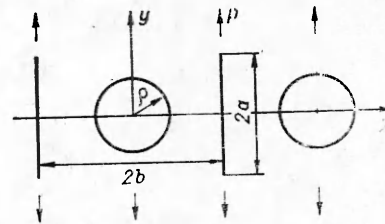
Тогда соотношения (3), (4) совместно с условием отсутствия напряжений на контурах отверстий $\gamma_k = \{2kb + \rho e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ преобразуются к следующей краевой задаче:

$$(6) \quad H_1^+(t) - H_1^-(t) = 0,$$

$$(\kappa + 1)[\varphi^+(t) - \varphi^-(t)] + \kappa_0 \text{Re} H_2^+(t) = 0,$$

$$t \in \Gamma_k,$$

$$\Phi(s) + \overline{\Phi(s)} - e^{2i\theta}[s\Phi'(s) + \Psi(s)] = 0, \quad s \in \gamma_k,$$



Ф и г. 1

где $H_1(z) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\Psi(z)}$;

$$H_2(z) = \kappa\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}, \quad \lambda_0 = E_0 S_0 / 2Gh.$$

Полагаем

$$(7) \quad \varphi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_{1,k}(z) + \varphi_2(z) + \frac{p}{4}z,$$

$$\Psi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{ \varphi_{3,k}(z) + [z - (4k+2)b] \varphi'_{1,k}(z) \} + \Psi_2(z) + \frac{p}{2}z,$$

$$\varphi_{jk}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} f_j(\xi) (\xi - z)^{-1} d\xi, \quad j = 1, 3,$$

$$b_k = \{ (2k+1)b - ia, (2k+1)b + ia \}.$$

Функции φ_{jk} терпят разрыв при переходе через линию стрингера. Первое соотношение (6) оказывается выполненным, если $f_3(\xi) = \overline{\kappa f_1(\xi)}$, второе преобразуется к виду

$$(8) \quad f_1(t) + \frac{\lambda_0}{4} \operatorname{Re} \left\{ \kappa\Phi_2(t) - \overline{\Phi_2(t)} + t\overline{\Phi_2'(t)} + \overline{\Psi_2(t)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{-ai}^{ai} \left[\kappa f_1'(\xi) + \overline{f_1'(\xi)} \left(1 - (\xi - t) \frac{d}{dt} \right) \right] L_1(\xi - t) d\xi \right\} + \frac{\lambda_0 p}{4} = 0,$$

где $L_1(\xi) = (\pi/2b) \operatorname{ctg}(\pi\xi/2b)$.

Очевидно, $\operatorname{Im} f_1(t) = 0$.

Для периодических функций $\Phi_2(z)$, $\Psi_2(z)$ и функции плотности $f_1(\xi)$ интегрального представления (7) принимаем выражения [7]

$$(9) \quad \Phi_2(z) = \rho \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{2m} \left[A'_m(z) + \frac{1}{\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \alpha_{k+1} (2b)^{-2k-2} \int_{\gamma_0} A_m(\xi) (\xi - z)^{2k} d\xi \right],$$

$$\Psi_2(z) = \rho \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{2m} \left[C'_m(z) + \frac{1}{\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \alpha_{k+1} (2b)^{-2k-2} \times \right. \\ \left. \times \int_{\gamma_0} C_m(\xi) (\xi - z)^{2k} d\xi \right] - \Phi_2(z) - z\Phi_2'(z),$$

$$f_1(\xi) = a \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{2m} g_m(\xi), \quad \varepsilon = \rho/2b, \quad \alpha_k = \sum_{n=0}^{\infty} n^{-2k}.$$

Функции $A_m(\xi)$, $C_m(\xi)$ предполагаются аналитическими вне γ_0 и исчезающими на бесконечности.

Подставив (9) в (8) и третье соотношение (6) и приравняв между собой коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим бесконечную систему уравнений вида (далее $t = at_1$, $\xi = a\xi_1$, $s = \rho s_1$, индекс 1 опущен)

$$(10) \quad g_m(t) - \frac{\lambda\kappa}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g'_m(\xi)}{\xi - t} d\xi + \frac{\lambda}{\pi} \int_{-1}^1 g_m(\xi) Q(\xi - t) d\xi + \\ + \lambda \operatorname{Re} \left[\kappa A'_m(t) - 2\overline{A'_m(t)} + 2it\overline{A''_m(t)} + \overline{C'_m(t)} \right] + F_{1,m}(t) = 0,$$

$$C'_m(s) + (1 + s^2) A'_m(s) - s^2 \overline{A'_m(s)} + (s - s^{-1}) \overline{A''_m(s)} + \\ + (\kappa + 1 - s^2) \overline{U_m(s)} - s^2 U_m(s) - \overline{V_m(s)} + F_{2,m}(s) = 0,$$

$$|t| < 1, \quad s = e^{i\theta}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$F_{1,0}(t) = \frac{\lambda p}{4} (\kappa + 1); \quad F_{2,0}(s) = \frac{p}{2} (1 - s^2);$$

$$F_{1,m}(t) = \sum_{k=0}^{m-1} (2k+1) \alpha_{k+1} [\kappa G_{l,2k}(t) - 2\overline{G_{l,2k}(t)} - 4itk\overline{G_{l,2k-1}(t)} + H_{l,2k}(t)];$$

$$F_{2,m}(s) = - \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \alpha_{k+1} [(1+s^2)\overline{G_{l,2k}(s)} + s^2 G_{l,2k}(s) + \\ + 2k(s-s^{-1})\overline{G_{l,2k-1}(s)} - \overline{H_{l,2k}(s)}] \quad (l = 2m - 2k - 2);$$

$$G_{mj}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_0} A_m(\xi) (\xi - z)^j d\xi, \quad H_{mj}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_0} C_m(\xi) (\xi - z)^j d\xi;$$

$$U_m(s) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 f'_m(\tau) L_2(\tau, s) d\tau;$$

$$V_m(s) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 f'_m(\tau) \left[1 - i(\tau - \sin \theta) \frac{d}{ds} \right] L_2(\tau, s) d\tau;$$

$$L_2(\tau, s) = \frac{\sqrt{a}}{2b} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{a}}{2b} (\rho s - ia\tau); \quad \lambda = \lambda_0 [a(\kappa + 1)]^{-1};$$

$$Q(\xi) = - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \xi^{2k-1}; \quad \beta_k = (\kappa - 2k) \frac{2^{2k}}{(2k)!} \left(\frac{\pi a}{2b} \right)^{2k} B_{2k};$$

B_{2k} — числа Бернулли [8].

Для решения уравнений (10) применим метод Мухелишвили [6, 7], предложенный при изучении плоскости, содержащей круглое отверстие, и метод Мультиппа — Калаидия [1] для численного интегрирования сингулярных интегродифференциальных уравнений. Функции $A_m(s)$, $C_m(s)$ разыскиваем в виде рядов

$$A_m(s) = -p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{2n-1} s^{-2n+1}, \quad C_m(s) = -p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{mn}}{2n-1} s^{-2n+1}$$

и функцию $g_m(\xi)$ в виде интерполяционного тригонометрического многочлена

$$g_m(\cos \theta) = \frac{p}{N+1} \sum_{n=1}^N g_{mn} \frac{(-1)^{n+1} \cos \theta_n \cdot \sin(N+1)\theta}{\cos \theta - \cos \theta_n}, \quad \theta_n = \pi n / (N+1).$$

Задача приводится к бесконечной алгебраической системе относительно коэффициентов введенных разложений, которая здесь не выписывается.

Оценим напряжения на контурах отверстий и влияние отверстий на коэффициент интенсивности напряжений на концах стрингеров. Согласно (5), (7), (9), при $z = \rho e^{i\theta}$ имеем

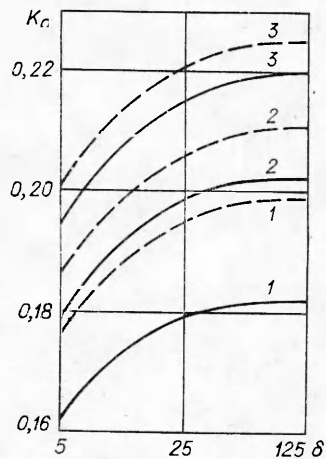
$$\sigma_{\theta} = 4\operatorname{Re} \Phi(s) = p + 4p \operatorname{Re} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{2m} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} s^{-2n} + 2\varepsilon^2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1} \sum_{n=1}^{k+1} a_{m-k,n} \times \right. \\ \left. \times C_{2k+1}^{2n-1} s^{2k-2n+2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 g'_m(\xi) L_2(\xi, s) d\xi \right\}, \quad C_k^n = k! [n!(k-n)!]^{-1}.$$

Касательное напряжение $\tau_{xy} = \operatorname{Im} [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]$ при переходе через ось стрингера терпит разрыв, который, согласно формулам Сохоцкого, оказывается равным $\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^- = -(\kappa + 1) f'_1(y)$, вследствие чего так же, как и в [3], для коэффициента интенсивности напряжений на конце стрингера получаем выражение

$$K_{st} = \lim_{y \rightarrow a} \sqrt{a-y} \tau_{xy}^+(y) = -\frac{\kappa+1}{2} \sqrt{a} \lim_{y \rightarrow 1} \sqrt{1-y} f'_1(y) = \\ = \frac{\kappa+1}{4} \sqrt{2a} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{2m} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{g_m(y)}{\sqrt{1-y^2}}$$

	e_2	0,2			0,3			
		e_1	0,8	1	1,2	0,8	1	1,2
K_1	0		3,0158	3,0065	3,0031	3,0801	3,0328	3,0158
	5		3,0059	2,9976	2,9945	3,0484	3,0066	2,9918
	25		3,0053	2,9964	2,9932	3,0438	3,0027	2,9884
	125		3,0050	2,9961	2,9929	3,0427	3,0019	2,9875
K_2	0		0,8398	0,8870	0,9176	0,7675	0,7982	0,8399
	5		0,8395	0,8864	0,9168	0,7688	0,7979	0,8384
	25		0,8395	0,8862	0,9167	0,7690	0,7979	0,8383
	125		0,8395	0,8862	0,9167	0,7690	0,7979	0,8382

Влияние, оказываемое стрингерами на распределение напряжений, иллюстрируют результаты вычислений, выполненных с сохранением в разложениях (9) слагаемых, имеющих индексы $m = 0, 1, 2$. В таблице приведены значения коэффициентов концентрации напряжений $\bar{K}_1 = \sigma_0/p|_{\theta=0}$ и $\bar{K}_2 = \sigma_0/p|_{\theta=\pi/2}$ при варьировании параметров $e_1 = a/\rho$, $e_2 = a/b$, $\delta = 2E_0S_0/Eab$. При $\delta = 0$ получаем результаты работы [7]. Роль стрингеров в снятии напряжений на контурах отверстий становится тем существеннее, чем ближе отверстия расположены друг к другу, причем с ростом длины и жесткости стрингеров их воздействие на изменение коэффициента K_1 оказывается более значительным, чем на изменение K_2 . Например, в случае $e_1 = 1, 2$ с увеличением жесткости δ коэффициент K_1 при $e_2 = 0,3$ уменьшается в 3 раза быстрее, чем при $e_2 = 0,2$. Более того, для значений e_1 , меньших 1, в случае $e_2 = 0,3$ при увеличении δ и соответственно уменьшении K_1 наблюдается некоторое увеличение K_2 .



Ф и г. 2

Поведение коэффициента интенсивности напряжений на конце стрингера иллюстрирует фиг. 2, где $K_a = K_{st} [p(\kappa + 1)]^{-1}$. Величина e_1 принимает значения 0,8; 1; 1,2, $e_2 = 0,2$ (соответственно сплошные линии 1-3) и 0,3 (штриховые линии). Увеличение длины и жесткости стрингера, очевидно, приводит к снятию напряжений на контуре отверстия, однако существенно увеличивает интенсивность напряжений на его конце.

Авторы чтят память о Л. М. Куршине, которому они обязаны многими советами и постоянным вниманием к их работе.

Поступила 11 XII 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973.
2. Развитие теории контактных задач в СССР/Под ред. Л. А. Галина. М.: Наука, 1976.
3. Жоржюлиани Г. Т., Каландия А. И. Влияние стрингера на распределение напряжений около отверстий. — ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
4. Суздальницкий И. Д. Периодическая задача о креплении стрингерами пластины, ослабленной системой разрезов. — ПММ, 1979, т. 43, вып. 4.
5. Куршин Л. М., Суздальницкий И. Д. Напряженное состояние упругой плоскости, ослабленной бесконечным рядом продольно-поперечных трещин. — ПМТФ, 1975, № 5.
6. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
7. Ворovich И. И., Космодамианский А. С. Упругое равновесие изотропной пластинки, ослабленной рядом одинаковых криволинейных отверстий. — Изв. АН СССР. ОТН. Механ. и машиностр., 1959, № 4.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.