

**АВТОМОДЕЛЬНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ СКИНОВЫЙ ВЗРЫВ  
ПРОВОДНИКА**

**Е. И. Биченков, А. Е. Войтенко**

(Новосибирск)

Рассмотрена задача электрического взрыва проводника с плоской границей в сильном магнитном поле. Проведены оценки роли теплопроводности, позволяющие определить критические поля, в которых происходит плавление и испарение металла. Рассмотрены особенности взрыва слоистой среды.

Физическая картина взрыва проводника под действием тока большой плотности описана в работах [1,2]. В [2,3] произведен расчет в предположении, что ток распределен равномерно по сечению проводника. При быстрых процессах, когда время нарастания тока меньше эффективного времени проникновения магнитного поля в проводник («скинового» времени), взрывается тонкий поверхностный слой, и граница испарения движется внутрь проводника. В этом случае применение средних по сечению проводника характеристик уже неудовлетворительно отражает существо явления. Предположение, что фронт потери проводимости (граница испарения) движется в проводнике со скоростью звука [2], может быть принято тоже не всегда. Действительно, скорость нарастания скин — слоя, определяющая скорость движения тепловой волны в глубь проводника, пропорциональна  $1/\sqrt{t}$ , т. е. рано или поздно станет меньше скорости звука. Начиная с этого момента, скорость движения фронта испарения будет определяться процессами диффузии магнитного поля, а не упругими свойствами проводника.

Ниже рассмотрено автомодельное распространение волны испарения, точнее волны потери проводимости, или волны деколлективизации электронов по терминологии работы [2]. Принято, что теплопроводность и движение среды не существенны, а проводимость не зависит от температуры вплоть до точки испарения, по достижении которой проводимость исчезает.

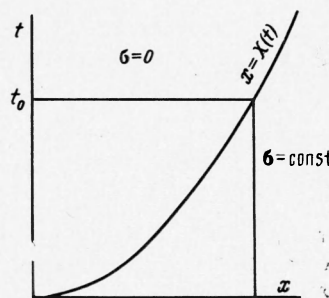
**1. Автомодельная задача о взрыве проводника.** Пусть в исходном состоянии проводник заполняет полупространство  $0 \leq x < \infty$ . Магнитное поле на границе проводника параллельно поверхности его и равно  $H_0(t)$ . В начальный момент времени поле в проводнике равно нулю. Проводимость  $\sigma$  постоянна вплоть до момента испарения  $t_0$ , когда единица объема проводника получает за счет нагрева током теплоту сублимации  $Q_0$ , после чего  $\sigma = 0$ . При этом в глубь проводника распространяется волна испарения, уравнение движения которой  $x = X(t)$  неизвестно. При таких предположениях и пренебрежении токами смещения отыскание напряженности магнитного поля  $H$  в проводнике сводится к решению уравнения диффузии

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

в области  $t \geq 0, X(t) \leq x < \infty$  (фиг. 1) удовлетворяющего условиям

$$H(x, 0) = 0, \quad H(x, t)_{x=X(t)} = H_0(t), \quad Q(x, t)_{x=X(t)} = Q_0 \quad (1.2)$$

Здесь  $Q(x, t)$  — тепло, выделившееся в единице объема проводника в процессе его нагрева током. Вообще говоря, точное решение задачи о



Фиг. 1

нагреве проводника скин — током сводится к решению уравнения теплопроводности с джоулевыми источниками тепла мощностью

$$\frac{J^2}{\sigma} = \frac{c^2}{16\pi^2\sigma} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 \quad (1.3)$$

Но, как показано в [4], для металлических проводников можно пренебречь влиянием теплопроводности; это позволяет переписать последнее условие испарения (1.2) в виде

$$Q_0 = \frac{c^2}{16\pi^2\sigma} \int_0^{t_0} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 dt \quad (1.4)$$

Сформулированная задача допускает автомодельное решение при постоянных  $H_0$  и  $Q_0$ . В этом случае из определяющих параметров задачи и переменных  $x$ ,  $t$  можно составить безразмерные комбинации

$$\xi = \frac{V\pi\sigma x}{c\sqrt{t}}, \quad h = \frac{H}{H_0}, \quad \varepsilon = \frac{H_0^2}{8\pi Q_0} \quad (1.5)$$

Отсюда следует, что решение задачи зависит лишь от одной переменной  $\xi$ . При этом уравнение (1.1) сводится к

$$h'' = -2\xi h' \quad (1.6)$$

начальное условие (1.2) дает

$$h(\infty) = 0 \quad (1.7)$$

граничное условие (1.2) сводится к

$$h(\xi)_{x=X(t)} = 1 \quad (1.8)$$

На фронте волны испарения  $\xi$  равно некоторой неизвестной постоянной  $\xi_0$ , и уравнение движения фронта испарения

$$X(t) = \xi_0 \frac{c}{V\pi\sigma} \sqrt{t} \quad (1.9)$$

Решение уравнения (1.6) при условиях (1.7), (1.8)

$$h(\xi) = \frac{1 - \Phi(\xi)}{1 - \Phi(\xi_0)} \quad (1.10)$$

где  $\Phi(\xi)$  — интеграл вероятности.

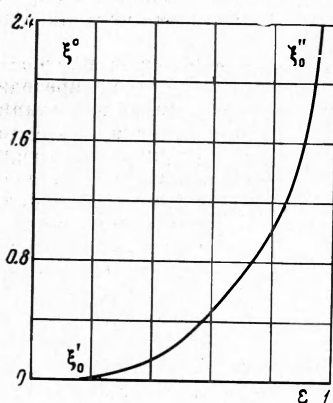
Условие испарения (1.4) позволяет найти значение  $\xi_0$  в зависимости от параметра  $\varepsilon$  и тем самым вычислить скорость разрушения проводника. Подстановка (1.10) в (1.4) приводит в рассматриваемой автомодельной задаче к уравнению

$$\varepsilon = - \frac{\pi}{2} \frac{[1 - \Phi(\xi_0)]^2}{Ei(-2\xi_0^2)} \quad (1.11)$$

где  $Ei(z)$  — интегральная показательная функция. График зависимости  $\xi_0$  от  $\varepsilon$  приведен на фиг. 2, на которой обозначено

$$\xi_0' = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \exp\left(-\frac{\pi}{4\varepsilon}\right), \quad \beta = 1.781 \quad \text{при } \varepsilon \ll 1 \quad (1.12)$$

$$\xi_0'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \quad \text{при } \varepsilon \sim 1 \quad (1.13)$$



Фиг. 2

**2. Минимальное поле, вызывающее испарение. Пределы применимости автотельного решения.** Полученное решение формально дает взрыв скин-слоя при любых малых магнитных полях  $H_0$ , хотя физически очевидно, что этого быть не может. Подобная ситуация возникла из-за пренебрежения теплопроводностью и представления условия испарения в упрощенном виде (1.4). Это нетрудно показать следующим образом. Как известно [6], толщина скин-слоя  $\delta$  и плотность тока  $j$  у поверхности проводника соответственно будут

$$\delta \sim \frac{c \sqrt{t}}{\sqrt{\pi \sigma}}, \quad j \sim \frac{c}{4\pi} \frac{H_0}{\delta} \sim \frac{H_0}{\sqrt{4\pi}} \left( \frac{\sigma}{t} \right)^{1/2}$$

Пренебрегая теплопроводностью, нетрудно показать, что в единице объема у поверхности проводника за время от  $t_1$  до  $t_2$  выделится тепло

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} \frac{j^2}{\sigma} dt \sim \frac{H_0^2}{4\pi} \ln \frac{t_2}{t_1} \quad (2.1)$$

и даже малые токи при  $t_2 \rightarrow \infty$  приведут к достаточному нагреву и испарению проводника. Но нагрев в течение длительного времени даже при малой теплопроводности никак нельзя предполагать адиабатическим. Учет теплопроводности позволяет оценить критическое поле  $H^*$ , достаточное для начала взрыва, и тем самым установить пределы применимости полученного решения.

Изменение температуры, как и изменение магнитного поля в проводнике, описывается уравнением диффузии (1.1) с заменой коэффициента диффузии поля  $D_m = c^2 / 4\pi\sigma$  на коэффициент температуропроводности  $D_T = \kappa / q$ , где  $\kappa$  — теплопроводность, а  $q$  — теплоемкость единицы объема проводника. Согласно (1.9), толщина испаряющегося за время  $t$  слоя

$$\delta = \xi_0 \frac{c}{\sqrt{\pi\sigma}} \sqrt{t} \quad (2.2)$$

Характерное время  $\tau$  установления теплового равновесия такого слоя с окружающей средой

$$\tau \sim \frac{\delta^2}{D_T} = \frac{4\xi_0^2 D_m}{D_T} t \quad (2.3)$$

Условие применимости адиабатического приближения при рассмотрении испарения скин-слоя  $\tau > t$ , приводит к  $\xi_0^2 > D_T / 4D_m$ ; откуда для слабых полей после подстановки (1.12) нетрудно получить

$$H^* > 2\pi \left( \frac{Q_0}{\ln(2D_m / 3D_T)} \right)^{1/2} \quad (2.4)$$

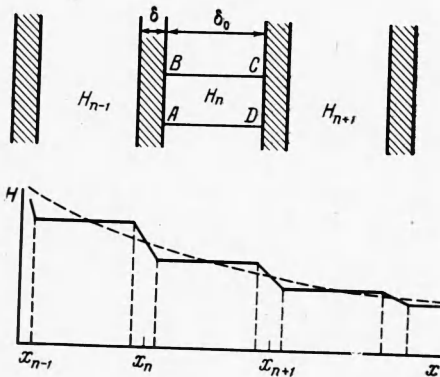
Используя связь теплопроводности и электропроводности в соответствии с законом Видемана — Франца и, естественно, полагая температуру металла равной температуре кипения  $T_{**}$ , можно переписать полученную оценку минимального поля, достаточного для начала процесса испарения, в виде

$$H^* > 2\pi \sqrt{Q_0} \left( \ln \frac{\pi}{6\beta} \left( \frac{ck}{e} \right)^2 \frac{qT_{**}}{\kappa^2} \right)^{-1/2} \quad (2.5)$$

Здесь  $e$  — заряд электрона,  $k$  — постоянная Больцмана. Вычисления по (2.4) критических полей дают для меди  $H^* > 1.5 \cdot 10^6$  э, для вольфрама  $H^* > 1.9 \cdot 10^6$  э и для свинца  $H^* > 0.66 \cdot 10^6$  э.

При магнитных полях  $H \sim \sqrt{8\pi Q_0}$  полученное решение приводит к бесконечной скорости распространения волны плавления в глубь проводника. Понятно, что в таком случае начинают играть роль новые физические процессы, связанные со скоростью разлета испарившегося металла, которые существенно меняют картину явления. Действительно, в авто-модельном решении принималось  $Q_0 = \text{const}$ , что возможно при постоянном давлении на границе испарения. Если же разлет паров металла происходит медленно по сравнению со скоростью движения фронта испарения, то давление на этом фронте возрастает с течением времени, что приводит к повышению температуры кипения и вместе с тем возрастанию  $Q_0$  (эффект, наблюдавшийся в экспериментах И. Ф. Кварцхавы [6]). Возрастание  $Q_0$  при заданном  $H_0$  уменьшает параметр  $\varepsilon$  и ведет к установлению в связи с этим некоторой конечной скорости движения фронта испарения. Таким образом, задача об испарении проводника в очень сильных полях будет в основном гидродинамической и требует особого рассмотрения.

**3. Плавление проводника.** Аналогично решению задачи об испарении может быть рассмотрена авто-модельная задача о плавлении проводника без изменения его проводимости. В этом случае граница проводника не меняется, а фронт плавления распространяется в глубь проводника и соответствует некоторому постоянному значению авто-модельной переменной  $\xi = \xi_1$ . Существенное отличие



Фиг. 3

в математической формулировке этой задачи от рассмотренной состоит в замене условия (1.8) на  $h(0) = 1$ , что приводит в (1.10) к обращению знаменателя в единицу и соответствующему изменению в (1.11). При этом оказывается, что

$$\varepsilon_1 = -\frac{\pi}{2} \frac{1}{Ei(-2\xi_1^2)} \quad (3.1)$$

Критическое поле  $H_1^*$ , вызывающее расплавление проводника, по-прежнему определяется (2.5) с заменой теплоты испарения  $Q_0$  на теплоту плавления  $Q_1$  и температуры кипения  $T_{**}$  на температуру

плавления  $T_*$ . Величины критических полей составляют для меди  $5.5 \cdot 10^5$  э и для свинца  $1.6 \cdot 10^5$  э.

Согласно приведенным расчетам, импульсные соленоиды из меди могут выдерживать поля до  $0.5 \cdot 10^6$  э без разрушения (если не говорить о возможных механических деформациях).

В полях  $(0.5-1.5) \cdot 10^6$  э поверхность меди должна оплаваться с возможным образованием жидких струй. В полях выше  $1.5 \cdot 10^6$  э наступает испарение меди, сопровождающееся повышением давления, образованием ударных волн и расширением паров.

**4. Взрыв слоистого материала.** Представляет интерес рассмотреть диффузию магнитного поля в слоистую среду, состоящую из перемежающихся слоев проводника и диэлектрика. Отвлекаясь от высокочастотной волновой картины, можно считать, что поле в каждом слое диэлектрика однородно, что при определенной величине продиффундировавшего через некоторый слой проводника потока приводит к уменьшению напряженности поля на внутренней поверхности проводящего слоя и, следовательно, к увеличению плотности тока в нем. В результате возрастает мощность нагрева проводника и испарение его наступает раньше.

Нетрудно получить уравнение, описывающее диффузию поля в слоистую среду, если предположить, что толщина проводящего слоя  $\delta$  и расстояния между слоями  $\delta_0$  малы. Пусть поле в  $n$ -м слое диэлектрика  $H_n(t)$ , а диэлектрическая постоянная равна единице. Закон электромагнитной индукции для прямоугольного контура  $ABCD$ , границы которого  $AB$  и  $CD$  проходят по внутренней поверхности  $n$ -го и по внешней поверхности  $(n + 1)$ -го слоев проводника (фиг. 3), можно записать в виде

$$\frac{1}{c} \cdot \delta_0 \frac{\partial H_n}{\partial t} = \frac{c}{4\pi\sigma} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{CD} - \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{AB} \right) \quad (4.1)$$

При малых  $\delta$  можно определить значение производной  $\partial H / \partial x$  на границах  $AB$  и  $CD$  проводников, воспользовавшись разложением поля в  $n$ -м и  $(n + 1)$ -м слоях проводника в ряд Тейлора и ограничившись тремя первыми членами этого ряда. Так, для определения  $(\partial H / \partial x)_{AB}$  имеем

$$H_{n-1} = H_n - \delta \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{AB} + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \Big|_{AB}$$

В силу уравнения диффузии поля в  $n$ -й слой проводника и непрерывности  $H$  на границе  $AB$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \Big|_{AB} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial H_n}{\partial t}, \quad \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{AB} = \frac{H_n - H_{n-1}}{\delta} + \frac{\delta}{2} \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial H_n}{\partial t}$$

Аналогичные вычисления дают

$$\frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{CD} = \frac{H_{n+1} - H_n}{\delta} - \frac{\delta}{2} \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial H_n}{\partial t}$$

и подстановка найденных значений  $\partial H / \partial x$  на границах в (4.1) приводит к

$$(\delta_0 + \delta) \frac{\partial H_n}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{1}{\delta} (H_{n+1} + H_{n-1} - 2H_n) \quad (4.2)$$

Заменяя ступенчатое распределение поля в диэлектрике некоторым непрерывным  $H(x, t)$  (показано на фиг. 3 пунктиром), принимающим в центре  $n$ -го слоя диэлектрика значение  $H_n(t)$ , и полагая  $(\delta_0 + \delta)$  малым, можно переписать (4.2) в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\delta_0 + \delta}{\delta} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad (4.3)$$

т. е. диффузия поля в слоистую среду в первом приближении соответствует диффузии поля в сплошной проводник с проводимостью

$$\sigma_c = \alpha\sigma, \quad \alpha = \frac{\delta}{\delta_0 + \delta}$$

Здесь  $\alpha$  — степень заполнения слоистой среды проводником. Плотность тока в  $n$ -м слое проводника с той же степенью точности

$$J_n = \frac{c}{4\pi} \frac{H_n - H_{n-1}}{\delta} = \frac{c}{4\pi} \frac{\delta_0 + \delta}{\delta} \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=x_n} \quad (4.4)$$

и условие испарения

$$Q_0 = \int_0^{t_0} \frac{J^2}{\sigma_c} dt = \frac{1}{\alpha} \frac{c^2}{16\pi^2\sigma_c} \int_0^t \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_d^2 d. \quad (4.5)$$

