

Как видно из (15), полученное таким образом выражение для  $u$  имеет особенность при  $y, \xi \rightarrow 0$  и  $z \neq z_0$ , которая равна производной по  $\xi$  от фундаментального решения двумерного уравнения Лапласа  $\Delta_2 u = 0$  (для компоненты скорости  $v$  особенность есть производная по  $y$  от фундаментального решения). Поэтому, для того чтобы найти регулярное при  $y, \xi \rightarrow 0$  и  $z \neq z_0$  выражение для  $u$ , удовлетворяющее уравнению (11), необходимо из ряда (15) исключить первое слагаемое, тогда новый ряд и будет описывать  $u$  при  $y, \xi \rightarrow 0$ .

Численные расчеты  $u$  (рис. 2) проводились при тех же значениях всех параметров. На рис. 2, а представлены результаты расчетов первой моды  $u$ , рассчитанной по (12), (13) (сплошная линия) и по (14) (штриховая). На рис. 2, б приведены результаты суммирования мод (сплошная линия — по (12), (13) с исключенной особенностью, штриховая — по (15), также с исключением особенности, пунктирная линия — особенность горизонтальной скорости  $u$ ). Как видно из рис. 2, для нахождения истинного значения горизонтальной скорости учет особенности играет определяющую роль при  $y, \xi \rightarrow 0$ .

Таким образом, представленные результаты показывают, что полученные явные асимптотические выражения для вертикальной и горизонтальных компонент скорости ВВ позволяют на расстояниях, сравнимых с толщиной слоя жидкости, эффективно рассчитывать поле ВВ, не прибегая к сложным и громоздким численным расчетам.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Боровиков В. А., Владимиров Ю. В., Кельберт М. Я. Поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемых локализованными источниками // Изв. АН СССР. ФАО.— 1984.— Т. 20, № 6.
2. Санников В. Ф. Дальнее поле установившихся волн, создаваемых локальными источниками возмущений в потоке стратифицированной жидкости // ПММ.— 1986.— Т. 50, № 6.
3. Боровиков В. А., Булатов В. В., Кельберт М. Я. О промежуточной асимптотике дальнего поля внутренних волн в слое стратифицированной жидкости, лежащем на однородном слое // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1988.— № 3.
4. Санников В. Ф. Ближнее поле установившихся волн, генерируемых локальным источником возмущений в потоке стратифицированной жидкости // Теоретическое исследование волновых процессов в океане.— Севастополь: Морск. гидрофиз. ин-т, 1983.
5. Боровиков В. А., Булатов В. В., Владимиров Ю. В., Левченко Е. С. О расчете поля внутренних гравитационных волн, генерируемых неподвижным источником в потоке стратифицированной жидкости // ПМТФ.— 1989.— № 4.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Физматгиз, 1963.
7. Мировпольский Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане.— Л.: Гидрометеоназдат, 1981.

г. Москва

Поступила 22/V 1989 г.,  
в окончательном варианте — 17/VIII 1989 г.

УДК 532.516:536.24.01

Е. А. Рябицкий

### ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СЛОЕ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБАХ НАГРЕВА

При отсутствии массовых сил возмущения равновесного состояния неравномерно нагретой жидкости определяются интенсивностью термокапиллярных сил, обусловленных зависимостью коэффициента поверхностного натяжения от температуры. Если равновесный градиент температуры достаточно велик, то изменение поверхностного натяжения приводит к потере устойчивости равновесия — появлению термокапиллярной конвекции.

Изучению условий возникновения конвекции в жидкости при нагревании твердой или свободной границы без учета деформации свободной поверхности посвящены

работы [1—3]. В [4] исследовалась устойчивость равновесия жидкого цилиндра, цилиндрического и плоского слоя при нагреве внутренними источниками тепла. Свободная поверхность при этом считалась деформируемой. Показано, что при учете деформаций границы появляется новый фактор, влияющий на устойчивость равновесия. При этом происходит не только понижение устойчивости, но и качественное изменение нейтральной кривой.

В данной работе исследуется устойчивость цилиндрического слоя с деформируемой свободной поверхностью при одновременном нагреве твердого цилиндра и внутренними источниками тепла. Получены формулы для критических чисел Марангони. Показано, что учет деформации свободной границы приводит, как и в [4], к разрывам нейтральной кривой. Причем при подогреве твердой поверхности кривая критических чисел Марангони может иметь две точки разрыва в зависимости от числа Вебера. Кроме того, при нагреве внутренними источниками тепла для азимутальных возмущений ( $m = 1$ ) учет деформации свободной поверхности ведет к повышению устойчивости.

1. Рассмотрим цилиндрический слой вязкой теплопроводной жидкости, ограниченный твердой внутренней и свободной внешней поверхностями, при отсутствии силы тяжести. Введем цилиндрическую систему координат с осью  $z$ , направленной вдоль образующей цилиндра. Уравнения твердой и свободной границ  $r = r_0$  и  $r = r_1$  соответственно. Изменение коэффициента поверхностного натяжения от температуры описывается формулой  $\sigma = \sigma_0 - \kappa(\theta - \theta_0)$ .

Пусть внутри жидкости имеются постоянные внутренние источники тепла интенсивности  $q$ , а на твердой границе задана постоянная температура  $\theta_1$ . Тогда равновесное состояние записывается как

$$(1.1) \quad u = v = w = 0, \quad p = \text{const},$$

$$\theta(r) = -\frac{q}{4\chi} \left[ r^2 - r_1^2 + (r_1^2 - r_0^2) \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_0/r_1)} \right] + \theta_1 \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_0/r_1)},$$

где  $u, v, w$  — компоненты вектора скорости;  $p$  — давление;  $\theta$  — температура.

Выберем в качестве характерных масштабов длины, времени, скорости, давления и температуры величины  $r_1, r_1^2/\nu, \nu/r_1, \rho\nu^2/r_1^2, \rho\nu^2/\kappa r_1$  ( $\nu, \chi$  — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности,  $\rho$  — плотность). Выражение для температуры после обезразмеривания примет вид

$$(1.2) \quad \theta_0(\xi) = \text{Ma}_q \text{Pr}^{-1} [1 - \xi^2 - (1 - d^2) \ln \xi / \ln d] / 2 - \text{MaPr}^{-1} \ln \xi.$$

Здесь  $\xi = r/r_1; d = r_0/r_1; \text{Pr} = \nu/\chi$  — число Прандтля;  $\text{Ma}_q = q\kappa r_1^3 / (2\rho\nu\chi^2), \text{Ma} = \theta_1\kappa r_1 / \rho\nu\chi \ln(r_1/r_0)$  — числа Марангони.

Уравнения малых возмущений произвольного термокапиллярного движения в цилиндрических координатах получены в [5]. Полагая эти возмущения зависящими от  $\varphi, \eta = z/r_1$  и  $\tau = \nu t/r_1^2$  по закону  $\exp[i(m\varphi + \alpha z) - i\alpha C\tau]$ , запишем амплитудные уравнения для равновесного состояния (1.2)

$$(1.3) \quad aU + P' = \left[ \frac{1}{\xi} (\xi U)' \right]' - \frac{2im}{\xi^2} V;$$

$$(1.4) \quad aV + \frac{im}{\xi} P = \left[ \frac{1}{\xi} (\xi V)' \right]' + \frac{2im}{\xi^2} U;$$

$$(1.5) \quad aW + i\alpha P = \frac{1}{\xi} (\xi W)';$$

$$(1.6) \quad (\xi U)' + imV + i\alpha \xi W = 0;$$

$$(1.7) \quad bT - \text{Pr} \theta'_0 = \frac{1}{\xi} (\xi T)';$$

$$d < \xi < 1, \quad a = \alpha^2 + m^2/\xi^2 - i\alpha C, \quad b = \alpha^2 + m^2/\xi^2 - i\alpha \text{Pr} C;$$

условия на твердой границе ( $\xi = d$ )

$$(1.8) \quad U = V = W = T = 0,$$

на свободной поверхности ( $\xi = 1$ )

$$(1.9) \quad \begin{aligned} V' - V + imU &= -im(T + \theta'_0 R), \quad i\alpha U + W' = \\ &= -i\alpha(T + \theta'_0 R), \quad -i\alpha CR = U, \\ -P + 2U' &= We_0(1 - \alpha^2 - m^2)R - (T + \theta'_0 R), \quad T' + Bi T + \\ &+ (\theta''_0 + Bi \theta'_0) R = 0. \end{aligned}$$

В (1.3)—(1.9)  $U, V, W, P, T$  — возмущения компонент вектора скорости, давления и температуры;  $R$  — отклонение границы по нормали от ее невозмущенного состояния  $r = r_1$ ;  $We_0 = r_1 \sigma_0 / \rho v^2$  — число Вебера;  $\alpha$  — волновое число вдоль оси  $z$ ;  $m$  — спектральная мода по углу  $\varphi$ ;  $C = C_r + iC_i$  — комплексный декремент;  $Bi = \beta r_1 / \lambda$  — число Био;  $\lambda, \beta$  — коэффициенты теплопроводности и межфазного обмена.

Далее будем рассматривать только монотонные возмущения, при этом граница устойчивости определяется значениями  $C = 0$  в (1.3) — (1.9). Условия существования нетривиального решения задачи позволяют найти критические числа Марангони, при которых теряется устойчивость равновесия.

2. Ищем решение (1.3) — (1.9) в виде  $(U, V, W, P) = [T(\xi) + \theta'_0(\xi)R] \cdot (\varphi(\xi), \psi(\xi), g(\xi), f(\xi))$ . В этом случае задача на функции  $\varphi, \psi, g, f$  отделяется, ее решение получено в [4]. Из (1.7) находим функцию  $T$ , и далее, с учетом (1.8), (1.9) получаем соотношение между критическими числами Марангони. Приведем окончательные выражения для трех основных случаев.

Для осесимметричных возмущений ( $m = 0$ )

$$(2.1) \quad \begin{aligned} Ma \{ \alpha^2 (1 - \alpha^2) G_0(\alpha, d) + A_0(\alpha, d) Pr^{-1} We_0^{-1} [l_1 - \alpha l_2] \} + \\ + Ma_q \{ \alpha^2 (1 - \alpha^2) G_{0q}(\alpha, d) + A_0(\alpha, d) Pr^{-1} We_0^{-1} \times \\ \times [\alpha l_2 (1 + (1 - d^2)/2 \ln d) + l_2 (1 - (1 - d^2)/2 \ln d)] \} = (1 - \alpha^2) (Bi l_1 - \alpha l_2), \end{aligned}$$

где

$$l_1 = I_0(\alpha d) K_0(\alpha) - I_0(\alpha) K_0(\alpha d), \quad l_2 = I_0(\alpha d) K_1(\alpha) + I_1(\alpha) K_0(\alpha d), \\ A_0(\alpha, d) = 1 - \alpha^2 + 2\alpha^2 C_3 [I_1(\alpha) - \alpha I_0(\alpha)] + 2\alpha^2 C_4 [K_1(\alpha) + \alpha K_0(\alpha)],$$

$$G_0(\alpha, d) = \int_d^1 \varphi_0(\tau) [K_0(\alpha \tau) I_0(\alpha d) - I_0(\alpha \tau) K_0(\alpha d)] d\tau,$$

$$G_{0q}(\alpha, d) = \int_d^1 (\tau^2 + (1 - d^2)/2 \ln d) \varphi_0(\tau) [K_0(\alpha \tau) I_0(\alpha d) - I_0(\alpha \tau) K_0(\alpha d)] d\tau,$$

$$\varphi_0(\xi) = \frac{C_1}{2\alpha} \xi I_0(\alpha \xi) - \frac{C_2}{2\alpha} \xi K_0(\alpha \xi) + C_3 I_1(\alpha \xi) + C_4 K_1(\alpha \xi),$$

$$C_1 = (1 - C_2 K_1(\alpha)) / I_1(\alpha), \quad C_2 = [-I_1(\alpha d) k_1 - I_0(\alpha d) k_2 + I_0(\alpha) / \alpha d^2] / \Delta,$$

$$C_3 = [-K_2(\alpha d) k_3 - K_1(\alpha d) k_4 + K_1(\alpha) / \alpha] / 2\alpha \Delta,$$

$$C_4 = [-I_2(\alpha d) k_3 + I_1(\alpha d) k_4 - I_1(\alpha) / \alpha] / 2\alpha \Delta,$$

$$\Delta = k_1^2 + 1/\alpha^2 d^2 - k, [K_0(\alpha d) I_1(\alpha) + I_0(\alpha d) K_1(\alpha)],$$

$$k_1 = K_1(\alpha d) I_1(\alpha) - I_1(\alpha d) K_1(\alpha), \quad k_2 = K_2(\alpha d) I_1(\alpha) + I_2(\alpha d) K_1(\alpha),$$

$$k_3 = I_0(\alpha) K_0(\alpha d) - K_0(\alpha) I_0(\alpha d), \quad k_4 = K_0(\alpha) I_1(\alpha d) + I_0(\alpha) K_1(\alpha d).$$

Интегралы  $G_0$  и  $G_{0q}$  допускают явные выражения через модифицированные функции Бесселя, которые не приводятся из-за громоздкости.

В случае азимутальных возмущений ( $\alpha = 0$ ) при  $m \geq 2$

$$(2.2) \text{Ma} \{ (1 - m^2) G(d) + A(d) \text{Pr}^{-1} \text{We}_0^{-1} [m(d^m + d^{-m}) - (d^m - d^{-m})] \} + \\ + \text{Ma}_q \{ (1 - m^2) G_q(d) - A(d) \text{Pr}^{-1} \text{We}_0^{-1} [m(d^m + d^{-m})(1 + (1 - d^2)/2 \ln d) + \\ + (d^m - d^{-m})(1 - (1 - d^2)/2 \ln d)] \} = \\ = (1 - m^2) [m(d^m + d^{-m}) - \text{Bi}(d^m - d^{-m})], \\ \text{где} \quad A(d) = 2(1 - m^2)(C_3 + C_6) + m^2 + 1, \quad G(d) = \\ = \int_d^1 \varphi(\tau) [d^m \tau^{-m} - d^{-m} \tau^m] d\tau,$$

$$G_q(d) = \int_d^1 (\tau^2 + (1 - d^2)/2 \ln d) \varphi(\tau) [d^m \tau^{-m} - d^{-m} \tau^m] d\tau,$$

$$\varphi(\xi) = (-mC_1 \xi^{m+1} + mC_2 \xi^{-m+1} + C_3 \xi^{-m-1} + C_4 \xi^{m-1})/2,$$

$$C_1 = [1 - d^{-2m} - m(1 - d^{-2})]/2\Delta, \quad C_2 = -[1 - d^{2m} + m(1 - d^{-2})]/2\Delta,$$

$$C_3 = m(C_1 - 0,5), \quad C_4 = -m(C_2 - 0,5), \quad \Delta = d^{2m} - d^{-2m} - m(d^2 - d^{-2}).$$

При  $\alpha = 0$ ,  $m = 1$  задача для азимутальных возмущений вырождается и решение имеет вид  $U = V = P = 0$ ,  $T = C_4(\xi - d^2/\xi)$ ,  $C_4 = \text{const}$ , что отвечает перемещению цилиндрического слоя как целого. Если же в (1.9) сразу положить  $\text{We}_0 = \infty$ , то решение этой задачи нетривиально и число Марангони определяется формулой (2.1). При этом

$$\varphi(\xi) = [-C_1 \xi^2 + (C_2 - C_4/2) + C_3 \xi^{-2} + C_4 \ln \xi]/2,$$

где

$$C_1 = 0,5 + C_3, \quad C_2 = (1 + d^2)/2 + C_3(d^2 + d^{-2}),$$

$$C_4 = d^2 + 2C_3(d^2 + d^{-2}),$$

$$C_3 = (1 - d^2 + 2d^2 \ln d)/[2(d^2 - d^{-2}) - 4(d^2 + d^{-2}) \ln d].$$

В общем случае ( $\alpha \neq 0$ ,  $m \neq 0$ ) имеем

$$f(\xi) = C_1 I_m(\alpha \xi) + C_2 K_m(\alpha \xi), \quad \varphi(\xi) = [C_1 \xi I_m(\alpha \xi) + \\ + C_2 \xi K_m(\alpha \xi) + C_3 I_{m+1}(\alpha \xi) + C_4 K_{m+1}(\alpha \xi) + C_5 I_{m-1}(\alpha \xi) + \\ + C_6 K_{m-1}(\alpha \xi)]/2,$$

$$\psi(\xi) = -i[C_3 I_{m+1}(\alpha \xi) + C_4 K_{m+1}(\alpha \xi) - C_5 I_{m-1}(\alpha \xi) - C_6 K_{m-1}(\alpha \xi)]/2,$$

постоянные  $C_1, \dots, C_6$  находятся из граничных условий  $\varphi(d) = \psi(d) = \varphi'(d) = \psi'(d) = \varphi(1) = 0$ ,  $\psi'(1) + \psi(1) + im = 0$ ,  $C_1 I_m'(\alpha) + C_2 K_m'(\alpha) + 2im\psi(1) = -(\alpha^2 + m^2)$ . Приведем окончательное выражение

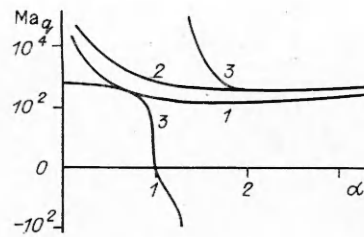
$$(2.3) \text{Ma} \{ (1 - \alpha^2 - m^2) G_m(\alpha, d) + A_m(\alpha, d) \text{Pr}^{-1} \text{We}_0^{-1} (l_2 - l_1) \} + \\ + \text{Ma}_q \{ (1 - \alpha^2 - m^2) G_{mq}(\alpha, d) - A_m(\alpha, d) \text{Pr}^{-1} \text{We}_0^{-1} [l_1(1 - \\ - (1 - d^2)/2 \ln d) + l_2(1 + (1 - d^2)/2 \ln d)] \} = (1 - \alpha^2 - m^2) (l_2 - \text{Bi} l_1),$$

где  $l_1 = I_m(\alpha d) K_m(\alpha) - I_m(\alpha) K_m(\alpha d)$ ,  $l_2 = I_m'(\alpha) K_m(\alpha d) - K_m'(\alpha) I_m(\alpha d)$ ,

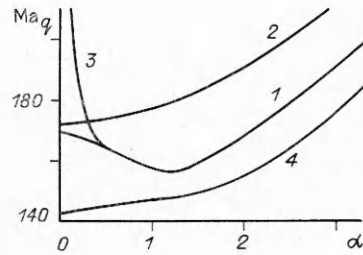
$$G_m(\alpha, d) = \int_d^1 \varphi(\tau) [K_m(\alpha \tau) I_m(\alpha d) - I_m(\alpha \tau) K_m(\alpha d)] d\tau,$$

$$G_{mq}(\alpha, d) = \int_d^1 (\tau^2 + (1 - d^2)/2 \ln d) \varphi(\tau) [K_m(\alpha \tau) I_m(\alpha d) - \\ - I_m(\alpha \tau) K_m(\alpha d)] d\tau, \quad A_m(\alpha, d) = -f(1) + 2\varphi'(1) + 1.$$

Поскольку во все полученные соотношения числа Вебера и Прандтля входят только в виде произведения, можно уменьшить количество опреде-



Р и с. 1



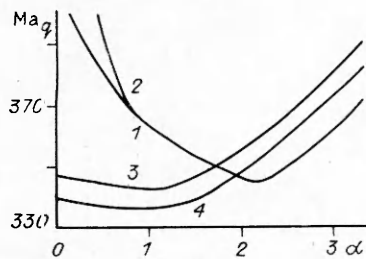
Р и с. 2

ляющих параметров задачи, введя модифицированное число Вебера  $We = We_0 Pr = r_1 \sigma_0 / \rho v \gamma$ .

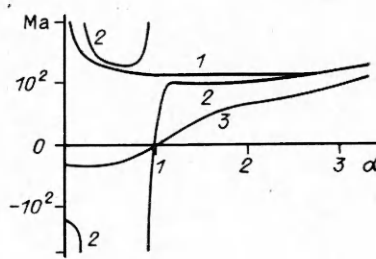
3. Рассмотрим случай  $Ma = 0$ , что соответствует нагреву внутренними источниками тепла с идеально проводящей твердой поверхностью.

На рис. 1 приведены графики  $Ma_q$  от  $\alpha$ , построенные по (2.1) для  $d = 0,1$ . Кривые 1, 2 отвечают случаю недеформируемой свободной границы ( $We = \infty$ ). Для  $Bi = 0$  критическое число Марангони  $Ma_{q*} = 185,7$  (кривая 1) при  $\alpha = 2$ . Если  $Bi = 2$  (кривая 2), то  $Ma_{q*} = 381,8$  при  $\alpha = 2,86$ . Таким образом, при  $Bi = 0$  отсутствует поток тепла через свободную границу. С увеличением теплоотдачи повышается устойчивость равновесия. Предельный случай  $Bi \rightarrow \infty$  означает переход к изотермической свободной поверхности, и потери устойчивости не происходит, критическое число Марангони стремится к бесконечности. Если  $We \neq \infty$ , то существует такое  $\alpha_*$  ( $\alpha_* = 1,31$  для  $Bi = 2$ ,  $We = 10^3$  (кривая 3)), при котором знаменатель в (2.1) обращается в нуль и кривая  $Ma_q(\alpha)$  терпит разрыв. Область устойчивости распадается на две части, при  $\alpha < \alpha_*$  она лежит выше кривой 3, при  $\alpha > \alpha_*$  ограничена сверху кривой 3, а слева — прямой  $\alpha = \alpha_*$ . Левая часть нейтральной кривой имеет максимум  $Ma_q = 840$  при  $\alpha = 0$ , правая часть достигает минимального значения  $Ma_{q*} = 381,2$  при  $\alpha = 2,85$ . Уменьшение  $We$  приводит к понижению устойчивости: точка разрыва  $\alpha_*$  смещается вправо,  $Ma_{q*}$  уменьшаются. Для всех  $We \neq \infty$   $Ma_q(1) = 0$ , и при  $\alpha \rightarrow \infty$  кривые  $Ma_q(\alpha, We)$  асимптотически выходят на кривую для бесконечного числа Вебера. При росте  $d$  запас устойчивости растет, для  $d = 0,3$   $Ma_{q*} = 790,4$  при  $\alpha = 3,68$ , для  $d = 0,5$   $Ma_{q*} = 2014,9$  при  $\alpha = 5,1$ , что объясняется стабилизирующим влиянием вязких сил вблизи твердой поверхности.

Рассмотрим азимутальные возмущения. На рис. 2 приведена зависимость  $Ma_q$  от  $\alpha$  для  $d = 0,1$  и  $Bi = 0$ . Для недеформируемой свободной поверхности кривая 1 ( $m = 1$ ) имеет минимум  $Ma_{q*} = 155,3$  при  $\alpha = 1,21$ , кривая 2 ( $m = 2$ ) принимает минимальное значение  $Ma_{q*} = 172$  при  $\alpha = 0$  и далее монотонно растет. Таким образом, для  $Bi = 0$  и  $We = \infty$  возмущения с  $m = 1$  более опасны, чем возмущения с  $m = 2$ . Для  $m = 1$  кривые  $Ma_q(\alpha, We)$  лежат выше кривой 1, особенно в области малых  $\alpha$ . Это иллюстрирует кривая 3, построенная для  $We = 10^5$ , причем при  $\alpha > 0,4$  обе кривые практически сливаются. Таким образом, для азимутальных возмущений ( $m = 1$ ) учет деформаций свободной границы приводит к повышению устойчивости. Поскольку для  $m = 2$  при уменьшении  $We$  устойчивость понижается, для  $Bi = 0$  существует такое  $We$ , при котором возмущения с  $m = 2$  более опасны, чем возмущения с  $m = 1$ . Как показано на рис. 2, кривая 4 ( $m = 2$ ,  $We = 10^2$ ) имеет минимум  $Ma_{q*} = 142,8$  при  $\alpha = 0$  и лежит ниже кривой 1. Если существует тепловой поток через свободную поверхность ( $Bi \neq 0$ ), то механизм смены наиболее опасных азимутальных мод будет другой. На рис. 3 приведены графики  $Ma_q(\alpha)$  для  $d = 0,1$  и  $Bi = 2$ . Для  $We = \infty$  минимум кривой 3 ( $m = 2$ )  $Ma_{q*} = 342$  при  $\alpha = 1,11$  лежит ниже минимума кривой 1 ( $m = 1$ )  $Ma_{q*} = 344,3$  при  $\alpha = 216$ . Существует такое  $\alpha_*$  (для  $Bi = 2$   $\alpha_* = 1,77$ ), когда при  $\alpha > \alpha_*$  кривая 3 лежит выше кривой 1. Сравнивая кривую 2, построенную для  $We = 10^5$ , и кривую 1, видим, что при



Р и с. 3



Р и с. 4

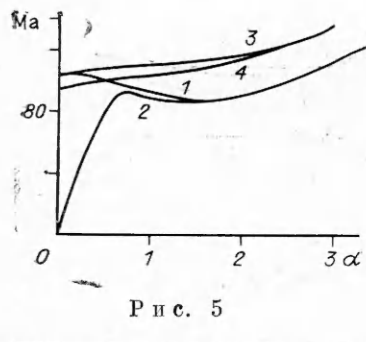
учете деформаций свободной поверхности устойчивость равновесия относительно азимутальных возмущений  $m = 1$  увеличивается. Для  $m = 2$  при уменьшении  $We$  устойчивость понижается. Так,  $Ma_{q*} = 335,8$  (кривая 4,  $We = 10^3$ ,  $Bi = 2$ ) при  $\alpha = 1,06$ . Для последующих азимутальных мод случай недеформируемой свободной границы также будет наиболее устойчивым, при этом уменьшение  $We$  несущественно сказывается на поведении нейтральной кривой. Кроме того, запас устойчивости относительно этих возмущений выше, чем для первых двух азимутальных мод. Например, для  $d = 0,1$ ,  $Bi = 2$ ,  $m = 3$   $Ma_{q*} = 415,9$  при  $\alpha = 0$ , и с ростом  $m$  значения  $Ma_{q*}$  растут.

Таким образом, при  $Bi = 0$  для недеформируемой свободной поверхности наиболее опасными будут возмущения с  $m = 1$ , а при учете деформации свободной границы существует такое критическое значение числа Вебера  $We_*$ , что для  $We < We_*$  наиболее опасными становятся возмущения с  $m = 2$ . При  $Bi \neq 0$  решающим является возрастание волновых чисел, так, при  $\alpha$ , меньших некоторого критического значения  $\alpha_*$ , наиболее опасной будет азимутальная мода  $m = 2$ , а при  $\alpha > \alpha_*$  —  $m = 1$ .

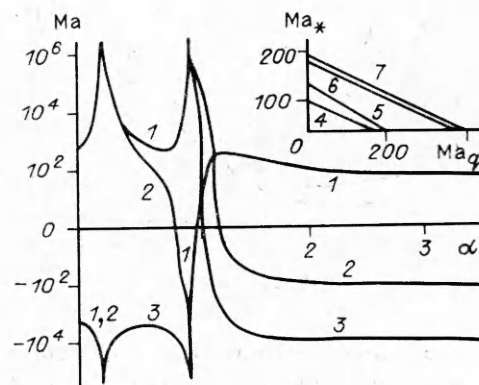
Сравнение с результатами [4], где задавалось условие теплоизоляции на твердом цилиндре, показало, что равновесное состояние с распределением температуры (1.2) более устойчиво, так как в случае идеальной проводимости происходит отвод тепла с твердой поверхности.

4. Рассмотрим устойчивость равновесного состояния цилиндрического слоя жидкости, подогреваемого со стороны внутреннего твердого цилиндра ( $Ma_q = 0$ ). На рис. 4 приведены графики критических чисел Марангони в зависимости от волновых, построенные по (2.1) для  $Bi = 2$ ,  $d = 0,1$ . Кривая 1, соответствующая случаю недеформируемой поверхности, имеет минимум  $Ma_* = 114,5$  при  $\alpha = 2,4$  (ср. для  $Bi = 0$   $Ma_* = 50,3$  при  $\alpha = 1,73$ ). В случае  $We \neq \infty$  знаменатель в (2.1) может дважды обращаться в нуль в зависимости от  $We$ . Как показано на кривой 2, для  $We = 10^4$  точки разрыва будут  $\alpha_* = 0,195$  и  $0,975$ , при этом график  $Ma(\alpha)$  разбивается на три части. Первая лежит ниже нуля, вторая имеет минимум  $Ma = 391,8$  при  $\alpha = 0,87$  и третья, монотонно возрастающая, достигает локального максимума  $Ma = 177$  при  $\alpha = 1,13$  и далее практически сливается с кривой 1. При уменьшении  $We$  первая точка разрыва сдвигается вправо, вторая влево, при этом существует такое  $We_*$  ( $We_* = 1,5 \cdot 10^3$  при  $Bi = 2$ ,  $d = 0,1$ ), для которого точки разрыва исчезают, как показано на кривой 3, построенной при  $We = 10^2$ . Здесь для конечных  $We$   $Ma(1) = 0$ , и при  $\alpha \rightarrow \infty$  кривые  $Ma(\alpha, We)$  асимптотически выходят на кривую для  $We = \infty$ .

Перейдем к описанию азимутальных возмущений. Характерное поведение нейтральных кривых изображено на рис. 5 для  $d = 0,1$ ,  $Bi = 2$ . Кривые 1, 3 соответствуют случаю недеформируемой свободной поверхности. При этом кривая 1 ( $m = 1$ ) начинается с  $Ma = 102$  при  $\alpha = 0$  и имеет минимум  $Ma = 88,2$  при  $\alpha = 1,41$ ; для кривой 3 ( $m = 2$ ) минимальное значение  $Ma_* = 101,9$  достигается при  $\alpha = 0$ . При учете деформаций свободной границы устойчивость понижается, особенно в области малых волновых чисел. Так, для  $m = 1$ ,  $We = 10^4$  (кривая 2)  $Ma_* = 0$  при  $\alpha = 0$ . Для  $m = 2$  влияние деформации поверхности не



Р и с. 5



Р и с. 6

так существенно, например, для  $We = 10^3$  (кривая 4) нейтральная кривая принимает минимальное значение также при  $\alpha = 0$  ( $Ma_* = 96,8$ ). Таким образом, для равновесного состояния цилиндрического слоя жидкости при подогреве внутреннего твердого цилиндра наиболее опасны азимутальные возмущения  $m = 1$ .

Та же задача исследовалась в [3], при этом свободная поверхность считалась недеформируемой. Из-за громоздкости приведенной в [3] формулы не удалось провести сравнение результатов в общем виде. Поэтому проведено численное сравнение графиков  $Ma(\alpha)$  для осесимметрических возмущений. Расчеты проводились при  $Bi = 0$  и совпали с хорошей точностью.

Сопоставление нейтральных кривых  $Ma_q = 0$  с кривыми для  $Ma = 0$ , полученными в [4] для условия теплоизоляции на твердой поверхности, показывает, что равновесное состояние цилиндрического слоя жидкости при нагреве внутренними источниками тепла более устойчиво, чем при подогреве твердой поверхности. Для плоского слоя это обнаружено в [4].

5. Рассмотрим влияние внутренних источников тепла на устойчивость равновесия при подогреве твердой поверхности. На рис. 6 приведены графики зависимости  $Ma$  от  $\alpha$  при  $d = 0,1$ ,  $Bi = 2$ ,  $We = 10^4$ , построенные по (2.1) для  $Ma_q = 10^2$ ;  $10^3$ ;  $10^4$  (кривые 1–3). Здесь, как и в случае  $Ma_q = 0$ , знаменатель дважды обращается в нуль в зависимости от  $We$ . Для  $Bi = 2$ ,  $We = \infty$  на рис. 6 приведена зависимость  $Ma_* = \min_{\alpha} Ma(\alpha)$  от  $Ma_q$  при  $d = 0,1$  (кривая 4) и  $0,3$  (кривая 6).

При  $Ma_q = 0$  получаем критические числа Марангони, определяющие границу устойчивости при отсутствии внутренних источников тепла ( $Ma_* = 114,5$  для  $d = 0,1$  и  $190,7$  для  $0,3$ ). При  $Ma_q = 380$   $Ma_*$  обращается в нуль для  $d = 0,1$  и при  $Ma_q = 790$  — для  $d = 0,3$ . Для сравнения приведем зависимости  $Ma_*$  от  $Ma_q$  при  $m = 1$  и тех же параметрах. При отсутствии внутренних источников тепла ( $Ma_q = 0$ ) в случае азимутальных возмущений  $Ma_* = 88,2$  при  $d = 0,1$  (кривая 5) и  $177,6$  при  $d = 0,3$  (кривая 7). Соответственно  $Ma_*$  обращается в нуль при  $Ma_q = 344$ ,  $d = 0,1$  и  $Ma_q = 770$ ,  $d = 0,3$ .

Таким образом, для равновесного состояния цилиндрического слоя жидкости (1.1) наиболее опасны азимутальные возмущения ( $m = 1$ ). При этом с ростом  $d$  преобладание их ослабевает и для больших значений  $d$  (примерно  $d > 0,5$ ) нейтральные кривые осесимметрических и азимутальных возмущений практически сливаются.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Pearson J. R. A. On convection cells induced by surface tension // J. Fluid Mech.— 1958.— V. 4, N 5.
2. Бадрагинова Л. Г. Термокапиллярная неустойчивость равновесия жидкого слоя, ограниченного свободными поверхностями // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1980.— Вып. 46.

3. Антимиров М. Я., Лиепина В. Р. Возникновение термокапиллярной конвекции в цилиндрическом слое жидкости в условиях невесомости // Изв. АН ЛатвССР. Физика и техника.— 1978.— № 3.
4. Андреев В. К., Родионов А. А., Рябицкий Е. А. Возникновение термокапиллярной конвекции в жидком цилиндре, цилиндрическом и плоском слое под действием внутренних источников тепла // ПМТФ.— 1989.— № 2.
5. Андреев В. К., Рябицкий Е. А. Малые возмущения термокапиллярного движения в случае цилиндра.— Красноярск, 1984.— Деп. ВИНТИ 27.11.84, № 7788-84.

г. Красноярск

Поступила 5/VI 1989 г.,  
в окончательном варианте — 7/VIII 1989 г.

УДК 532.5.013.4:536.252

Н. В. Петровская, А. К. Фадеев, В. И. Юдович

### ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ВРАЩАТЕЛЬНО-ГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ

Рассматривается задача о двумерной конвекции вязкой несжимаемой жидкости во вращающемся горизонтальном слое со свободными изотермическими границами. Приближенные решения разыскиваются методом Галеркина. Численно изучаются устойчивость и бифуркации стационарных решений при изменении числа Рэлея  $R$ . Расчет задачи методом Галеркина проводился ранее в [1—3] (см. также [4, 5]). В настоящей работе изучены переходы в классе стационарных решений и вычислены соответствующие бифуркационные значения  $R$ .

Результаты даны для галеркинской системы 62 уравнений. Равновесия определяются методом Ньютона с продолжением по параметру  $R$ . Находятся бифуркационные значения  $R$ , отвечающие либо рождению пары равновесий, либо смене типа устойчивости равновесия. Остальные параметры (числа Прандтля и Тейлора, волновое число) с использованием результатов [6] фиксированы так, что потеря устойчивости относительно механического равновесия с ростом  $R$  монотонна, вторичные стационарные решения отвечают в докритическую область и неустойчивы.

Тем не менее обнаружено несколько ветвей устойчивых стационарных движений. Способы их возникновения при монотонном возрастании  $R$  различны. В частности, представляется интересным следующий механизм: рождение «из воздуха» пары неустойчивых равновесий и затем возврат к устойчивости в результате бифуркации Андронова — Хопфа.

1. Пусть вязкая теплопроводная жидкость заполняет горизонтальный слой толщины  $H$  со свободными недеформируемыми границами. Температура на нижней и верхней границах слоя  $T_1$  и  $T_2$  соответственно. В основном режиме жидкость вращается как твердое тело с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг вертикальной оси. Движение жидкости описывается уравнениями свободной конвекции в приближении Обербека — Буссинеска [7, 4], центробежной силой пренебрегаем.

В декартовой системе координат  $(x, y, z)$ , вращающейся вместе со слоем, поля относительной скорости  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  и температуры принимаются не зависящими от координаты  $y$ . Вводится функция тока  $\psi$ :  $v_1 = \partial\psi/\partial z$ ,  $v_3 = -\partial\psi/\partial x$ . Уравнения движения имеют следующий безразмерный вид:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \partial\Delta\psi/\partial t &= J(\psi, \Delta\psi) + \Delta^2\psi + \tau\partial v/\partial z - G\partial T/\partial x, \\ \partial v/\partial t &= J(\psi, v) + \Delta v - \partial\psi/\partial z, \quad \partial T/\partial t = J(\psi, T) + \text{Pr}^{-1}\Delta T - \partial\psi/\partial x. \end{aligned}$$

Здесь за единицу измерения длины, времени  $t$ , скорости  $\mathbf{v}$  и отклонения температуры от линейного профиля  $T$  выбраны  $H$ ,  $H^2/\nu$ ,  $\nu/H$ ,  $T_1 - T_2$ ;  $v = \nu_2/\text{Re}$ ;  $\text{Re} = 2\Omega H/\nu$  — вращательное число Рейнольдса;  $\tau = \text{Re}^2$  — число Тейлора;  $G = g\beta H^3(T_1 - T_2)/\nu^2$  — число Грасгофа;  $\text{Pr} = \nu/\chi$  — число Прандтля;  $\nu$ ,  $\beta$ ,  $\chi$  — коэффициенты кинематической вязкости, теплового расширения и температуропроводности;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $J(\psi, \theta) = (\partial\psi/\partial x)(\partial\theta/\partial z) - (\partial\psi/\partial z)(\partial\theta/\partial x)$ .

На границах слоя  $z = 0, 1$  выполняются условия

$$(1.2) \quad \psi = \partial^2\psi/\partial z^2 = \partial v/\partial z = T = 0.$$

Функции  $\psi$ ,  $v$ ,  $T$  предполагаются периодическими по  $x$  с периодом  $L = 2\pi/\alpha_0$ . Ввиду (1.2) их можно считать определенными на всей плос-