

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ВЛИЯНИЯ ЭКМАНОВСКОГО СЛОЯ НА ДИНАМИКУ КРУПНОМАСШТАБНЫХ ВИХРЕЙ В МЕЛКОЙ ВОДЕ

Двумерные уравнения, описывающие вихревые течения в тонких горизонтальных слоях жидкости, известные как уравнения мелкой воды [1], справедливы для крупномасштабных движений, когда влияние неоднородности потоков по вертикали несущественно. Попытки более адекватного описания горизонтальных слоев в рамках этого приближения приводят к необходимости учета особенностей структуры гидродинамических полей поперек слоя. Один из возможных способов вывода двумерных уравнений, описывающих существенно трехмерные течения, развит в [2, 3], где гидродинамические поля представлены конечным рядом Тейлора по горизонтальным координатам, а поперечные профили полей определяются из автомодельных точных решений исходных уравнений.

Основные неоднородности скорости сосредоточены в вязких пограничных слоях, формирующихся вблизи твердых горизонтальных границ. Обычно для асимптотически тонких вязких пограничных слоев их влияние на эволюцию завихренности сводится к дополнительной диссипации энергии, описываемой с помощью линейного трения. В [4—6] показано, что такая параметризация удовлетворительно описывает реальные эксперименты в невращающейся жидкости, в том числе при наличии поперечного магнитного поля, когда вблизи границ возникает гартмановский пограничный слой [6]. Очевидность такого предположения привела к распространению модели линейного трения и на вращающиеся системы [1]. Однако экмановские слои обладают существенным отличием от пограничных слоев в невращающихся системах [7]. Их особенностью является несовпадение направлений движения жидкости внутри и вне ядра потока. Ниже показано, что это приводит к переносу завихренности осредненного потока в направлении, перпендикулярном направлению средней по толщине слоя скорости. Этот эффект дает зависимость коэффициента трения от интенсивности вихревого движения и обеспечивает преимущественное распространение циклонических вихрей ( $\omega/f > 0$ ,  $\omega$  — завихренность,  $f$  — удвоенная частота вращения слоя). Характер эволюции конкретного вихря зависит и от локальной структуры крупномасштабного поля скорости, на фоне которого он возник. На зависимость толщины слоя Экмана от локальной завихренности течения указывалось в [8].

Рассматривается тонкий горизонтальный слой жидкости, вращающийся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $f/2$ . Уравнения движения жидкости запишем как

$$(1) \quad \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + f \mathbf{n} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - g \mathbf{n} + \nu (\Delta \mathbf{v} + \partial_z^2 \mathbf{v}), \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость с компонентами  $u, v, w$  вдоль осей  $x, y, z$  соответственно;  $\mathbf{n}$  — вектор нормали, направленный вдоль оси  $z$ ;  $P$  — давление;  $\rho$  — плотность;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\nu$  — коэффициент вязкости. На горизонтальных границах слоя выполняются следующие условия:

$$(2) \quad v = u = w = 0, \quad z = 0, \quad \partial_z v = \partial_z u = w = 0, \quad z = h.$$

Уравнения (1) широко используются в геофизических задачах для описания движения в тонких сферических слоях жидкости, находящихся на поверхности самогравитирующих тел, когда размеры области значительно меньше радиуса сферы. В этом случае центробежные силы компенсируются компонентой поля тяжести, направленной вдоль горизонтальной границы, а параметр Кориолиса  $f$  равен проекции угловой скорости на нормаль к поверхности (так называемое приближение  $f$ -плоскости [1]). Принятые граничные условия, исключая вертикальную скорость на свободной верхней границе, накладывают ограничения на характерные времена  $\tau$  и масштабы  $l$  рассматриваемых процессов. Фактически игнорируются движения, связанные с гравитационными волнами на поверхности жидкости, и движения, масштабы которых сравнимы с толщиной слоя. Таким образом,

$$(3) \quad \tau \gg 1/f, \quad h \ll l \ll L_R = \sqrt{gh}/f.$$

В силу недеформируемости верхней границы средняя поперек слоя горизонтальная скорость бездивергентна:  $u = -\partial_y \psi$ ,  $v = \partial_x \psi$ , что после

усреднения (1) по  $z$  и исключения давления позволяет получить уравнение для завихренности

$$(4) \quad \partial_t \Delta \psi + \{\psi, \Delta \psi\} = \nu \Delta^2 \psi + \Phi.$$

Здесь  $\{\psi, \Delta \psi\} = \partial_x \psi \partial_y \Delta \psi - \partial_y \psi \partial_x \Delta \psi$  — скобки Пуассона;  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$  — двумерный оператор Лапласа;  $\Phi$  — функционал:

$$\Phi = \int_0^h [\partial_x (\nu \partial_z^2 v - u \partial_x v - v \partial_y v) - \partial_y (\nu \partial_z^2 u - u \partial_x u - v \partial_y u)] dz + \{\psi, \Delta \psi\}.$$

Для замыкания (4) необходимо найти зависимость  $\Phi$  от функции тока  $\psi$ . В соответствии с [3] введем малый параметр  $\delta = h/l$  ( $l$  — характерный горизонтальный масштаб исследуемых течений) и разложим функцию тока в ряд Тейлора по координатам  $x, y$ .

Для крупномасштабных течений ( $\delta \ll 1$ ) с точностью до  $O(\delta^2)$  можно ограничиться линейными членами разложения. Структура течений  $u, v$  в этом случае определяется точным решением, впервые полученным Экманом и для граничных условий (2) имеющим вид

$$\begin{cases} u \\ v \end{cases} = \mp \partial_{y,x} \psi + e^{-kz/h} \left[ c_{1,2} \cos \frac{kz}{h} \pm c_{2,1} \sin \frac{kz}{h} \right] + e^{kz/h} \left[ \pm c_{3,4} \cos \frac{kz}{h} + c_{4,3} \sin \frac{kz}{h} \right],$$

где  $k^{-1} = h_E/h$  — относительная толщина пограничного слоя;  $h_E = \sqrt{\nu l/2}$ . Коэффициенты  $c_k$  определяются как

$$\begin{aligned} 2c_1 &= -\varepsilon_1 \partial_y \psi + (1 - \varepsilon_2) \partial_x \psi, & 2c_2 &= (1 - \varepsilon_2) \partial_y \psi - \varepsilon_1 \partial_x \psi, \\ 2c_3 &= \varepsilon_1 \partial_y \psi - (1 + \varepsilon_2) \partial_x \psi, & 2c_4 &= -(1 + \varepsilon_2) \partial_y \psi - \varepsilon_1 \partial_x \psi, \\ \varepsilon \varepsilon_1 &= \cos k \sin k, & \varepsilon \varepsilon_2 &= \operatorname{ch} k \operatorname{sh} k, & \varepsilon &= \cos^2 k \operatorname{ch}^2 k + \sin^2 k \operatorname{sh}^2 k. \end{aligned}$$

Решение справедливо, когда мала роль нелинейных членов, что отвечает требованию  $Ro = U/fl \ll 1$  ( $Ro$  — число Россби,  $U$  — характерная скорость). Эта оценка эквивалентна вытекающему из требования недеформируемости верхней границы условию (3). Использование решения Экмана для аппроксимации профиля скорости позволяет вычислить функционал  $\Phi$  и замкнуть уравнение (4). Для быстрого вращения ( $k \gg 1$ , иначе, отсутствует выраженный слой Экмана) имеем

$$(5) \quad \Phi = \frac{6}{k} \{\psi, \Delta \psi\} + \frac{2}{k} \nabla (\Delta \psi \nabla \psi) - \frac{f}{2k} \Delta \psi.$$

Первое слагаемое дает малую добавку к нелинейному члену в левой части (4), а два остальных имеют один порядок малости при  $\Delta \psi \sim f$ . Подстановка (5) в (4) дает

$$(6) \quad \partial_t \Delta \psi + \kappa \{\psi, \Delta \psi\} = \nu \Delta^2 \psi - \nabla \kappa \nabla \psi.$$

Здесь  $\kappa$  — нелинейный коэффициент трения, связанный с завихренностью:  $\kappa = \mu(1 - \alpha \Delta \psi)$ , где  $\mu = f/2k$ ,  $\gamma = 1 - \delta/k$ ,  $\alpha = 4/f$ . При  $\Delta \psi \ll f$  коэффициент  $\kappa \simeq \mu$  и совпадает с общепринятой параметризацией линейного трения.

Из вида уравнений (6) следуют два эффекта, которые должны проявляться в тонких вращающихся слоях жидкости. Во-первых, вихри разных знаков в различной степени подвержены действию вязкой диссипации в погранслое, что должно приводить к преимущественному распространению циклонов ( $\Delta \psi/f > 0$ ). Во-вторых, для достаточно интенсивных циклонических вихрей  $\kappa$  становится отрицательной, что отвечает притоку энергии в вихри данного масштаба. Заметим, что в геофизических течениях имеют место как асимметрия циклонов и антициклонов, так и явление усиления крупномасштабных вихрей, известное как эффект отрицательной вязкости [1].

Для исследования свойств решений модельного уравнения (6) удобно перейти к безразмерным переменным, используя в качестве единиц из-

мерения длины, времени и функции тока  $\sqrt{v/\mu}$ ,  $1/\mu$ ,  $v/\mu\alpha$ . Тогда (6) примет вид

$$(7) \quad \partial_t \omega + \frac{2v}{x} \{\psi, \omega\} = \nabla [\nabla \omega - (1 - \omega) \nabla \psi], \quad \omega = \Delta \psi$$

( $k$  — обратная относительная толщина пограничного слоя). Простейшее решение (7) описывает течения с однородной завихренностью, величина которой зависит от времени как  $\omega = \omega_0 [\omega_0 + (1 - \omega_0) e^{t-t_0}]^{-1}$ , где  $\omega_0$  — завихренность в начальный момент времени  $t = t_0$ . Стационарные решения существуют только при  $\omega_0 = 0$  и  $\omega_0 = 1$ . Если  $\omega_0 \in (1, -\infty)$ , то завихренность монотонно убывает до нуля, а при  $\omega_0 > 1$  становится бесконечно большой за конечное время. Последнее свидетельствует о наличии механизма неустойчивости и возможном появлении уединенных вихревых решений.

Стационарные решения уравнения (7), что несложно проверить прямой подстановкой, удовлетворяют нелинейному двумерному уравнению Клейна—Гордона

$$(8) \quad \omega = 1 + C e^{-\psi}$$

( $C$  — произвольная постоянная).

Если ограничиться случаем одномерных струйных течений  $\psi = \psi(y)$ , то (8) точно интегрируется:

$$(9) \quad \pm \sqrt{2} y = \int \frac{d\psi}{\sqrt{\psi - C e^{-\psi}}}.$$

Интеграл (9) не выражается в элементарных функциях, но позволяет полностью выяснить свойства полученных решений. В указанном случае одномерных струй (8) описывает циклонические солитоны, существующие на фоне потока с постоянным сдвигом ( $\omega = 1$ ). Для слабых и сильных возмущений структура солитонов задается следующими асимптотическими выражениями:

$$\omega = 1 + \varepsilon e^{-y^2/2}, \quad \omega = 1 + \frac{2}{\varepsilon^2 \operatorname{ch}^2(y/\varepsilon)}, \quad |\varepsilon| \ll 1.$$

Антициклонические решения возможны только при наличии в потоке разрывов скорости ( $\omega = 1 - 2k^2 \cos^{-2} ky$ ). Характерный масштаб слабых солитонов равен единице, а для сильных возмущений стационарного фонового потока ( $\omega = 1$ ) обратно пропорционален корню из амплитуды возмущения. В размерных переменных характерный масштаб уединенной струи равен  $\sqrt{v/\mu}$ , что соответствует масштабам вязких пограничных слоев в обычной мелкой воде [1]. Заметим, что параметр  $\sqrt{v/\mu} h^2$ , характеризующий относительные размеры солитонов, много меньше единицы для ламинарных течений и много ее больше при использовании коэффициентов турбулентного обмена  $v = v_T$  [1]. Это позволяет надеяться на справедливость излагаемой теории применительно к турбулентным потокам.

Рассмотрим влияние нелинейного вихревого трения на поведение мезомасштабной турбулентности во вращающемся слое жидкости. В случае, когда слой турбулизован и по толщине, эффект переноса завихренности поперек линий тока осредненного течения сохраняется. Отличие в том, что величина  $k = h/h_E$  определяется как реально наблюдаемая относительная толщина турбулентного слоя Экмана. Турбулентные течения такого типа имеют отношение к геострофическим течениям.

Крупномасштабная геострофическая турбулентность квазидвумерна, но присутствие таких специфических факторов, как  $\beta$ -эффект, бароклинность, стратификация, затрудняет интерпретацию ее свойств с позиций двумерной турбулентности [9]. Рассматриваемый фактор в определенном смысле наиболее прост — он связан только с диссипативными эффектами на границе и должен проявляться в любом вращающемся слое.

Влияние линейного диссипативного члена на свойства двумерных турбулентных потоков исследовалось уже в ранних работах по численному моделированию двумерной турбулентности [10]. В [10] показана возможность реализации в системе с линейным трением интервала переноса энтропии к мелким масштабам со спектральным распределением энергии  $E(k) \sim k^{-3}$  ( $k$  — волновое число). Влияние линейного трения на инерционный интервал переноса энергии  $E(k) \sim k^{-5/3}$  с характерным для двумерной турбулентности обратным каскадом энергии исследовалось экспериментально в [6]. В опытах с помещенным в поперечное магнитное поле слоем ртути автору [6] удалось не только констатировать наличие обратного каскада, но и получить зависимость колмогоровской константы от величины линейного трения, задаваемой магнитным полем.

Полное изучение свойств турбулентных режимов уравнения [6] требует реализации численных экспериментов на суперкомпьютерах и не является целью данной работы. В то же время некоторые общие свойства однородных турбулентных течений, описываемых такими уравнениями, можно рассмотреть на основе простых малопараметрических моделей.

Основные черты процессов перераспределения энергии между движениями различных масштабов удается описать с помощью каскадных уравнений для коллективных переменных  $A_i$ , каждая из которых характеризует пульсации поля скорости в некотором интервале волновых чисел. Каскадные уравнения предельно сокращают размерность систем, описывающих турбулентные течения в широком диапазоне волновых чисел, и имеют вид

$$(10) \quad \partial_t A_i = \sum_{jk} X_{ijk} A_j A_k + Y_i A_i + f_i,$$

где  $f_i$  характеризуют источники энергии в соответствующих интервалах спектра. Каскадные модели типа [10] строились рядом авторов (см., например, [11—13]). Отличаясь способами разбиения пространства волновых векторов и определения переменных  $A_i$ , ограничениями рассматриваемых триадных взаимодействий и другими деталями, модели сохраняют фундаментальные свойства исходных уравнений движения жидкости: удовлетворяют в бездиссипативном пределе законам сохранения, адекватно описывают нелинейные взаимодействия между выделенной тройкой мод.

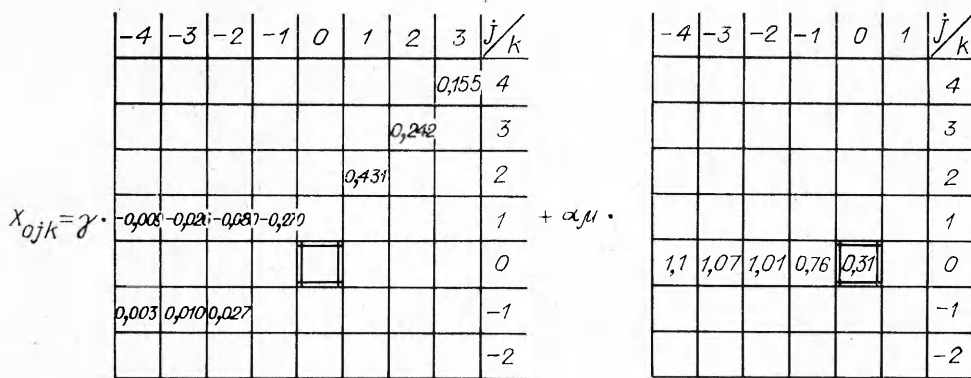
Один из способов получения уравнений (10) состоит в следующем [13, 14]. Пространство волновых чисел разбивается на октавы  $k_i = 2k_{i-1}$ , двумерные турбулентные вихри описываются с помощью базисных функций  $\psi_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$  таких, что их спектр локализуется в соответствующем кольце  $k_{i-1} < |\mathbf{k}| < k_i$ . Здесь  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор центра вихря, а увеличение индекса  $i$  на единицу уменьшает размер вихря вдвое. Для фиксированной тройки вихрей и исходных уравнений (6) имеем

$$y_i = \int \Delta \psi_i [\nu \Delta^2 \psi_i - \mu \Delta \psi_i] d\mathbf{r},$$

$$x_{ijk} = - \int \Delta \psi_i [\nu \{\psi_j, \Delta \psi_k\} + \alpha \mu (\Delta \psi_j \Delta \psi_k + \nabla \psi_j \nabla \Delta \psi_k)] d\mathbf{r}.$$

Под  $A_i$  понимают коллективную характеристику всех вихрей  $i$ -го размера, так что плотность энергии вихрей этого масштаба  $E_i = \langle A_i^2 \rangle$ . Элементы матрицы  $X_{ijk}$  определяются из среднеквадратичных значений  $x_{ijk}$ , получаемых при всевозможных взаимных расположениях вихрей  $i, j, k$ , и из условия сохранения энергии и энтропии в невязком пределе [15].

Характерные отличия турбулентных режимов уравнений (6) от обычной мелкой воды можно проследить по виду матрицы  $X_{ijk}$  в том и другом случае. Структуру матрицы иллюстрирует рис. 1, на котором приведена центральная часть матрицы для  $i = 0$  (остальные элементы можно получить из соотношения  $X_{ijk} = 2^i X_{0, j-2^i, k-2^i}$ ) [13]. Левая часть матрицы описывает поведение двумерной турбулентности [15] и при  $Y_i = 0$  обеспечивает уравнениям (10) сохранение энергии и энтропии. Отметим, что в ней



Р и с. 1

отсутствуют диагональные члены, т. е. элементы матрицы равны нулю при совпадении любой пары индексов.

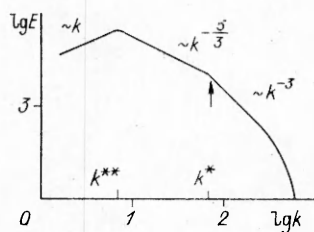
При  $Y_i \neq 0$ , но нулевой  $\alpha$  уравнения (10) описывают двумерную турбулентность с линейным трением, спектральные свойства которой поясняет рис. 2. В случае возбуждения движения на масштабах, характеризуемых волновым числом  $k^*$ , вправо от него устанавливается спектр вида  $E(k) \sim k^{-3}$ , сопровождаемый переносом завихренности в мелкомасштабное движение. Одновременно для  $k < k^*$  реализуется обратный каскад энергии с распределением  $E(k) \sim k^{-5/3}$ . Энергия достигает максимального значения при  $k = k^{**}$ . Положение максимума определяется мощностью источников энергии и эффективностью линейного трения. В низкочастотной части ( $k < k^{**}$ ) спектр тяготеет к зависимости  $E(k) \sim k$ .

При  $\alpha \neq 0$  становится существенной вторая часть матрицы  $X_{ijk}$  (см. рис. 1). В ней наиболее важны элементы диагонали  $X_{iji}$ , которые с ростом разности  $i - j$  быстро выходят на асимптотику  $X_{0j0} = 1,1\alpha$ . Остальные элементы матрицы с учетом реально достижимых соотношений между коэффициентами  $\alpha$  и  $\gamma$  незначительны и на рис. 1 не обозначены.

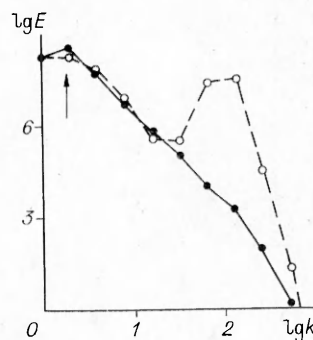
Численное решение уравнений (10) для различных значений  $\alpha$  показали, что интегральные свойства турбулентных потоков слабо зависят от  $\alpha$ . При случайном наборе знаков переменных  $A_i$  уравнения по-прежнему допускают решение, отвечающее закону  $E(k) \sim k^{-3}$ , а также реализуют обратный каскад энергии при  $k < k^*$ . В усредненных по времени спектрах сохраняется максимум, положение которого практически не зависит от  $\alpha$ . В то же время локальные свойства потока претерпевают значительные изменения.

Уравнения (10) в режимах, соответствующих развитой турбулентности, не имеют устойчивых стационарных решений. Значения  $A_i$  совершают неупорядоченные колебания, а спектральные распределения получаются путем вычисления средних по времени значений  $\langle A_i^2 \rangle$  [13, 14]. В потоке конкретный вихрь эволюционирует на фоне суммарной завихренности, создаваемой всеми вихрями большого масштаба. С учетом описываемого эффекта это дает в (10) неубывающую диагональ  $X_{iji}$  и приводит к тому, что характер развития данной величины  $A_i$  в значительной мере зависит от того, как складываются направления вращения, т. е. знаки во всей цепочке  $A_j$  для  $j \leq i$ . В моменты, когда цепочка складывается из положительных  $A_j$ , вихрь может получить существенную порцию энергии, в то время как преобладание отрицательных значений приводит к росту диссипации энергии.

На рис. 3 приведен пример вычислений, соответствующих возбуждению крупномасштабного движения. При  $\alpha = 0$  в системе устанавливается режим, который в значительном диапазоне волновых чисел  $k > k^*$  дает спектр, близкий к закону  $k^{-3}$  (сплошная линия). Штриховой линией показан один из всплесков энергии движения на промежуточных масштабах, полученный при тех же условиях подкачки энергии в движение



Р и с. 2



Р и с. 3

и  $\alpha_m = 0,1$ . Временные всплески в решении каскадных уравнений отвечают сильной пространственной перемежаемости течений, описываемых уравнением (6).

Полученные результаты не противоречат общепринятым представлениям о характере геострофической турбулентности [1, 9]. В потоке имеет место обратный каскад энергии к макромасштабам, однако не он определяет динамику энергоемких структур мезомасштаба, судьба которых в большей мере зависит от конкретной структуры крупномасштабного поля завихренности. При этом наибольшее развитие получают циклонические вихри.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гилл А. Динамика атмосферы и океана: в 2 т. — М.: Мир, 1986.
2. Аристов С. П., Фрик П. Г. Крупномасштабная турбулентность в тонком неизотермическом слое вращающейся жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1988.— № 4.
3. Аристов С. П. Об одном механизме формирования тонкой структуры приповерхностного слоя океана в Арктике // Тез. Всесоюз. семинара «Океанологические фронты северных морей». — М.: Ин-т океанологии, 1989.
4. Любимов Д. В., Путин Г. Ф., Чернатыйский В. И. О конвективных движениях в ячейке Хеле — Шоу // ДАН СССР.— 1977.— Т. 235, № 3.
5. Бараников В. А., Фрик П. Г., Шайдуров В. Г. Спектральные характеристики двумерной турбулентной конвекции в вертикальной щели // ПМТФ.— 1988.— № 2.
6. Sommeria J. Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box // J. Fluid Mech.— 1986.— V. 170.— P. 139.
7. McWilliams J. C. Statistical properties of decaying geostrophic turbulence // J. Fluid. Mech.— 1989.— V. 198.— P. 199.
8. Panchev S., Spassova T. S. A barotropic model of the Ekman planetary boundary layer based on the geostrophic momentum approximation // Boundary-layer meteorology.— 1987.— V. 40.— P. 339.
9. Rhines P. B. Geostrophic turbulence // Ann. Rev. Fluid Mech.— 1979.— V. 11— P. 401.
10. Lilly D. Numerical simulation studies of two-dimensional turbulence. I. Models of statistical study turbulence // Geophys. Fluid Dyn.— 1972.— V. 3, N 4.
11. Деснянский В. Н., Новиков Е. А. Моделирование каскадных процессов в турбулентных течениях // ПММ.— 1974.— Т. 38, № 3.
12. Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их применение.— М.: Наука, 1981.
13. Зимин В. Д., Фрик П. Г. Турбулентная конвекция.— М.: Наука, 1988.
14. Qian J. Cascade model of turbulence // Phys. Fluids.— 1988.— V. 31, N 10.
15. Фрик П. Г. Иерархическая модель двумерной турбулентности // Магнит. гидродинамика.— 1983.— № 1.

г. Пермь

Поступила 31/V 1989 г.,  
в окончательном варианте — 15/XI 1989 г.