ПМТФ, № 5, 1972

УДК 533.952;534.2

О НЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ И НИЗКОЧАСТОТНЫХ ВОЛН

В. Е. Захаров, А. М. Рубенчик

(Новосибирск)

В работе изучается взаимодействие высокочастотных волн с низкочастотными (звуком). В целях общности изложение ведется на языке гамильтонова формализма. Исследована задача о неустойчивости высокочастотной волны. Полученные общие результаты применяются к изучению устойчивости электромагнитных волн в плазме и диэлектриках.

Рассматривается распространение волн в средах со слабой дисперсией. Показано, что они неустойчивы. Исследуется возможность самофокусировки волн.

Во взаимодействии волн в нелинейных средах часто участвуют два типа волн — высокочастотные (ВЧ) и низкочастотные (НЧ). (В большинстве случаев низкочастотной волной является звук.) Подобная ситуация возникает, например, при взаимодействии электромагнитных волн и звука, в диэлектрике, спиновых и упругих волн в ферромагнетике, при взаимодействии различных типов волн в плазме.

Взаимодействие ВЧ и НЧ волн в различных средах целесообразно рассматривать с единой точки зрения. Такого рода попытка была сделана Л. И. Рудаковым и А. А. Веденовым [1] на базе лагранжевого формализма для нелинейной среды (см. также [2, 3]). Однако в [1] используется для ВЧ волны приближение геометрической оптики, которое во многих отношениях является недостаточным.

В данной работе взаимодействие ВЧ и НЧ волн изучается в произвольной среде, обладающей функцией Гамильтона — энергией, выраженной через канонические переменные.

Такая постановка задачи оказывается достаточно содержательной, так как канонические переменные введены для многих сред: для двухжидкостной гидродинамической модели плазмы [4], для магнитной гидродинамики [5], для волн на поверхности жидкости [6], для ферромагнетиков [7, 8]. Введение канонических переменных позволяет с общей точки зрения рассмотреть задачу о неустойчивости интенсивной высокочастотной волны в среде, в которой могут распространяться низкочастотные волны.

Отдельные случаи этой неустойчивости изучались и раньше — распадная неустойчивость лэнгмюровской волны [9], вынужденное рассеяние Мандельштама — Бриллюэна [10,11], «электрозвуковая» неустойчивость электромагнитной волны в плазме [12–15]. В данной работе показано (п. 1), что при не слишком большой амплитуде ВЧ волны гамильтониан взаимодействия с НЧ волнами имеет простой вид, причем в рамках этого гамильтониана задача о неустойчивости ВЧ волны решается точно. Наиболее простыми являются неустойчивости, приводящие к нарастанию ВЧ волн, рассеянных на значительный угол. Эти неустойчивости являются аналогом ВРМБ и для частного случая электромагнитных волн в диэлектрике переходят в ВРМБ при малых амплитудах ВЧ волны. Как и ВРМБ, они могут развиваться лишь для достаточно длинных когерентных пакетов. При уменьшении угла рассеяния неустойчивость приобретает другой характер и сохраняется для стационарной волны со случайной фазой.

Эта неустойчивость приводит к нарастанию поперечных неоднородностей среды и в дальнейшем к «разрушению» ВЧ волны — образованию локальных особенностей амплитуды. К аналогичным эффектам приводит и «собственная» нелинейность высокочастотных волн (для электромагнитных волн — квадратичная по полю добавка к показателю преломления), которая здесь с самого начала включена в рассмотрение.

Результаты общей теории применяются в п. 4 к взаимодействию электромагнитных волн и звука в плазме и диэлектриках. В п. 5 решена задача об устойчивости волны в гидродинамике со слабой дисперсией звука. Примерами таких волн являются ионнозвуковые волны в плазме и волны на поверхности неглубокой жидкости. Будет показано, что эти волны устойчивы в одномерной задаче и неустойчивы в неодномерной.

1. Основная модель. Рассмотрим взаимодействие высокочастотных и низкочастотных волн в консервативной среде, обладающей функцией Гамильтона H. Введем комплексные нормальные амплитуды a_k для ВЧ волн и b_k для НЧ волн. Квадратичная часть гамильтониана среды имеет вид

$$H_0 = \int \omega_k a_k a_k^* \, d\mathbf{k} + \int \Omega_k b_k b_k^* \, d\mathbf{k}$$

где ω_k, Ω_k — законы дисперсии ВЧ и НЧ волн. Гамильтониан взаимодействия волн можно представить в виде

$$H_i = H_i^{(1)} + H_i^{(2)} + H_i^{(3)}$$

Здесь $H_i^{(1)}$ описывает взаимодействие ВЧ волн между собой, $H_i^{(2)}$ — взаимодействие ВЧ и НЧ волн, $H_i^{(3)}$ — взаимодействие НЧ волн между собой. Уравнения для величин $a\mathbf{k}$, $b\mathbf{k}$ получаются варьированием гамильтониана $H = H_0 + H_i$ по правилу

$$\frac{\partial a_\mathbf{k}}{\partial t} = - i \frac{\delta H}{\delta a_\mathbf{k}^*}, \qquad \frac{\partial b_\mathbf{k}}{\partial t} = - i \frac{\delta H}{\delta b_\mathbf{k}^*} \tag{1.1}$$

В линейном приближении амплитуды волн имеют временную зависимость

$$a_\mathbf{k} = a_\mathbf{k}^{(0)} \exp\left[- i\omega(k_0)\, t\right]$$
$$b_\mathbf{k} = b_\mathbf{k}^{(0)} \exp\left[- i\Omega(k_0)\, t\right]$$

В дальнейшем будем предполагать, что амплитуда НЧ волн мала ($b_\mathbf{k} \ll a_\mathbf{k}$), поэтому пренебрежем гамильтонианом взаимодействия НЧ волн $H_i^{(3)}$, а в $H_i^{(2)}$ оставим только члены, линейные по $b_\mathbf{k}$. Кроме того, ограничимся рассмотрением членов низшего порядка по $a_\mathbf{k}$, не исчезающих при усреднении по периоду ВЧ волны. Эти требования позволяют определить гамильтониан

$$H_i^{(2)} = \int [\Gamma_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} b_\mathbf{k} a_{\mathbf{k}_1}^* a_{\mathbf{k}_2} + (\ )]^* \, \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2} \, d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 \tag{1.2}$$

Здесь ( )* — комплексно сопряженное выражение.

Заметим, что теория применима и в случае, когда

$$H_i^{(2)} \gg \int \Omega_\mathbf{k} b_\mathbf{k} b_\mathbf{k} \, d\mathbf{k}$$

и низкочастотные волны сильно «перестраиваются» под действием высокочастотных. Гамильтониан $H_i^{(1)}$ выберем в виде

$$H_i^{(1)} = \frac{1}{2} \int W_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} a_\mathbf{k}^* a_{\mathbf{k}_1}^* a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_3} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3} \, d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\mathbf{k}_3 \tag{1.3}$$

Такой вид $H_i^{(1)}$ осуществляется в среде с кубической нелинейностью, а также в некоторых случаях и в средах с квадратичной нелинейностью (см. п. 5). Уравнения движения (1.1) имеют вид

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i\omega_k a_k = -i\int (\Gamma_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}\mathbf{k}_2} b_{\mathbf{k}_1} + \Gamma_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}}{}^* b_{-\mathbf{k}_1}{}^*)\, a_{\mathbf{k}_2} \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 -$$

$$- i\int W_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_1}{}^* a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_3} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\mathbf{k}_3 \qquad (1.4)$$

$$\frac{\partial b_{\mathbf{k}}}{\partial t} + i\Omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} = -i\int \overset{*}{\Gamma}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}{}^* \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2$$

Гамильтониан взаимодействия существенно упрощается, если ВЧ волны образуют узкий в k-пространстве пакет вблизи $k \sim k_0$. Тогда можно положить

$$W_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} \approx W_{\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0} = q$$

$$\Gamma_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} \approx \Gamma_{\mathbf{k}\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0} = f(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$$

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_0) + \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}\delta\mathbf{k} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k_\alpha \partial k_\beta}\delta k_\alpha \delta k_\beta$$

В том случае, когда НЧ волны представляют собой звук, $\Omega = sk$, можно в явном виде вычислить функцию $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$ и вместе с ней полный гамильтониан системы. Для этого от величины $a_{\mathbf{k}}$ перейдем к величине

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int a_{\mathbf{k}} \exp(i\omega(k_0)t + i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)r)\, d\mathbf{k} \qquad (1.5)$$

а от амплитуды $b_{\mathbf{k}}$ — к вариации плотности $\delta\rho$ и скорости $\mathbf{v}$ среды

$$\delta\rho = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{\rho_0{}^{1/2} k^{1/2}}{\sqrt{2}\, s^{1/2}} (b_{\mathbf{k}} + b_{-\mathbf{k}}{}^*)\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}\, d\mathbf{k} \qquad (1.6)$$

$$\mathbf{v} = -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{\mathbf{k}}{k^{1/2}} \frac{s^{1/2}}{\sqrt{2}\,\rho_0{}^{1/2}} (b_{\mathbf{k}} - b_{-\mathbf{k}}{}^*)\, e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\, d\mathbf{k}$$

Энергия узкого в k-пространстве пакета ВЧ волн

$$\varepsilon \approx \omega(\mathbf{k}_0)\int a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}{}^*\, d\mathbf{k}$$

ее локальная плотность есть $\omega(\mathbf{k}_0)\,|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$.

В присутствии звуковой волны величина $\omega(\mathbf{k}_0)$ приобретает вариацию

$$\delta\omega(\mathbf{k}_0) = \frac{\partial\omega(\mathbf{k}_0)}{\partial\rho}\delta\rho + \frac{\partial\omega(\mathbf{k}_0)}{\partial\mathbf{v}}\mathbf{v}$$

ей соответствует вариация энергии ВЧ волны

$$\delta\varepsilon = \int |\Psi|^2 \left(\frac{\partial\omega}{\partial\rho}\delta\rho + \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{v}}\mathbf{v}\right) d\mathbf{r} \qquad (1.7)$$

Величина $\delta\varepsilon$, очевидно, совпадает с $H_i^{(2)}$. В изотропной среде

$$\frac{\partial\omega(\mathbf{k}_0)}{\partial\mathbf{v}} = \alpha\frac{\mathbf{k}_0}{|\mathbf{k}_0|}$$

обозначим также

$$\frac{\partial\omega(k_0)}{\partial\rho} = \beta$$

Кроме того, можно положить $\mathbf{v} = \nabla\Phi$, где Φ — гидродинамический потенциал.

В переменных Ψ, $\delta\rho$, Φ полный гамильтониан среды имеет вид

$$H = \int\Big\{\omega_0 |\Psi|^2 + \frac{i}{2}\left(\Psi^* \frac{\partial\Psi}{\partial z} - \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial z}\right)V_g + \frac{1}{2}\omega_k'' \left|\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right|^2 +$$
$$+ \frac{V_g}{2k_0}|\nabla_\perp\Psi|^2 + \frac{1}{2}q|\Psi|^4 + \frac{1}{2}\rho_0(\nabla\Phi)^2 + \frac{s^2\delta\rho^2}{2\rho_0} + |\Psi|^2\left(\beta\delta\rho + \alpha\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\Big\}\,d\mathbf{r} \tag{1.8}$$

где V_g — групповая скорость.

Здесь использовано то, что в изотропной среде

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial k_\alpha \partial k_\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \omega_k''\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{V_g}{k_0}\Delta_\perp \qquad \left(\mathbf{V}_g = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}\right)$$

z — координата вдоль $\mathbf{k}_0$.

Из формулы (1.5) видно, что величина Ψ представляет собой каноническое преобразование от $a_{\mathbf{k}}$, поэтому

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = iV_g\frac{\partial\Psi}{\partial z} - \frac{1}{2}\omega_k''\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} - \frac{V_g}{2k_0}\Delta_\perp\Psi +$$
$$+ \Psi\left(q|\Psi|^2 + \beta\delta\rho + \alpha\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right) = \delta\left(H - \int\omega_0|\Psi|^2 d\mathbf{r}\right)(\delta\Psi^*)^{-1} \tag{1.9}$$

Переменные $\delta\rho$ и Φ являются парой канонически сопряженных переменных (см. например, [4]), уравнения для них имеют вид

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} = -\rho_0\Delta\Phi - \alpha\frac{\partial}{\partial z}|\Psi|^2 = \frac{\delta H}{\delta\Phi} \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -s^2\frac{\delta\rho_0}{\rho_0} - \beta|\Psi|^2 = -\frac{\delta H}{\delta\rho} \tag{1.11}$$

Подставляя (1.5), (1.6), в (1.7), найдем для $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \left(\frac{k}{16\pi^3 s\rho_0}\right)^{1/2}\left(\beta\rho_0 + \alpha s\frac{(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)}{kk_0}\right) \tag{1.12}$$

Уравнения (1.9)—(1.11) описывают взаимодействие высокочастотных волн любой природы со звуком. Как видно, есть два механизма такого взаимодействия — изменение частоты ВЧ волны за счет модуляции плотности среды звуком и «увлечение» ВЧ волны движущейся средой. Поскольку

$$\beta = \frac{\partial\omega}{\partial\rho} \sim \frac{\omega}{\rho_0}, \qquad \alpha = \frac{\partial\omega}{\partial v} \sim \frac{\omega}{V_p}$$

где V_p — фазовая скорость ВЧ волны, то отношение этих эффектов имеет порядок s/V_p; при $s \ll V_p$ эффектом увлечения ВЧ волны можно пренебречь.

В стационарном случае, когда $\partial/\partial t = 0$, в уравнениях (1.9)—(1.11) следует пренебречь членами, пропорциональными $\partial^2/\partial z^2$. Отбрасывая их, получим нелинейное параболическое уравнение

$$-2ik_0\frac{\partial\Psi}{\partial z} + \Delta_\perp\Psi = \frac{2k_0}{V}(q - q')|\Psi|^2\Psi, \qquad q' = \frac{\beta^2\rho_0}{s^2}$$

описывающее стационарную самофокусировку [16, 17]. Самофокусировка имеет место, если $q - q' < 0$.

2. Устойчивость стационарной волны. Как видно из формулы (1.10), для взаимодействия ВЧ волн со звуком

$$\Gamma(0, \mathbf{k}, \mathbf{k}) = f(0, \mathbf{k}) = 0$$

При выполнении этого условия система уравнений (1.4) имеет точное решение

$$b_{\mathbf{k}} = 0, \quad a_{\mathbf{k}} = Ae^{-i\omega_0 t}\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0}, \quad \omega_0 = \omega_{\mathbf{k}} + q|A|^2 \tag{2.1}$$

представляющее собой стационарную монохроматическую волну.

Пусть $a_{\mathbf{k}} = c_{\mathbf{k}}e^{-i\omega_0 t}$ и линеаризует уравнение (1.4) на фоне решения (2.1), полагая $b_{\mathbf{k}}$, $b_{\mathbf{k}}^*$, $c_{\mathbf{k}}$, $c_{\mathbf{k}}^*$ зависящими от времени, как $e^{-i\Omega t}$. Линеаризованная задача решается точно, с исходной волной оказывается связанной пара ВЧ волн с волновыми векторами $\mathbf{k}\pm\mathbf{p}$ и нара НЧ волн $c \pm \mathbf{p}$. Для Ω имеем дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned}
&\Big\{\Omega - \omega_{\mathbf{k}_0+\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{k}_0} - 2W_{\mathbf{k}_0+\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0,\, \mathbf{k}_0+\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0}|A|^2 + q|A|^2 + \\
&+ \frac{(\overset{*}{\Gamma}_{-\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0,\, \mathbf{k}_0+\mathbf{p}})^2|A|^2}{\Omega_{\mathbf{p}} + \Omega} + \frac{|\Gamma_{\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0+\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0}|^2|A|^2}{\Omega_{\mathbf{p}} - \Omega}\Big\} \times \Big\{-\Omega - \omega_{\mathbf{k}_0-\mathbf{p}} + \\
&+ \omega_{\mathbf{k}_0} - 2W_{\mathbf{k}_0-\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0,\, \mathbf{k}_0-\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0}|A|^2 + q|A|^2 + \frac{|\Gamma_{-\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0-\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0}|^2|A|^2}{\Omega_{\mathbf{p}} + \Omega} + \\
&+ \frac{(\overset{*}{\Gamma}_{-\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0,\, \mathbf{k}_0-\mathbf{p}})^2|A|^2}{\Omega_{\mathbf{p}} - \Omega}\Big\} = |A|^4\Big(W_{\mathbf{k}_0+\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0-\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0,\, \mathbf{k}_0} + \\
&+ \frac{\Gamma_{\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0+\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0}\overset{*}{\Gamma}_{\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0,\, \mathbf{k}_0-\mathbf{p}}}{\Omega_{\mathbf{p}} - \Omega} + \frac{\overset{*}{\Gamma}_{-\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0,\, \mathbf{k}_0+\mathbf{p}}\overset{*}{\Gamma}_{-\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0-\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0}}{\Omega_{\mathbf{p}} + \Omega}\Big) \times \\
&\times \Big(W_{\mathbf{k}_0+\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0-\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0,\, \mathbf{k}_0} + \frac{\overset{*}{\Gamma}_{\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0+\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0}\overset{*}{\Gamma}_{\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0,\, \mathbf{k}_0-\mathbf{p}}}{\Omega_{\mathbf{p}} - \Omega} + \frac{\overset{*}{\Gamma}_{-\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0,\, \mathbf{k}_0+\mathbf{p}}\Gamma_{-\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0-\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0}}{\Omega_{\mathbf{p}} + \Omega}\Big)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Исследуем дисперсионное уравнение (2.2) в пределе $|A|^2 \to 0$. Вблизи поверхности

$$\omega_{\mathbf{k}_0} = \omega_{\mathbf{k}_0-\mathbf{p}} + \Omega_{\mathbf{p}} \tag{2.3}$$

уравнение (2.2) упрощается

$$(\Omega - \omega_{\mathbf{k}_0} + \omega_{\mathbf{k}_0-\mathbf{p}})(\Omega - \Omega_{\mathbf{p}}) + |A|^2|\Gamma_{\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0-\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0}|^2 \tag{2.4}$$

и имеет решение

$$\Omega = \frac{\omega_{\mathbf{k}_0} - \omega_{\mathbf{k}_0-\mathbf{p}} + \Omega_{\mathbf{p}}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}_0-\mathbf{p}} - \Omega_{\mathbf{p}})^2}{4} - |A|^2|\Gamma_{\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0-\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0}|^2}$$

неустойчивое при

$$(\omega_{\mathbf{k}_0} - \omega_{\mathbf{k}_0-\mathbf{p}} + \Omega_{\mathbf{p}})^2 < 4|A|^2|\Gamma_{\mathbf{p},\mathbf{k}_0-\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0}|^2$$

Эта неустойчивость — вынужденное рассеяние Мандельштама — Бриллюэна [10, 11] или распадная неустойчивость первого порядка [9]. Максимум ее инкремента

$$\gamma_{\max} = |A||\Gamma_{\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0-\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0}|$$

достигается на поверхности (2.3). Вычислим групповую скорость возникающего при неустойчивости возмущения. Из (2.4) имеет

$$\frac{d\operatorname{Re}\Omega}{d\mathbf{p}} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2), \quad \mathbf{v}_1 = \frac{\partial\Omega_{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{p}}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\partial\omega_{\mathbf{k}_0-\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{p}} \tag{2.5}$$

Неустойчивость является сносовой в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью исходной волны.

Другой тип неустойчивости имеет место вблизи поверхности

$$2\omega_{\mathbf{k}_0} = \omega_{\mathbf{k}_0+\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{k}_0-\mathbf{p}} \tag{2.6}$$

(если эта поверхность не вырождается в точку $\mathbf{p} = 0$).

Пусть $\mathbf{p}$ — некая точка на этой поверхности. Введем

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\partial\omega_{\mathbf{k}_0-\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{p}}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\partial\omega_{\mathbf{k}_0+\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{p}}$$

и $\delta\mathbf{p}$ — отклонение от точки. Уравнение (2.2) можно упростить

$$(\Omega - (\delta\mathbf{p}\mathbf{u}_1) + Q_1 |A|^2)(\Omega - (\delta\mathbf{p}\mathbf{u}_2) - Q_2 |A|^2) = -|P^2||A|^4$$

Здесь

$$Q_1 = -2W_{\mathbf{k}_0+\mathbf{p},\,\mathbf{k}_0,\,\mathbf{k}_0+\mathbf{p},\,\mathbf{k}_0} + q + \frac{(\overset{*}{\Gamma}_{-\mathbf{p},\,\mathbf{k}_0,\,\mathbf{k}_0+\mathbf{p}})^2}{\Omega_\mathbf{p} + \omega_{\mathbf{k}_0} - \omega_{\mathbf{k}_0-\mathbf{p}}} + \frac{|\Gamma_{\mathbf{p},\,\mathbf{k}_0+\mathbf{p},\,\mathbf{k}_0}|^2}{\Omega_\mathbf{p} - \omega_{\mathbf{k}_0} + \omega_{\mathbf{k}_0+\mathbf{p}}},$$

$$Q_2 = -2W_{\mathbf{k}_0-\mathbf{p},\,\mathbf{k}_0,\,\mathbf{k}_0-\mathbf{p},\,\mathbf{k}_0} + q + \frac{(\Gamma_{\mathbf{p},\,\mathbf{k}_0-\mathbf{p},\,\mathbf{k}_0})^2}{\Omega_\mathbf{p} + \omega_{\mathbf{k}_0} - \omega_{\mathbf{k}_0-\mathbf{p}}} + \frac{|\Gamma_{-\mathbf{p},\,\mathbf{k}_0,\,\mathbf{k}_0-\mathbf{p}}|^2}{\Omega_\mathbf{p} - \omega_{\mathbf{k}_0} + \omega_{\mathbf{k}_0+\mathbf{p}}}$$

$$P = W_{\mathbf{k}_0+\mathbf{p},\,\mathbf{k}_0-\mathbf{p},\,\mathbf{k}_0,\,\mathbf{k}_0} + \frac{\Gamma_{\mathbf{p},\,\mathbf{k}_0+\mathbf{p},\,\mathbf{k}_0}\overset{*}{\Gamma}_{-\mathbf{p},\,\mathbf{k}_0-\mathbf{p},\,\mathbf{k}_0}}{\Omega_\mathbf{p} - \omega_{\mathbf{k}_0} + \omega_{\mathbf{k}_0-\mathbf{p}}} + \frac{\Gamma_{-\mathbf{p},\,\mathbf{k}_0,\,\mathbf{k}_0+\mathbf{p}}\overset{*}{\Gamma}_{-\mathbf{p},\,\mathbf{k}_0-\mathbf{p},\,\mathbf{k}_0}}{\Omega_\mathbf{p} + \omega_{\mathbf{k}_0} - \omega_{\mathbf{k}_0-\mathbf{p}}}$$

Максимум инкремента имеет место при

$$\delta p = \frac{|Q_1 + Q_2||A|^2}{u_{1\perp} - u_{2\perp}}, \quad u_{i\perp} = \frac{(\mathbf{u}_i\delta\mathbf{p})}{\delta\mathbf{p}}$$

и равен

$$\gamma_{\max} = |P||A|^2$$

Групповая скорость возмущения

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{p}} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \tag{2.7}$$

Описанная неустойчивость представляет собой распадную неустойчивость второго порядка [18], в изотропной среде неустойчивость имеет место, если $\omega_k'' < 0$.

Проведенное выше рассмотрение годится при не слишком малых p/k_0; при $p/k_0 \to 0$ невозможно разделить распадные неустойчивости первого и второго порядков, поэтому этот случай необходимо рассматривать особо.

3. Длинноволновые возмущения. При $p \ll k_0$ удобно рассматривать неустойчивость стационарной волны в рамках системы (1.9)—(1.11). Линеаризуя эту систему на фоне решения

$$\delta\rho = 0, \ \Phi = \beta A^2 t, \qquad \Psi = Ae^{-iq|A|^2 t}$$

получим дисперсионное уравнение

$$\left\{(\Omega - pV\cos\theta)^2 - \frac{L^2(\theta)\,p^4}{4}\right\}(\Omega^2 - p^2s^2) =$$

$$= L(\theta)\,p^2A^2\left\{q(\Omega^2 - p^2s^2) + \beta^2\rho_0 p^2 + 2\alpha\beta p\Omega\cos\theta + \frac{\alpha^2 s^2 p^2\cos^2\theta}{\rho_0}\right\} \tag{3.1}$$

$$L(\theta) = \omega''\cos^2\theta + Vk_0^{-1}\sin^2\theta, \quad \cos\theta = (p, k_0)/pk_0$$

Для частного случая $\alpha = q = \theta = 0$ это уравнение было получено В. Ц. Гуровичем и В. И. Карпманом [13]. Оно может быть получено также из уравнения (2.2) предельным переходом по $p/k_0 \to 0$.

Проанализируем уравнение (3.1) в частном случае $V < s$, когда отсутствует распадная неустойчивость первого порядка. Тогда можно положить $\Omega \approx pV \cos\theta$ и уравнение (3.1) приводится к виду

$$(\Omega - pV\cos\theta)^2 - {}^1/_4 L^2(\theta)\,p^4 = q_{\text{eff}}(\theta)\,L(\theta)\,p^2A^2$$

$$q_{\text{eff}} = q - \frac{\beta^2\rho_0 + 2\alpha\beta V\cos^2\theta + \alpha^2s^2\cos^2\theta\rho_0^{-1}}{s^2 - V^2\cos^2\theta} \tag{3.2}$$

откуда

$$\Omega - pV\cos\theta = \pm\sqrt{Lp^2q_{\text{eff}}A^2 + {}^1/_4L^2p^4} \tag{3.3}$$

Взаимодействие с НЧ волнами «перенормирует» собственную нелинейность ВЧ волн. Неустойчивость имеет место, если существует область углов, в которой

$$L(\theta)\,q_{\text{eff}}(\theta) < 0$$

По каждому направлению θ область неустойчивости ограничена значениями

$$p^2 < 4\,|\,q_{\text{eff}}(\theta)/L(\theta)\,|\,A^2$$

причем максимум инкремента, равный $\gamma = q_{\text{eff}}A^2$, достигается при $p^2 = 2\,|\,q_{\text{eff}}(\theta)/L(\theta)\,|\,A^2$. Если $\omega_k'' < 0$, то $L(\theta) = 0$ для угла $\operatorname{tg}^2\theta = k\,|\,\omega_k''|V^{-1}$. По этому направлению область неустойчивости неограничена и переходит с ростом p в распадную неустойчивость второго порядка.

Как видно из формулы (3.3), описанная выше неустойчивость является абсолютной в системе исходной волны. Она приводит к нарастанию модуляции, «неподвижной» относительно исходной волны, поэтому ее естественно называть модуляционной неустойчивостью. Модуляционная неустойчивость может развиваться для достаточно коротких волновых пакетов и приводит к сильному разрушению исходной волны (см. [19]). Из формулы (3.3) видно, что ее групповая скорость

$$\frac{\partial\Omega}{\partial p} = V + \frac{1}{2}p^2\frac{\partial^3\omega_k}{\partial k^3}$$

Абсолютный характер неустойчивости в системе волны сохраняется вплоть до $p/k \sim (qA^2/kV)^{1/3}$.

Перейдем теперь к случаю $s < V$. Распадная неустойчивость имеет место вблизи конуса $\cos\theta = s/V$. Инкремент распадной неустойчивости при $p/k \to 0$ имеет вид

$$\gamma_p = f(p, k)\,|\,A\,| \approx \omega_k\,(p/k)^{1/2}\,(q'A^2/\omega_k)^{1/2} \tag{3.4}$$

Эта формула справедлива, если

$$\gamma_p \ll Lp^2, \qquad \gamma_p \ll sp$$

Далее ограничимся случаем $s \ll V$.

При не слишком малых q $(q/q' \gg s^2/V^2)$ во всей области углов, кроме близких к $\theta = \pi/2$, влиянием НЧ волн можно пренебречь и считать, что там имеет место только собственная модуляционная неустойчивость. Для углов, близких к $\theta = \pi/2$, можно положить $L \approx V/k_0$ и пренебречь и членами, содержащими α, после чего получим

$$\{(\Omega - pV\cos\theta)^2 - {}^1/_4V^2p^4k^{-2}\}\,(\Omega^2 - p^2s^2) = \\ = Vp^2A^2k^{-1}\,[(\Omega^2 - p^2s^2)\,q + q'p^2s^2] \tag{3.5}$$

При исследовании (3.5) положим вначале $q = 0$. Тогда возможны следующие случаи.

1°. $\omega_k^{-1} q' A^2 \ll s^2 V^{-2}$. Здесь при

$$p / k_0 \gg \left(\frac{s}{V} \frac{q' A^2}{\omega_k} \right)^{1/2}$$

осуществляется распадная неустойчивость первого порядка. При меньших p нарушается первое из условий (3.4). При

$$\frac{p}{k} \ll \left(\frac{s}{V} \frac{q' A^2}{\omega_k} \right)^{1/2}$$

в уравнении (3.5) можно пренебречь членом $(Lp^2)^2$ и упростить его

$$(\Omega - pV \cos \theta)^2 (\Omega - ps) = Vk^{-1} p^3 s q' A^2 \qquad (3.6)$$

Наиболее сильная неустойчивость имеет место на конусе $\cos \theta = s/V$, где

$$\operatorname{Im} \Omega = \frac{\sqrt{3}}{2} p \left(\frac{V s q' A^2}{k} \right)^{1/3} \qquad (3.7)$$

Дифференцируя (3.6) по $\mathbf{p}$, найдем с точностью до малых членов

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{p}} = \frac{2}{3} \mathbf{V} \qquad (3.8)$$

2°. $s^2 / V^2 \ll q' A^2 / \omega_k \ll s / V$. В этом случае при

$$p / k \gg \left(\frac{V}{s} \frac{q' A^2}{\omega_k} \right)^{1/2}$$

также осуществляется распадная неустойчивость. При меньших p нарушается второе из условий (3.4). При этом уравнение (3.5) приводится к виду

$$\Omega^2 (\Omega - pV \cos \theta - Vp^2/2k) = p^2 s^2 q' A^2 \qquad (3.9)$$

Максимум неустойчивости имеет место на поверхности

$$\cos \theta = -\frac{p}{2k_0}, \quad \operatorname{Im} \Omega = \frac{\sqrt{3}}{2} (p^2 s^2 q' A^2)^{1/3} \qquad (3.10)$$

Дифференцируя (3.9) по $\mathbf{p}$, найдем с точностью до малых членов

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{p}} = \frac{1}{3} \mathbf{V} \qquad (3.11)$$

Неустойчивость (3.10) будем называть модифицированной. При

$$p / k \sim \left(\frac{s}{V} \frac{q' A^2}{\omega_k} \right)^{1/4}$$

инкремент ее сравнивается с Lp^2. При меньших уравнение (3.9) следует заменить уравнением

$$\Omega^2 (\Omega - pV \cos \theta)^2 = k^{-1} V p^4 s^2 q' A^2 \qquad (3.12)$$

Максимальный инкремент

$$\operatorname{Im} \Omega = p (V s^2 q' A^2 / k^{-1})^{1/4} \qquad (3.13)$$

достигается при $\theta = \pi/2$. Дифференцируя уравнение (3.12) по $\mathbf{p}$, получим

$$\partial \Omega / \partial \mathbf{p} = {}^1/_2 \mathbf{V} \qquad (3.14)$$

3°. $1 \gg q'A^2/\omega_k \gg s/V$. Этот случай отличается от предыдущего тем, что теперь отсутствует область распадной неустойчивости первого порядка — модифицированная неустойчивость простирается до $p \sim k_0$, где уже необходимо пользоваться уравнением (2.2). Максимальный инкремент модифицированной неустойчивости

$$\gamma \approx (k_0{}^2 s^2 q' A^2)^{1/3} \tag{3.15}$$

Заметим, что, как следует из формул (3.3), (3.7), (3.13), при малых волновых числах инкремент неустойчивости пропорционален p. Это можно непосредственно усмотреть из уравнения [20], в котором при $p \to 0$ можно пренебречь членом $(Lp^2)^2$.

Переход к пределу $p \to 0$ представляет собой переход к приближению нелинейной геометрической оптики для ВЧ волны. Это приближение использовалось в работах [1, 2]. Учет члена $(Lp^2)^2$ представляет собой учет фраунгоферовой дифракции ВЧ волн.

Как видно из формул (2.5) (3.8), (3.11), (3.14), неустойчивости ВЧ волны, обусловленные взаимодействием с НЧ волнами, являются сносовыми в системе НЧ волны и могут развиваться лишь для достаточно длинных когерентных волновых пакетов ($l > V/\mathrm{Im}\,\Omega$). В первую очередь развивается неустойчивость с максимальным инкрементом, который лежит в области $p \sim k_0$.

Для стационарной волны со случайной фазой и длиной когерентности

$$1/p \ll l \ll V/\mathrm{Im}\Omega$$

неустойчивость с $p \sim k_0$ также имеет место, но ее инкремент уменьшается в $l\,\mathrm{Im}\,\Omega/V$ раз. Это, однако, неверно для «длинноволновых» неустойчивостей (3.7), (3.13), инкремент которых не зависит от продольной фазовой структуры волны, так как для описания применимо приближение геометрической оптики («затухание Ландау» длинноволновых возмущений на квантах исходной волны исключается из-за сносового характера неустойчивости). Развитие длинноволновых неустойчивостей приводит к нарастанию вытянутых вдоль оси распространения крупномасштабных неоднородностей среды; искривление хода лучей на этих неоднородностях может приводить к образованию каустик и резкому возрастанию амплитуды ВЧ волн вблизи них. При этом могут включаться нелинейные диссипативные механизмы и может произойти затухание ВЧ волн в прозрачной среде. Дальнейшее развитие неустойчивости может привести также к образованию поперечных ударных волн и развитию двумерной «акустической» [21] турбулентности среды. Для коротких волновых пакетов с $l \ll V/\mathrm{Im}\,\Omega$ НЧ неустойчивости вообще не развиваются.

Обсудим теперь влияние собственной ВЧ нелинейности. Для монохроматической волны или длинного пакета нужно сравнивать максимальный инкремент собственной модуляционной неустойчивости с распадной (при $q'A/\omega_k \ll s/V$) или модифицированной распадной (при $q'A^2/\omega_k > s/V$). Находим, что при условиях

$$\frac{q'A^2}{\omega_k} \ll \left(\frac{q'}{q}\right)^2 \frac{s}{V} \quad \text{при } q > q' \tag{3.16}$$

$$\frac{q'A^2}{\omega_k} \ll \left(\frac{q'}{q}\right)^{3/2} \frac{s}{V} \quad \text{при } q < q'$$

в первую очередь будет развиваться НЧ неустойчивость. В противоположном случае влиянием НЧ волн можно пренебречь. Заметим, что при выполнении условий (3.16) модуляционная неустойчивость может развиваться для достаточно коротких пакетов, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{k_0}\left(\frac{\omega_k}{qA^2}\right)^{1/2} < l < \frac{V}{\operatorname{Im}\Omega}$$

Для стационарной волны со случайной фазой сравнение собственной и НЧ неустойчивостей требует специального исследования.

4. Неустойчивость электромагнитных волн. Применим теперь полученные результаты к изучению неустойчивости электромагнитных волн в плазме и нелинейном диэлектрике.

Представим электрическое поле волны в виде

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{S}e^{-i\omega t+i\mathbf{kr}} + \mathbf{S}^* e^{i\omega t-i\mathbf{kr}})$$

Тогда энергия поля имеет вид

$$\mathbf{E} = \frac{1}{8\pi}\int \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \frac{\partial}{\partial\omega}(\varepsilon\omega^2)\, \mathbf{S_k S_k}^* \, d\mathbf{k}$$

$$\mathbf{S_k} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathbf{S}(r)\, e^{i\mathbf{kr}}\, d\mathbf{r}$$

Через канонические переменные энергия выражается по формуле

$$\mathbf{E} = \int \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* \, d\mathbf{k}$$

откуда

$$\mathbf{a_k} = \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}}\sqrt{\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial\omega}(\varepsilon\omega^2)}\, \mathbf{S_k}$$

Для простоты будем считать, что волна имеет линейную поляризацию. В этом случае a_k можно считать скаляром и уравнения (1.9)—(1.11) применимы непосредственно, причем

$$\Psi = \frac{1}{\omega_k}\sqrt{\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial\omega}(\omega^2\varepsilon)}S$$

Величина qA^2 представляет собой нелинейный сдвиг частоты в монохроматической волне

$$qA^2 = \Delta\omega = \omega\delta n_{nl} n_0^{-1}$$

Здесь δn_{nl} — нелинейная поправка к показателю преломления. Аналогично

$$q'A^2 = \omega\delta n_s n_0^{-1}$$

где δn_s — стрикционная поправка к показателю преломления. В нелинейном диэлектрике распадная неустойчивость первого порядка представляет собой вынужденное рассеяние Мандельштама — Бриллюэна и обладает весьма низким порогом. Параметр s/V для диэлектрика очень мал ($\sim 10^{-5}$), поэтому уже при вполне реальных амплитудах поля ($\delta n_s/n_0 \sim 10^{-5}$) распадная неустойчивость переходит в модифицированную. Величина q'/q для диэлектриков колеблется в пределах $0{,}1 \div 10$. Для $q' \lessgtr q$ легко также удовлетворить критериям (3.16), так что представляется возможным наблюдать модуляционную неустойчивость на длинных когерентных пакетах. Что касается наблюдения модуляционной неустойчивости в коротких импульсах, то на это можно надеяться только в средах с достаточно сильной безынерционной нелинейностью.

В плазме без магнитного поля ионнозвуковые колебания существуют только при $T_e \gg T_i$. Для величин s/V и $q'A^2$ имеем

$$\frac{s}{V} = \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \frac{\omega_k}{kc} \frac{V_{Te}}{c}; \quad \omega^2 = \omega_p{}^2 + k^2c^2$$

$$\frac{q'A^2}{\omega_k} = \frac{\omega_p{}^4}{8\omega_k{}^4} \frac{c^2}{V_{Te}{}^2} \frac{E^2}{4\pi mn_0c^2}$$

Величина qA^2, совпадающая с максимальным инкрементом собственной неустойчивости, вычислена в [20]

$$qA^2 = \frac{\omega_p{}^4}{\omega_k{}^3}\left(\frac{3}{4} - \frac{k^2c^2}{3\omega_p{}^2 + 4k^2c^2}\right)\frac{E^2}{4\pi mn_0c^2}$$

$$q / q' \sim V_{Te}{}^2 / c^2 \ll 1$$

Проведенное в работе рассмотрение пригодно в плазме для амплитуд поля, удовлетворяющих условию

$$\frac{E^2}{4\pi mn_0c^2} \ll \frac{\omega^2}{\omega_p{}^2} \frac{V_{Te}{}^2}{c^2}$$

так как в противном случае осцилляционная скорость электронов больше их тепловой скорости и необходимо учитывать нелинейные поправки в законе дисперсии ионного звука.

Таким образом, для достаточно длинных когерентных волновых пакетов в не слишком горячей плазме преимущественно развивается распадная (или модифицированная) неустойчивость. Собственная неустойчивость, обусловленная электронной нелинейностью, может развиваться для коротких пакетов — для стационарной немонохроматической волны может иметь место какая-либо из длинноволновых неустойчивостей.

В изотермической плазме $T_e \sim T_i$ волны достаточно малой амплитуды испытывают только собственную неустойчивость. Однако

$$\frac{E^2}{4\pi mn_0c^2} \gg \frac{m8\omega^5 V_{Te}{}^3}{M\omega_p{}^4kc^4} \quad \text{при } q'A^2 / \omega_k \ll \frac{s^2}{V^2}$$

для малых частот инкремент низкочастотной неустойчивости превышает частоту ионнозвуковых волн. Для волн такой амплитуды неустойчивость имеет место при любом соотношении температур в плазме.

5. Волны в средах со слабой дисперсией. Значительный интерес представляет изучение нелинейных волн в средах со слабой дисперсией, в которых

$$\omega_k = sk\,(1 + \lambda k^2) \qquad (\lambda k^2 \ll 1)$$

Такой закон дисперсии имеют, например, волны на поверхности мелкой воды и ионнозвуковые волны в плазме. Среды со слабой дисперсией описываются уравнениями гидродинамики с дополнительным членом (см., например, [18])

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\nabla\Phi = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{(\nabla\Phi)^2}{2} = -\frac{s^2}{\rho_0}\left(\delta\rho + \frac{3}{2}g\frac{\delta\rho^2}{\rho_0} - 2\lambda\Delta\delta\rho\right) \tag{5.1}$$

Здесь Φ — гидродинамический потенциал; переменные $\delta\rho$ и Φ являются канонически сопряженными. Вводя переменные a_k по формуле

(1.6), получим гамильтониан взаимодействия в виде

$$H_i = \int [V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}^* + (\ )^*]\, \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\, d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 +$$

$$+ \frac{1}{3} \int [U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2} + (\ )^*]\, \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\, d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 \qquad (5.2)$$

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = \frac{s^{1/2}}{16\,(\pi^3\rho_0)^{1/2}} \left\{ \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)\, k_2^{1/2}}{k^{1/2} k_1^{1/2}} + \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_2)\, k_1^{1/2}}{k^{1/2} k_2^{1/2}} + \frac{(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2)\, k^{1/2}}{k_1^{1/2} k_2^{1/2}} + 3g\,(kk_1k_2)^{1/2} \right\}$$

а уравнения для $a_{\mathbf{k}}$

$$\frac{\partial a_{\mathbf{k}}}{\partial t} + i\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} = -\, i \int \{ V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2} \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} + 2 V^*_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}^* \delta_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}-\mathbf{k}_2} +$$

$$+ U^*_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2} \}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 \qquad (5.3)$$

Уравнения (5.1) описывают стационарные нелинейные волны, которые близки к синусоидальным, если нелинейный сдвиг частоты qA^2 много меньше дисперсионной поправки к частоте. Это условие выражается неравенством

$$qA^2/\omega_k \ll \lambda k_0^2$$

которое является условием применимости результатов этого пункта. Здесь k_0 — волновое число стационарной волны.

Рассмотрим задачу о неустойчивости стационарной волны первоначально относительно длинноволновых возмущений с $p \ll k_0$.

В этом случае волны представляют собой узкий в k-пространстве пакет с разбросом порядка p. Вследствие нелинейного взаимодействия возникают также волны с другими k, так что a_k можно приближенно представить в виде

$$a_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}}^{(0)} + a_{\mathbf{k}}^- + a_{\mathbf{k}}^+ + b_{\mathbf{k}}^\circ \qquad (5.4)$$

Здесь $a_{\mathbf{k}}^{(0)}$ — основной волновой пакет со средней частотой $\omega\,(\mathbf{k}_0)$; $a_{\mathbf{k}}^{\pm}$ сосредоточены вблизи $\mathbf{k} = \pm\, 2\mathbf{k}_0$ и имеют средние частоты $\pm 2\omega\,(\mathbf{k}_0)$, $b_{\mathbf{k}}^0$ представляет собой «собственную» низкочастотную компоненту поля $a_{\mathbf{k}}$, сосредоточенную в области волновых чисел $\mathbf{k} \sim \mathbf{p}$ и имеющую частоту $\Delta\omega \sim \omega\,(\mathbf{k}_0 + \mathbf{p}) - \omega\,(\mathbf{k}_0)$. В уравнениях для $a_{\mathbf{k}}^{\pm}$, $b_{\mathbf{k}}^0$ учтем в правой части только члены, квадратичные по $a_{\mathbf{k}}^{(0)}$.

Получим приближенно

$$\frac{\partial a_{\mathbf{k}}^+}{\partial t} + i\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+ = -\, iV_{2\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0} \int a_{\mathbf{k}_1}^{(0)} a_{\mathbf{k}_2}^{(0)} \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2$$

$$\frac{\partial a_{\mathbf{k}}^-}{\partial t} + i\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^- = -\, iU^*_{-2\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0} \int a_{\mathbf{k}_1}^{(0)*} a_{\mathbf{k}_2}^{(0)*} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 \qquad (5.5)$$

$$\frac{\partial b_{\mathbf{k}}^\circ}{\partial t} + i\omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\circ = -\, 2i \int V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0} a_{\mathbf{k}_1}^{(0)} a_{\mathbf{k}_2}^{(0)*} \delta_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}-\mathbf{k}_2}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 \qquad (5.6)$$

Уравнения (5.5) могут быть решены явно

$$a_{\mathbf{k}}^+ = -\, \frac{V_{2\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0}}{\omega\,(2\mathbf{k}_0) - 2\omega\,(\mathbf{k}_0)} \int a_{\mathbf{k}_1}^{(0)} a_{\mathbf{k}_2}^{(0)} \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 \qquad (5.7)$$

$$a_{\mathbf{k}}^- = -\, \frac{U^*_{-2\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0}}{\omega\,(2\mathbf{k}_0) + 2\omega\,(\mathbf{k}_0)} \int a_{\mathbf{k}_1}^{(0)*} a_{\mathbf{k}_2}^{(0)*} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\, d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2$$

Уравнение (5.6) совпадает с уравнением (1.4) для внешней НЧ компоненты, поэтому $b_{\mathbf{k}}^{\circ}$ можно рассматривать как самостоятельные НЧ степени свободы и применять к ним результаты предыдущей части работы. В частности, имеем

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = 2V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0}, \quad \alpha = k_0, \quad \beta = \frac{(3g+1)\,sk_0}{2\rho_0}$$

Величины $a_k^{\pm}$, будучи подставлены в уравнение (5.3), дают собственную ВЧ нелинейность, причем

$$q = -\frac{|V_{2\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0}|^2}{\omega(2\mathbf{k}_0) - 2\omega(\mathbf{k}_0)} - \frac{|U_{-2\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0}|^2}{\omega(2\mathbf{k}_0) + 2\omega(\mathbf{k}_0)} \approx -\frac{3(g+1)^2}{16\lambda\rho_0}$$

Заметим, что $q'/q \sim \lambda k_0^2 \ll 1$. Поскольку $q' \ll q$, то стационарная самофокусировка определяется знаком q и имеет место в средах, где $q < 0$ и, соответственно, $\lambda > 0$. В случае $\lambda > 0$ возможна распадная неустойчивость первого порядка, запрещена (при $p \sim k_0$) распадная неустойчивость второго порядка. Наоборот, при $\lambda < 0$ запрещена распадная неустойчивость первого порядка и разрешена неустойчивость второго порядка. Введем величину q_{eff} по формуле (3.2). Имеем

$$q_{\text{eff}} = q\left(1 + \frac{6\lambda k_0^2}{1 - \cos\theta - 3\lambda k_0^2\cos\theta}\right) \tag{5.8}$$

Величина q_{eff} отрицательна почти для всех углов, за исключением узкого конуса

$$\theta^2 \sim 6\lambda k_0^2$$

Для всех углов вне этого конуса можно пользоваться уравнением (3.2), здесь возможна модуляционная неустойчивость с инкрементом $\sim qA^2$. Вблизи углов $\theta^2 \sim 6\lambda k_0^2$ имеет место более сильная неустойчивость, представляющая собой модификацию распадной неустойчивости первого порядка и переходящая в последнюю при $p/k_0 > qA^2/\omega_k\lambda k_0^2$.

Максимум инкремента этой неустойчивости достигается при $p \sim k_0$ и равен $\gamma \sim (qA^2\lambda k_0^2 sk_0)^{1/2}$.

В случае $\lambda < 0$ для всех углов можно пользоваться уравнением (2.1), при этом величина $Lq_{\text{eff}} > 0$ во всем диапазоне углов и модуляционная неустойчивость отсутствует. Это обстоятельство, вызванное совпадением нулей у функций $L(\theta)$, $q_{\text{eff}}(\theta)$ лишь с точностью до членов $\lambda k_0^2 (p/k)^{1/3}$, имеет место.

Заметим еще, что

$$Lq_{\text{eff}} = {}^9/_8\,(g+1)^2 sk_0 > 0 \qquad \text{при} \quad \theta = 0$$

Поэтому независимо от знака λ в одномерной задаче неустойчивость волн в средах со слабой дисперсией отсутствует.

При

$$p/k \sim \left(\frac{qA^2}{\omega_k\lambda k_0^2}\right)^{1/3}$$

открывается распадная неустойчивость второго порядка. Для вычисления ее инкремента произведем каноническое преобразование к гамильтониану (1.3) (см. [7])

$$a_{\mathbf{k}} = c_{\mathbf{k}} - \int \frac{V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} c_{\mathbf{k}_1} c_{\mathbf{k}_2} \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\, d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2}{\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_2}} +$$

$$+ 2\int \frac{V^*_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_1\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}_1} c_{\mathbf{k}_2}}{\omega_{k_2} - \omega_k - \omega_{k_1}} \delta_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 - \int \frac{U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} c^*_{\mathbf{k}_1} c^*_{\mathbf{k}_2}}{\omega_k + \omega_{k_1} + \omega_{k_2}} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2$$

После преобразования возникает эффективный гамильтониан взаимодействия

$$H_i = \int W_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} c_{\mathbf{k}}^* c_{\mathbf{k}_1}^* c_{\mathbf{k}_3} c_{\mathbf{k}_2} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3} d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\mathbf{k}_3 \tag{5.9}$$

где

$$\begin{gathered} W_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} = -\frac{U_{-(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3)\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} \overset{*}{U}_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1)\,\mathbf{k}\mathbf{k}_1}}{\omega_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_3} + \omega_{\mathbf{k}_2} + \omega_{\mathbf{k}_3}} - \\ -\frac{\overset{*}{U}_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1)\,\mathbf{k}\mathbf{k}_2} U_{-(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3)\,\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}}{\omega_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}_1}} - \frac{\overset{*}{V}_{(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3)\,\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} V_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1\mathbf{k}\mathbf{k}_1}}{\omega_{\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3} - \omega_{\mathbf{k}_2} - \omega_{\mathbf{k}_3}} - \frac{\overset{*}{V}_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1\mathbf{k}\mathbf{k}_1} V_{\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}}{\omega_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}_1}} - \\ - \frac{2V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_2\mathbf{k}-\mathbf{k}_2} \overset{*}{V}_{\mathbf{k}_3\mathbf{k}_1\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1}}{\omega_{\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_3}} - \frac{2V_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_3\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3} \overset{*}{V}_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}\mathbf{k}_2-\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}_2}} - \\ - \frac{2V_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} \overset{*}{V}_{\mathbf{k}_3\mathbf{k}_1\mathbf{k}_3-\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}_3-\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}_3}} - 2\,\frac{V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_3\mathbf{k}-\mathbf{k}_3} \overset{*}{V}_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}}{\omega_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_2}} \end{gathered} \tag{5.10}$$

при $\lambda < 0$ знаменатели в (5.10) не обращаются в нуль.

Дисперсионное уравнение может быть получено из формулы (2.2), в которой нужно положить $\Gamma_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = 0$ (см. также [7]).
Имеем

$$\operatorname{Im} \Omega = {}^1/_2 \sqrt{(\omega_{\mathbf{k}_0+\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{k}_0-\mathbf{p}} - 2\omega_{\mathbf{k}_0} + 2A^2 T(\mathbf{p}, \mathbf{k}_0))^2 - 4F^2(\mathbf{p}, \mathbf{k}_0) A^4} \tag{5.11}$$

где

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{k}_0) = W_{\mathbf{k}_0+\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0-\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0\mathbf{k}_0}\, F(0, \mathbf{k}_0) = q$$

$$G(\mathbf{p}, \mathbf{k}_0) = W_{\mathbf{k}_0+\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0,\, \mathbf{k}_0+\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0},\quad T(\mathbf{p}, \mathbf{k}_0) = G(\mathbf{p}, \mathbf{k}_0) + G(-\mathbf{p}, \mathbf{k}_0) + q$$

При вычислении величин q, G возникают неопределенности вида

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|V(\varepsilon, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)|^2}{\omega(\varepsilon) + \omega(\mathbf{k}_0 + \varepsilon) - \omega(\mathbf{k}_0)}$$

для раскрытия этих неопределенностей заметим, что выражение (5.10) при $p \ll k_0$ должно переходить в (3.2) с q_{eff}, вычисленным по формуле (5.8). Из сравнения этих выражений получаем, что все неопределенные члены следует положить равными нулю.

При неслишком малых p/k можно положить из (5.11)

$$(\operatorname{Im} \Omega)_{\max} \approx 4\,|F(\mathbf{p}, \mathbf{k}_0)|\, A^2$$

где p вычислено на поверхности $2\omega_{k_0} = \omega_{k_0+p} + \omega_{k_0-p}$. Для $F(p, k_0)$ имеем приближенно

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{k}_0) = \frac{-2\,|V_{2\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0}|}{\omega(2\mathbf{k}_0) - 2\omega(\mathbf{k}_0)} - \frac{4\,|V_{\mathbf{k}_0+\mathbf{p},\, \mathbf{k}_0,\, \mathbf{p}} \overset{*}{V}_{\mathbf{k}_0,\, \mathbf{k}_0-\mathbf{p},\, \mathbf{p}}|}{\omega(\mathbf{p}) + \omega(\mathbf{k}_0 - \mathbf{p}) - \omega(\mathbf{k}_0)} \tag{5.12}$$

Из (5.10) отброшены члены, не содержащие в знаменателе малости, равной $\lambda k^2{}_0$.

Добавляя к p ортогональное приращение δ, получим уравнение резонансной поверхности

$$\delta^2 = 6p^2 (k^2 - p^2)$$

Все $\mathbf{p}$, лежащие на резонансной поверхности, почти параллельны k_0. Поэтому можно в (5.2) заменить скалярные произведения на произведение модулей. Окончательно имеем (с точностью до $\lambda k^2{}_0$)

$$F(p, k_0) = q\left(1 - \frac{k_0 (k_0^2 - p^2)^{1/2}}{k_0^2 + p^2}\right)$$

Максимальный инкремент неустойчивости

$$\gamma_{\max} = qA^2 = \Delta\omega_{nl}$$

достигается «на верхнем конце» резонансной поверхности при $p \to k_0$.

Аналогичная процедура введения собственных низкочастотных степеней свободы и раскрытия неопределенностей применима и к другим средам с квадратичной нелинейностью. Исключение составляет случай, когда

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|V(\varepsilon, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)|^2}{\omega(\varepsilon) + \omega(\mathbf{k}_0 + \varepsilon) - \omega(k_0)} = 0$$

В этом случае неопределенность отсутствует, можно пренебречь влиянием собственной низкочастотной компоненты и описывать взаимодействие ВЧ волн при помощи эффективного гамильтониана (1.3).

В заключение авторы благодарят Р. З. Сагдеева за обсуждение результатов.

Поступила 3 IX 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Веденов А. А., Рудаков Л. И. О взаимодействии волн в сплошных средах. Докл. АН СССР, 1964, т. 159, № 4.
2. Vedenov A. A., Gordeev A. V., Rudakov L. I. Oscilation and instability of a weakly turbulent plazma. Plazma Phys., 1967, vol. 9 No. 6.
3. Бакай А. С. Взаимодействие высокочастотных и низкочастотных волн в нелинейных дисперсных средах. ЖЭТФ, 1968, т. 55, вып. 1.
4. Захаров В. Е. Гамильтоновский формализм для гидродинамических моделей плазмы. ЖЭТФ, 1971, т. 60, вып. 5.
5. Захаров В. Е., Кузнецов Е. А. Вариационный принцип и канонические переменные в магнитной гидродинамике. Докл. АН СССР, 1970, т. 194, № 6.
6. Захаров В. Е. Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости. ПМТФ, 1968, № 2.
7. Захаров В. Е., Львов В. С., Старобинец С. С. Неустойчивость монохроматических спиновых волн. Физика твердого тела, 1969, т. 11. вып. 10.
8. Шлеман Э. Рост спиновых волн при параметрическом возбуждении в переходном режиме. Изв. АН СССР, Сер. физ., 1964, т. 28, № 3.
9. Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З. Об устойчивости установившихся продольных колебаний плазмы. Ж. тех. физ., 1962, т. 32, вып. 11.
10. Бломберген Н. Нелинейная оптика. М., «Мир», 1966.
11. Фабелинский И. Л. Молекулярное рассеяние света. М., «Наука», 1965.
12. Волков Т. Ф. Влияние высокочастотного электромагнитного поля на колебания плазмы. В сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. 4, М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 98.
13. Гурович В. Ц., Карпман В. И., Кауфман Р. Н. Об устойчивости уединенных электрозвуковых волн. ЖЭТФ, 1969, т. 56, вып. 6.
14. Nishikawa K. N. Parametric exitation of coupled waves. J. Phys. Soc. Japan, 1968, vol. 24, No. 4.
15. Горбунов Л. М. Возмущение среды полем сильной электромагнитной волны. ЖЭТФ, 1968, т. 55, вып. 6.
16. Таланов В. И. О самофокусировке электромагнитных волн в нелинейных средах. Изв. вузов, Радиофизика, 1964, т. 7, № 3.
17. Shen Y. R. Electrostriction, optical Kerr effect and self — focusing of laser beam. Phys. Letters, 1966, vol. 20, No. 4.
18. Захаров В. Е. Об устойчивости волн в нелинейных средах с дисперсией. ЖЭТФ, 1966, т. 51, вып 4.
19. Захаров В. Е., Соболев В. В., Сынах В. С. Исследование поведения световых пучков в нелинейных средах. ЖЭТФ, 1971, т. 60, вып. 1.
20. Берхоер А. Л., Захаров В. Е. Самовоздействие волн с различной поляризацией в нелинейных средах. ЖЭТФ, 1970, т. 58, вып. 3.
21. Захаров В. Е., Сагдеев Р. З. О спектре акустической турбулентности. Докл. АН СССР, 1970, т. 192, № 2.