

5. Соловьева Е. Н., Успенский А. Б. Схемы сквозного счета численного решения задач для параболических уравнений с неизвестными границами. — Вычислительные методы и программирование, 1974, вып. 23.
6. Мейрманов А. М. Пример несуществования классического решения задачи Стефана. — ДАН СССР, 1981, т. 258, № 3.

Поступила 12/XII 1985г.

УДК 536.23

О КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА

А. С. Романов

(Москва)

Теоретическое исследование процессов интенсивного теплопереноса наталкивается на трудности, связанные с необходимостью учета переменных теплофизических свойств вещества. В частности, к таким интенсивным процессам относится лучистый теплоперенос. Основная характеристика вещества при лучистом теплопереносе — длина пробега излучения, которая существенно зависит от температуры [1]. В [2] процесс лучистого теплопереноса рассматривался в приближении лучистой теплопроводности [1]. В этом приближении проблема сводится к анализу квазилинейного дифференциального уравнения параболического типа. Найдено, что тепло может переноситься в форме тепловой волны. При этом фронт волны строго разграничивает области холодного и нагретого вещества. Физически наличие фронта означает конечную скорость теплопереноса. Известны необходимые условия, которым должна удовлетворять теплопроводность вещества для существования фронта [3, 4]. Эти условия требуют вырождения коэффициента теплопроводности на поверхности фронта тепловой волны.

Более точно лучистый теплоперенос описывается нелинейными уравнениями, имеющими интегродифференциальный характер, соответствующий нелокальному характеру взаимодействия излучения с веществом (см., например, [1, 5]). При этом во многих важных случаях достаточно ограничиться приближением серого тела [1], считая коэффициент поглощения не зависящим от спектрального состава излучения. При плоской симметрии в безразмерных переменных соответствующее интегродифференциальное уравнение имеет вид [1, 5]

$$(0.1) \quad \frac{\partial E}{\partial t} = \kappa^2 k(T)(U - T^4), \quad U = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I d\mu.$$

Здесь $T(x, t) \geq 0$ — температура вещества; $x \in R$ — координата, вдоль которой передается тепло; t — время; $E(T) \geq 0$ ($E(0) = 0$) — внутренняя энергия вещества, являющаяся монотонно растущей функцией температуры; $U(x, t) \geq 0$ — объемная плотность лучистой энергии; $k(T)$ — коэффициент поглощения излучения веществом ($0 < k(T) < \infty$ при $0 < T < \infty$, $k(0) > 0$); $I(\mu, x, t)$ — интенсивность излучения, вычисляемая по формуле

$$(0.2) \quad I = \begin{cases} I_+ = \frac{\kappa^2}{\mu} \int_{-\infty}^x k[T(\zeta, t)] T^4(\zeta, t) \exp\left[-\frac{|P(x, \zeta)|}{\mu}\right] d\zeta, & \mu > 0, \\ I_- = \frac{\kappa^2}{\mu} \int_x^{\infty} k[T(\zeta, t)] T^4(\zeta, t) \exp\left[-\frac{|P(x, \zeta)|}{\mu}\right] d\zeta, & \mu < 0; \end{cases}$$

$$P(x, \zeta) = \kappa^2 \int_x^{\zeta} k(T(\varepsilon, t)) d\varepsilon;$$

$\mu = \cos \theta$; θ — угол между осью x и произвольно выбранным направлением излучения ($0 \leq \theta \leq \pi$) (существование несобственных интегралов в (0.2) ограничивает рост температуры T при $|x| \rightarrow \infty$ [1]); $\kappa^2 = (L/l)^2$;

L — характерный размер нагретой излучением области; l — характерная длина пробега излучения.

Предельный переход $\kappa^2 \rightarrow \infty$ в (0.1) означает переход к приближению лучистой теплопроводности. Уравнение (0.1) в этом пределе совпадает с соответствующим квазилинейным уравнением теплопроводности, которое оказывается нелинейным, даже если $k(T) = \text{const} < \infty$. Эффект конечной скорости теплопереноса все равно имеет место. Напротив, как показано ниже, возникновение фронтальной поверхности в процессах, описываемых уравнением (0.1), возможно, если $k(T) = \infty$ на фронте тепловой волны.

1. Простая волна. Рассмотрим вначале частное решение типа простой волны. Пусть $T = T(\eta)$, $I = I(\mu, \eta)$, где $\eta = x - vt$, $v \neq 0$ — произвольная постоянная. Тогда (0.1) сводится к

$$(1.1) \quad -v \frac{dE}{dz} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} T^4 W_1(|z - \zeta|) d\zeta - T^4,$$

где $W_n(y) = \int_1^{\infty} e^{-y\tau} \tau^{-n} d\tau$ — интегральная показательная функция [6]; $z = \kappa^2 \int k(T) d\eta$ — оптическая толщина вещества (в целях сокращения записи аргументы в интеграле (1.1) и везде в дальнейшем опущены). Уравнение (1.1) необходимо дополнить граничными условиями при $z = \infty$ или $-\infty$. Для определенности положим

$$(1.2) \quad T = 0, \quad I = 0 \quad \text{при} \quad z = \infty.$$

Интегрируя (1.1) с учетом (1.2), получим

$$(1.3) \quad vE = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} T^4 \text{sign}(z - \zeta) W_2(|z - \zeta|) d\zeta.$$

Интегральное уравнение (1.3) есть уравнение Гаммерштейна [7]. Интегрируя (1.3) еще дважды, имеем

$$v \int_z^{\infty} d\zeta \int_{\zeta}^{\infty} E d\varepsilon = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} T^4 \text{sign}(z - \zeta) W_4(|z - \zeta|) d\zeta + \frac{1}{3} \int_z^{\infty} T^4 d\zeta.$$

Известные неравенства между интегральными показательными функциями [6] позволяют записать $W_4(|z - \zeta|) = \omega(|z - \zeta|)W_2(|z - \zeta|)$, где $\omega \in [1/3, 1]$. Применяя теорему о среднем и используя (1.3), последнее уравнение свеем к обыкновенному дифференциальному

$$(1.4) \quad \omega_1 v \frac{d^2 \Phi}{dz^2} = v\Phi - \frac{\delta}{3} \frac{d\Phi}{dz}, \quad \Phi = \int_z^{\infty} d\zeta \int_{\zeta}^{\infty} E d\varepsilon,$$

где $\omega_1(z) \in [1/3, 1]$; $\delta(z) \in [0, T^4(z)/E(z)]$. В дальнейшем предполагается, что отношение $T^4(z)/E(z) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow 0$ и к бесконечности при $T \rightarrow \infty$. Качественное исследование решений уравнения (1.4) может быть проведено известными методами [8], оно показывает, что при $z \rightarrow \infty$, $T \rightarrow 0$ (1.4) асимптотически эквивалентно

$$\frac{d\Phi}{dz} = -\frac{1}{\omega_0} \Phi, \quad \omega_0 = \omega_1(\infty) = 1,$$

откуда после применения правила Лопиталья находим

$$(1.5) \quad \frac{dE}{dz} = -E, \quad z \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow 0.$$

Из сравнения (1.5) с (1.4) и (0.1) вытекает асимптотическое представление для объемной плотности лучистой энергии

$$U = v \int_z^{\infty} E dz, \quad z \rightarrow \infty.$$

Значит, условия $U \geq 0$, $E \geq 0$ требуют $v > 0$. Физически это означает существование только волны разогрева.

Из (1.5) также следуют асимптотические представления для $T(\eta)$ и $E(\eta)$, которые в физических переменных определяются из выражения

$$(1.6) \quad \eta - \eta_f = -\frac{1}{\kappa^2} \int \frac{dE}{E(T)k(T)}.$$

Здесь η_f — произвольная постоянная, $|\eta_f| < \infty$.

Важно отметить, что (1.4) и граничные условия (1.2) допускают тривиальное решение $E = 0$, которое является особым, так как при $E = T = 0$ нарушается условие единственности.

Из (1.6) видно, что если существует интеграл

$$(1.7) \quad \int_0^1 \frac{dE}{E(T)k(T)} < \infty_x$$

то граничные условия (1.2) выполняются при конечном значении независимой переменной η . Не нарушая общности, будем считать, что условия (1.2) выполняются при $\eta = \eta_f$. При $\eta > \eta_f$ решение должно быть продолжено особым решением $T = E = 0$. При этом в точке $\eta = \eta_f$ выполняются необходимые условия непрерывности T , U и I .

В целях дальнейшего анализа отметим, что при $z \rightarrow -\infty$ (1.4) асимптотически эквивалентно

$$v\Phi - \frac{\delta}{3} \frac{d\Phi}{dz} = 0,$$

откуда следует, что $T(\eta)$ неограниченно возрастает при $z \rightarrow -\infty$, а производная $dT/dz \sim vE/4T^3$.

Решение уравнений (1.1), (1.3) или (1.4) в полном объеме можно, по видимому, найти только численно. Поэтому для подтверждения полученных выводов приведем один пример, когда решение находится аналитически в замкнутом виде. Следуя [9], положим $E = T^4$, тогда переменные в (0.1) разделяются; $T(\eta)$ в этом случае определяется из квадратуры

$$\eta - \eta_f = \frac{4}{\kappa^2 \beta} \int_0^T \frac{dT}{Tk(T)},$$

а $I(\mu, \eta)$ — по формуле

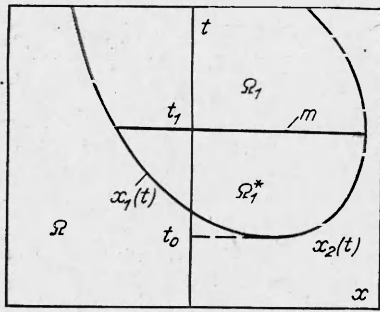
$$I = \frac{T^4}{\beta\mu + 1},$$

где постоянная разделения переменных $\beta \in [-1, 0]$ определяет скорость тепловой волны

$$v = \frac{1}{\beta} \left[1 - \frac{1}{2\beta} \ln \left| \frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right| \right] > 0.$$

Приведенные формулы позволяют проследить все те особенности решений, о которых шла речь выше.

2. Теорема сравнения. Достаточные условия существования фронта. Приступим теперь к анализу особенностей эволюции произвольного теплового импульса, задаваемого начальным условием $T(x, 0) = T_0(x)$. Математически задача формулируется как задача Коши для (0.1) с областью определения $\Omega(x, t) = R_x \times R_t^+$. Эффективное средство качественного анализа задачи Коши — теорема сравнения по начальным данным. В слу-



Р и с. 1

чае приближения лучистой теплопроводности различные варианты теоремы сравнения доказаны в [4, 10—13]. Приведем здесь сжато доказательство аналогичной теоремы для (0.1), основываясь на методе [12, 13] и опуская для краткости некоторые несущественные подробности доказательства.

Для качественного анализа уравнения (0.1) удобно преобразовать его к дивергентной форме

$$(2.1) \quad \partial E / \partial t = -\partial S / \partial x,$$

где $S(x, t)$ — поток лучистой энергии [5, 14]:

$$(2.2) \quad S = \frac{\kappa^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} T^4 k(T) \operatorname{sign}(P) W_2(|P|) d\xi.$$

В частности, из (2.1) непосредственно следует закон сохранения энергии теплового импульса

$$\frac{d}{dt} \int_R E dx = 0,$$

если $S = 0$ при $|x| = \infty$.

Пусть существуют $T_i(x, t)$ ($i = 1, 2$) — решения двух задач Коши для уравнения (2.1), определяемые начальными условиями $T_i(x, 0) = T_{0i}(x)$, причем функции $T_{0i}(x)$ связаны неравенством

$$(2.3) \quad T_{01}(x) \geq T_{02}(x), \quad x \in R.$$

Следуя [10, 12, 13], доказательство теоремы сравнения проведем от противного. Предположим, что существует открытая область $\Omega_1 \subset \Omega$, $\Omega_1 = \{(x, t) : T_2 > T_1\}$, причем $T_2 = T_1$, $(x, t) \in \partial\Omega_1$. Выделим область $\Omega_1^* \subset \Omega_1$, отсекаемую от Ω_1 отрезком прямой m , проектирующим к оси t (рис. 1). Интегрируя (2.1) по Ω_1^* и применяя формулу Грина, получим

$$(2.4) \quad \oint_{\Gamma} E_i dx - \oint_{\Gamma} S_i dt = 0, \quad \Gamma \equiv \partial\Omega_1^*, \quad i = 1, 2.$$

Здесь полагается, что обход кусочно-гладкого контура Γ совершается, как указано на рис. 1 (соотношение (2.4) можно рассматривать как определение обобщенного решения для (0.1), если считать контур Γ произвольным).

Составим разность

$$(2.5) \quad \oint_{\Gamma} (E_1 - E_2) dx - \oint_{\Gamma} (S_1 - S_2) dt = 0.$$

Для первого интеграла в (2.5) имеет место строгое неравенство

$$(2.6) \quad \oint_{\Gamma} (E_1 - E_2) dx = \int_m (E_1 - E_2) dx > 0,$$

так как $T_1 < T_2$, $(x, t) \in \Omega_1$ и направление интегрирования совпадает с направлением обхода контура Γ .

Второй интеграл в (2.5) можно преобразовать к виду

$$\oint_{\Gamma} (S_1 - S_2) dt = \frac{\kappa^2}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 [(c_1 - 1)(q_{11} + q_{12}) + \Delta q_1] d\mu dt -$$

$$-\frac{\kappa_2^2}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_2}^{x_1} [(c_2 - 1)(q_{21} + q_{22}) + \Delta q_2] d\mu dt,$$

где $c_i = \exp\left[-\frac{1}{\mu} |P_i(x_1, x_2)|\right]$;

$$q_{i1} = \int_{-\infty}^{x_1} T_i^4 k(T_i) \exp\left[-\frac{1}{\mu} |P_i(x_1, \zeta)|\right] d\zeta;$$

$$q_{i2} = \int_{x_2}^{\infty} T_i^4 k(T_i) \exp\left[-\frac{1}{\mu} |P_i(x_2, \zeta)|\right] d\zeta;$$

$$\Delta q_i = \int_{x_1}^{x_2} T_i^4 k(T_i) \left[\exp\left(-\frac{1}{\mu} |P_i(x_2, \zeta)|\right) + \exp\left(-\frac{1}{\mu} |P_i(x_1, \zeta)|\right) \right] d\zeta;$$

i — номер решения. Остальные обозначения ясны из рис. 1.

Если коэффициент поглощения $k(T)$ удовлетворяет условиям

$$(2.7) \quad k(T_1) \leq k(T_2), \quad k(T_1) T_1^4 \geq k(T_2) T_2^4, \quad T_1 \geq T_2,$$

то имеют место неравенства $0 < c_1(\mu, t) \leq c_2(\mu, t) < 1$, $q_{11} > q_{21}$, $\Delta q_1 < \Delta q_2$, $q_{21} > q_{22}$, а следовательно, и оценка

$$(2.8) \quad \oint_{\Gamma} (S_1 - S_2) dt < 0.$$

Первое из условий (2.7) предполагает невозрастание коэффициента поглощения при росте температуры вещества, а второе означает физически обоснованное требование увеличения светимости при росте температуры вещества.

Полученные оценки интегралов (2.6), (2.8) показывают, что равенство (2.5) не может быть выполнено. Значит, если имеют место неравенства (2.3), (2.7), решения задач Коши связаны неравенством $T_1(x, t) \geq T_2(x, t)$ во всей области определения $(x, t) \in \Omega$. Это утверждение является теоремой сравнения по начальным данным.

Рассмотрим теперь задачу Коши уравнения (0.1) с начальным условием $T(x, 0) = T_0(x)$, заданным ограниченной финитной функцией: $T_0(x) > 0$ при $x \in]x_{\Phi}^-, x_{\Phi}^+[$, $x_{\Phi}^- < x_{\Phi}^+$, $|x_{\Phi}^{\pm}| < \infty$ и $T_0(x) = 0$ вне этого интервала. Воспользуемся в качестве мажорантного решением типа простой волны для (0.1). Тогда из теоремы сравнения следует, что выполнения соотношений (1.7), (2.7) достаточно для существования поверхности (фронта тепловой волны) $x = x_f^{\pm}(t)$ ($x_f^-(t) < x_f^+(t)$), $|x_f^{\pm}(t)| < \infty$ такой, что

$$T \begin{cases} > 0, & x \in]x_f^-(t), x_f^+(t)[, \\ = 0, & x \notin]x_f^-(t), x_f^+(t)[. \end{cases}$$

Появление фронтальной поверхности физически связывается с конечной скоростью теплопереноса. Наличие теоремы сравнения неравенств (2.7) не является необходимым для существования фронта.

3. Асимптотическое представление для температуры вблизи фронта. Полагая, что условия на фронте $x = x_f(t)$ асимптотически выполняются в малой окрестности фронта, можно получить асимптотическое представление для решения $T(x, t)$ при $x \rightarrow x_f(t)$, попутно уточнив необходимые условия существования фронта. Для определенности будем считать, что $T > 0$ при $x < x_f(t)$ и $T = 0$ при $x \geq x_f(t)$.

Известно несколько методов нахождения таких асимптотических представлений [12, 15, 16]. В частности, им можно придать смысл разложений по гладкости [17].

Следуя [15], продифференцируем условие $E(x_f(t), t) = 0$ по времени

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \dot{x}_f \frac{\partial E}{\partial x} = 0, \quad x = x_f(t), \quad \dot{x}_f \equiv \frac{dx_f}{dt}.$$

Предполагая, что это равенство выполняется асимптотически при $x \rightarrow x_f(t) - 0$, и заменяя производную $\partial E/\partial t$ из (0.1), приходим к соотношению

$$(3.1) \quad -\dot{x}_f \frac{\partial E}{\partial x} = \kappa^2 k(T) (U - T^4), \quad \dot{x}_f \neq 0, \quad x \rightarrow x_f - 0.$$

Сравнивая (3.1) и (1.1), можно установить, что они полностью совпадают, если считать $v = \dot{x}_f$, $\eta = x - x_f(t)$. Тем самым полученные выше результаты относительно существования фронта у простой волны полностью переносятся на случай произвольно движущейся фронтальной поверхности $x = x_f(t)$, $\dot{x}_f \neq 0$. Следовательно, условие (1.7) необходимо для существования фронта тепловой волны и конечной скорости теплопереноса.

Соотношение (1.6), как и в случае простой волны, позволяет найти асимптотическое представление для T вблизи фронта. Асимптотические представления для S и U тогда можно определить из формул

$$S = \dot{x}_f E, \quad U = \kappa^2 \dot{x}_f \int_{x-x_f}^0 k(T) E(T) d\eta.$$

В частности, если задать $k(T) = T^{-\gamma}$, $\gamma > 0$ [1], то для идеального газа $E = T$ получим

$$T \sim [\gamma \kappa^2 (x_f - x)]^{1/\gamma}, \quad S \sim \dot{x}_f T, \quad U \sim \dot{x}_f T, \quad x \rightarrow x_f - 0.$$

Таким образом, если длина пробега излучения соизмерима с характерным размером прогретой излучением области, то нелокальный характер взаимодействия излучения с веществом оказывает существенное влияние на образование фронта тепловой волны.

4. Приближенный анализ проблемы. Значительно более простой по сравнению с (0.1), (0.2) моделью лучистого теплопереноса является диффузионное приближение. Для получения основных соотношений этого приближения проинтегрируем дважды определение S (2.2):

$$(4.1) \quad \int_y^\infty d\zeta \int_\zeta^\infty S d\epsilon = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty T^4 \operatorname{sign}(y - \zeta) W_4(|y - \zeta|) d\zeta + \\ + \frac{1}{3} \int_y^\infty T^4 d\zeta, \quad y = \kappa^2 \int k(T) dx.$$

Используя (2.2), преобразуем (4.1) к виду

$$(4.2) \quad \int_y^\infty d\zeta \int_\zeta^\infty S d\epsilon = \omega(y) S + \frac{1}{3} \int_y^\infty T^4 d\zeta,$$

где

$$(4.3) \quad \omega(y) = \frac{\int_{-\infty}^\infty T^4 \operatorname{sign}(y - \zeta) W_4(|y - \zeta|) d\zeta}{\int_{-\infty}^\infty T^4 \operatorname{sign}(y - \zeta) W_2(|y - \zeta|) d\zeta}.$$

Соотношения между интегральными показательными функциями [6] с помощью теоремы о среднем позволяют оценить $\omega(y) \in [1/3, 1]$. Если теперь положить $\omega = \omega^* - \text{const}$, $\omega^* \in [1/3, 1]$ и продифференцировать (4.2), то, возвращаясь к физическим переменным, получим искомое дифференциальное уравнение

$$(4.4) \quad \omega^* \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\kappa^2 k(T)} \frac{\partial S}{\partial x} = \kappa^2 k(T) S - \frac{1}{3} \frac{\partial T^4}{\partial x},$$

которое в рассматриваемом здесь приближении постулируется вместо определения (2.2). Выбор постоянной ω^* физически может быть связан со способом осреднения I по θ [5, 14]. При этом, как и прежде, справедливо условие непрерывности излучения [1]

$$(4.5) \quad \partial S / \partial x = \kappa^2 k(T) (T^4 - U),$$

которое можно рассматривать как определение $U(x, t)$.

Таким образом, вместо интегродифференциального соотношения (0.1) предлагается рассматривать систему дифференциальных уравнений (2.1), (4.4), (4.5). Заметим, что соотношения (2.1), (4.4), (4.5) с точностью до выбора постоянной ω^* формально совпадают с диффузионным приближением, которое предполагает пропорциональность лучистого потока S и градиента объемной плотности лучистой энергии U [1].

Указанное приближение сохраняет качественные особенности «точных» соотношений (0.1), (0.2). Для него аналогично п. 2 можно доказать теорему сравнения решений задачи Коши по начальным данным. Выполнение условий (2.7) также оказывается необходимым. При этом аналитическое и численное исследования значительно проще. Так, для простой волны сразу приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$(4.6) \quad \omega^* v \frac{d^2 E}{dz^2} = vE + \frac{1}{3} \frac{dT^4}{dz}.$$

Если ввести новую независимую переменную $p = dE/dz$, то (4.6) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

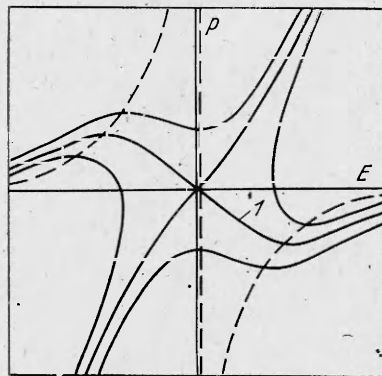
$$(4.7) \quad \omega^* \frac{dp}{dE} = \frac{\frac{1}{3v} \frac{dT^4}{dE} p + E}{p},$$

где $dT^4/dE \geq 0$; $dT^4/dE \rightarrow 0$ и $\kappa \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow 0$ и $\kappa \rightarrow \infty$ соответственно. Как видно, точка $p = E = 0$ особая для (4.7). Характер интегральных кривых вблизи этой точки может быть исследован сведением (4.7) к эквивалентной динамической системе [8]. Проведенный таким образом анализ показывает, что точка $p = E = 0$ — седло. На рис. 2 для $v > 0$ приведен качественный характер интегральных кривых уравнения (4.7) вблизи особой точки. Штриховые кривые соответствуют точкам экстремума функции $p(E)$. На прямой $p = 0$ выполняется условие $|dp/dE| = \infty$. Единственное нетривиальное решение задачи (1.2), (4.6) — сепаратриса семейств интегральных кривых, целиком лежащая в четвертом квадранте плоскости $p - E$ (она помечена цифрой 1).

Проведенный качественный анализ показывает, что асимптотическое представление для решения уравнения (4.6) при $E \rightarrow 0$, $S \rightarrow 0$ можно получить из

$$(4.8) \quad \omega^* dE/dz = -E, \quad z \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow 0.$$

Представление (4.8) совпадает с (1.5) с точностью до умножения на постоянную



Р и с. 2

ω^* . Это означает, что все полученные в п. 1, 3 асимптотические представления при $T \rightarrow 0$ сохраняют свой характер и здесь. Они полностью совпадают, если положить $\omega^* = 1$. Существование интеграла (1.7) приводит к появлению фронта тепловой волны и, следовательно, к конечной скорости теплопереноса для рассматриваемого диффузионного приближения.

Заметим, что в случае численной реализации соотношение (4.3) дает возможность уточнять приближенное решение, полученное на основе (4.4).

В заключение автор благодарит К. Б. Павлова и Л. Д. Покровского за высказанные критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Наука, 1966.
2. Зельдович Я. Б., Компанец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры.— Сб., посвященный семидесятилетию акад. А. Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950.
3. Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1958, т. 22, № 5.
4. Калашников А. С. О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением.— ЖВММФ, 1974, т. 14, № 4.
5. Унзольд А. Физика звездных атмосфер.— М.: ИЛ, 1949.
6. Справочник по специальным функциям/Под ред. А. Абрамовица, И. Стиган.— М.: Наука, 1979.
7. Красносельский М. А., Михлин С. Г. и др. Справочная математическая библиотека. Интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968.
8. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений.— М.: ИЛ, 1961.
9. Думкина Г. В., Козманов М. Ю. Точное решение нелинейной системы уравнений энергии и нестационарного переноса излучения.— ЖВММФ, 1979, № 4.
10. Баренблатт Г. И., Вишик М. И. О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа.— ПММ, 1956, т. 20, № 3.
11. Галактионов В. А., Курдюмов С. П. и др. О сравнении решений параболических уравнений.— ДАН СССР, 1979, т. 248, № 3.
12. Покровский Л. Д., Тараненко С. Н. Пространственная локализация решений нелинейных уравнений параболического типа.— Труды МВТУ, 1980, № 336.
13. Романов А. С. О сравнении решений нелинейного уравнения теплопроводности.— Дифференциальные уравнения, 1984. Деп. в ВИНТИ, № 4273—84.
14. Прокофьев В. А. К вопросу об учете излучения при одномерном стационарном движении одноатомного газа.— Учен. зап. МГУ. Механика, 1954, т. 5, вып. 172.
15. Самарский А. А., Соболев И. М. Примеры численного расчета температурных волн.— ЖВММФ, 1963, т. 3, № 4.
16. Павлов К. Б., Романов А. С. Об изменении области локализации возмущений в процессах нелинейного переноса.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 6.
17. Маслов В. П. Распространение ударных волн в изэнтропическом невязком газе.— В кн.: Современные проблемы математики. Итоги науки и техники. М.: ВИНТИ, 1977, т. 8.

Поступила 10/II 1985 г.

УДК 536.42

ОБ УПРАВЛЕНИИ ФОРМОЙ ФРОНТОВ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА В ПРОЦЕССЕ ЗОННОЙ ПЛАВКИ

О. М. Лаврентьева

(Новосибирск)

Для получения монокристаллов широко используется метод зонной плавки, при осуществлении которого длинный образец протягивается через нагреватель [1, 2]. В результате возникает зона расплава, заключенная между расходуемым стержнем из поликристаллического материала и образующимся монокристаллом. Варианты метода различаются по способу нагрева и охлаждения, а также по тому, заключен ли образец в тигель или нет. Качество получаемого кристалла зависит от формы возникающих поверхностей фазового перехода, которая определяется граничным режимом на поверхности слитка. Важное значение имеет задача определения гранично-