

УДК 532.517.013.4:536.252

ОБ ОДНОМ СТАЦИОНАРНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ МИКРОКОНВЕКЦИИ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ

В. Б. Бекежанова

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск

Рассмотрена стационарная задача о конвекции жидкости в слое в модели микроконвекции, предложенной В. В. Пухначевым. Построены профили скорости для различных классов граничных условий. Проведено сравнение решений данной задачи и классической на основе модели Обербека — Буссинеска.

Система уравнений микроконвекции. В работе [1] В. В. Пухначевым предложена модель микроконвекции, в которой зависимость плотности от температуры имеет вид

$$\rho = \rho_0(1 + \beta\Theta)^{-1} \quad (1)$$

(ρ_0, β — положительные постоянные). Математическая формулировка модели следующая:

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 0; \quad (2)$$

$$\mathbf{w}_t + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} + \beta\chi(\nabla\Theta \cdot \nabla \mathbf{w} - \nabla \mathbf{w} \cdot \nabla \Theta) + \beta^2\chi^2(\Delta\Theta\nabla\Theta - \nabla|\nabla\Theta|^2/2) = (1 + \beta\Theta)(-\nabla q + \nu\Delta \mathbf{w}) + \mathbf{g}; \quad (3)$$

$$\Theta_t + \mathbf{w} \cdot \nabla \Theta + \beta\chi|\nabla\Theta|^2 = (1 + \beta\Theta)\chi\Delta\Theta, \quad (4)$$

где $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \beta\chi\nabla\Theta$, $q = \rho_0^{-1}(p - \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}) - \beta(\nu - \chi)\chi\Delta\Theta$ — неизвестные функции; $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ — истинный вектор скорости; β — коэффициент температурного расширения; $\chi = k/(\rho_0 c)$ — температуропроводность (теплопроводность k и удельная теплоемкость жидкости c постоянны); p — истинное давление жидкости; λ — коэффициент второй вязкости; $\nu = \mu/\rho_0$ — кинематическая вязкость; μ — динамическая вязкость.

Функции $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$, $q(\mathbf{x}, t)$, $\Theta(\mathbf{x}, t)$ — решение системы (2)–(4) с граничными условиями на твердых стенках

$$\mathbf{w} + \beta\chi\nabla\Theta = 0, \quad \Theta = \Theta_w(\mathbf{x}, t) \quad (5)$$

либо

$$\mathbf{w} + \beta\chi\nabla\Theta = 0, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial n} + \delta(\Theta - \Theta_{ext}) = d, \quad (6)$$

где Θ_{ext} — внешняя температура (температура окружающей среды). Первое условие в (5) есть условие прилипания ($\mathbf{v} = 0$) на неподвижной твердой стенке, второе задает температуру на стенках. В (6) второе условие характеризует теплообмен с окружающей средой (при $\delta = 0$ задается поток тепла). Кроме того, для нестационарных движений необходимо задать начальные условия $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0(\mathbf{x})$, $\operatorname{div} \mathbf{w}_0 = 0$, $\Theta = \Theta_0(\mathbf{x})$ при $t = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Система (2)–(4) для определения функций \mathbf{w} , q , Θ получена из точных уравнений неразрывности, импульса и энергии в работе [1]. В [2] показано, что классическая аппроксимация Обербека — Буссинеска непригодна для описания тепловой гравитационной конвекции, если безразмерный параметр $\varepsilon_1 = |g|a^3/(\nu\chi)$ (a — характерный

линейный размер) имеет порядок, меньший или равный единице. Для данной жидкости малость параметра ε_1 может быть обеспечена как за счет малости ускорения свободного падения \mathbf{g} , так и за счет малости масштаба длины a . Разрешимость задачи (2)–(4) в классах Гёльдера установлена в [3].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Уравнение импульса (3) можно записать в ином виде. Действительно, $\nabla\Theta \cdot \nabla\mathbf{w} - \nabla\mathbf{w} \cdot \nabla\Theta = \nabla\Theta \cdot \nabla\mathbf{w} - \nabla\Theta \cdot (\nabla\mathbf{w})^* = \text{rot } \mathbf{w} \times \nabla\Theta$ (знак “*” обозначает сопряжение), далее $\nabla|\nabla\Theta|^2/2 = \nabla\Theta \cdot \nabla(\nabla\Theta)$, поэтому $\Delta\Theta\nabla\Theta - \nabla|\nabla\Theta|^2/2 = [\text{div}(\nabla\Theta)I - \partial(\nabla\Theta)/\partial\mathbf{x}]\nabla\Theta = \text{div}[\nabla\Theta \otimes \nabla\Theta - |\nabla\Theta|^2I]$, где I — единичный тензор; знак “ \otimes ” обозначает тензорное произведение. С учетом этих формул (3) записывается в виде

$$\mathbf{w}_t + \mathbf{w} \cdot \nabla\mathbf{w} + \beta\chi \text{rot } \mathbf{w} \times \nabla\Theta + \beta^2\chi^2 \text{div}[\nabla\Theta \otimes \nabla\Theta - |\nabla\Theta|^2I] = (1 + \beta\Theta)(-\nabla q + \nu\Delta\mathbf{w}) + \mathbf{g},$$

который более удобен для получения априорных оценок.

Решение стационарной задачи в случае особого распределения температуры. Выберем систему координат так, что $\mathbf{g} = (0, -g, 0)$. Предположим, что жидкость заполняет слой $|x| < a$, границы слоя — твердые плоскости, на которых задан поток тепла. Если величина теплового потока не зависит от z , то возможны плоские течения в вертикальном слое. Они реализуются в случае, когда начальные распределения скорости и температуры не зависят от z и компонента скорости $v_z = 0$ при $t = 0$. Ниже рассматриваются только стационарные течения в слое.

Система уравнений (2)–(4) в плоском случае для стационарного течения ($\mathbf{w}_t = 0$, $\Theta_t = 0$) допускает операторы $\partial/\partial y$ и $\psi\partial/\partial q$, что отражает ее инвариантность относительно преобразований переноса по оси y и увеличения q (аналога давления) на произвольную константу ψ . Инвариантные решения системы (2)–(4) относительно оператора $\partial/\partial y + \psi\partial/\partial q$ представим в виде

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, 0), \quad w_1(x) \equiv u, \quad w_2(x) \equiv v, \quad \Theta = \Theta(x), \quad q = (\varphi - g)y + r(x), \quad (7)$$

где $\varphi = \psi + g$. В выражении для q член $-gy$ соответствует гидростатической составляющей в представлении истинного давления p . Подстановка (7) в систему (2)–(4) приводит к тому, что система распадается на последовательно решаемые уравнения относительно неизвестных функций $u(x)$, $v(x)$, $\Theta(x)$, $r(x)$ ($\varphi = \text{const}$).

Из уравнения неразрывности (2) следует, что $w_1 = \text{const}$, а $w_2(x)$ — произвольная функция. Полагаем, что $u \equiv w_1 = u_0 = \text{const}$, $v \equiv w_2$ — произвольная функция.

Уравнение энергии (4) с учетом (7) принимает вид $(u_0 + \beta\chi\Theta_x)\Theta_x = (1 + \beta\Theta)\chi\Theta_{xx}$. Последнее уравнение второго порядка имеет двухпараметрическое семейство стационарных решений

$$\Theta(x) = \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{c_1} - 1 + c_2 \exp\left(\frac{c_1 u_0 x}{\chi}\right) \right] \quad (c_1 \neq 0) \quad (8)$$

и особое решение

$$\Theta_0(x) = \bar{\Theta} - u_0 x / (\beta\chi) \quad (\bar{\Theta} = \text{const}). \quad (9)$$

Согласно (6) при $\delta = 0$ граничное условие на стенках ($x = \pm a$) для решения (7) имеет вид $\Theta_x = -u_0/(\beta\chi) \equiv d$. Этому условию удовлетворяет только поле температур (9) при любой постоянной $\bar{\Theta}$.

Проецируя (3) на ось x , получим $(1 + \beta\Theta_0)(-r_x) = 0$, т. е. $r = r_0 = \text{const}$. Функция $q(x, y)$ определяется с точностью до постоянной, и можно считать $r_0 \equiv 0$. Проекция (3) на ось y дает уравнение

$$\begin{aligned} (u_0 + \beta\chi\Theta_{0x})v_x &= (1 + \beta\Theta_0)(\nu v_{xx} - \varphi) + (1 + \beta\Theta_0)g - g = \\ &= (1 + \beta\Theta_0)(\nu v_{xx} - \varphi) + \beta\Theta_0 g. \end{aligned} \quad (10)$$

Согласно (9) $u_0 + \beta\chi\Theta_{0x} = 0$, уравнение (10) упрощается:

$$\left(1 + \beta\bar{\Theta} - \frac{u_0x}{\chi}\right)(\nu v_{xx} - \varphi) + \beta\bar{\Theta}g - \frac{u_0g}{\chi}x = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) — обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, в котором φ — неизвестная постоянная. Для его решения необходимы три условия. Поскольку $\nabla\Theta = (\Theta_{0x}, 0)$, то

$$v(x) = 0, \quad x = \pm a. \quad (12)$$

Для однозначной определенности $v(x)$ требуется найти постоянную φ . Решение (7) приближенно описывает конвекцию в центральной части конечной замкнутой полости, длина которой больше ширины $2a$. Наложим на это решение условие нулевого массового расхода жидкости через любое поперечное сечение слоя $y = \text{const}$:

$$\int_{-a}^a \rho(x)v_2(x) dx = 0, \quad (13)$$

где $v_2(x)$ — истинная скорость; $\rho(x)$ — плотность жидкости. В решении (7) $v_2(x) = v(x)$. С учетом уравнения состояния (1) получим

$$\int_{-a}^a \frac{v(x)}{1 + \beta\Theta_0(x)} dx = 0. \quad (14)$$

Общее решение уравнения (11) записывается в виде

$$v = \frac{1}{\nu} \left[(\varphi - g) \frac{x^2}{2} + c_1x + c_2 + \frac{g\chi^2}{u_0^2} \left(1 + \beta\bar{\Theta} - \frac{u_0x}{\chi}\right) \left(\ln \left(1 + \beta\bar{\Theta} - \frac{u_0x}{\chi}\right) - 1\right) \right] \quad (15)$$

с произвольными постоянными c_1, c_2 , которые находятся из (12):

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{g\chi^2}{2au_0^2} \left(f_1 \ln f_1 - f_2 \ln f_2 + 2 \frac{u_0a}{\chi} \right), \\ c_2 &= \frac{g - \varphi}{2} a^2 - \frac{g\chi^2}{2u_0^2} (f_1 \ln f_1 + f_2 \ln f_2 - 2(1 + \beta\bar{\Theta})). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $f_1 = 1 + \beta\bar{\Theta} - u_0a/\chi$; $f_2 = 1 + \beta\bar{\Theta} + u_0a/\chi$.

Подставляя (15) в (14), с учетом (16) находим

$$\begin{aligned} \varphi &= g \left\{ 1 - \left[\frac{\chi}{2u_0a} (\ln f_2 - \ln f_1) \left(f_1 \ln f_1 + f_2 \ln f_2 + \frac{\chi}{u_0a} (1 + \beta\bar{\Theta})(f_1 \ln f_1 - f_2 \ln f_2) \right) + 2 \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[1 + \beta\bar{\Theta} + (\ln f_2 - \ln f_1) \left(\frac{u_0a}{2\chi} - \frac{\chi}{2u_0a} (1 + \beta\bar{\Theta})^2 \right) \right]^{-1} \right\}. \end{aligned}$$

Полученное решение сравним с решением стационарной задачи в приближении Обербека — Буссинеска. Поля температур в обоих решениях совпадают. Кроме того, горизонтальная компонента скорости равна нулю как в классической, так и в новой постановке. Отличие проявляется в вертикальной компоненте: в модели Обербека — Буссинеска она имеет вид

$$v = -\frac{gu_0}{6\nu\chi} x(a^2 - x^2). \quad (17)$$

Для сравнения формул (15) и (17) запишем их в безразмерном виде. Для этого выберем характерный линейный размер $x = \eta a$ и введем безразмерные параметры $\gamma = u_0 a / \chi$, $\varepsilon = \beta \bar{\Theta}$. Переходя к безразмерной переменной, получим

$$v = -\frac{g u_0}{6 \nu \chi} a^3 \eta (1 - \eta^2).$$

Здесь коэффициент $g u_0 a^3 / (6 \nu \chi)$ измеряется в сантиметрах в секунду. Разделим v на этот коэффициент и полученное выражение обозначим v_b , в результате имеем

$$v_b = -\frac{6 \nu \chi}{g u_0 a^3} v = \eta - \eta^3. \quad (18)$$

Обозначим в новой модели скорость через v_n , тогда согласно (15)

$$v_n = -\frac{\nu}{g a^2} v = \frac{p_1(\varepsilon, \gamma)}{4 \gamma p_2(\varepsilon, \gamma)} \eta^2 - \frac{p_3(\varepsilon, \gamma)}{2 \gamma^2} \eta + \frac{p_1(\varepsilon, \gamma)}{4 \gamma p_2(\varepsilon, \gamma)} - \frac{p_4(\varepsilon, \gamma)}{2 \gamma^2} + \frac{1 + \varepsilon - \gamma \eta}{\gamma^2} (\ln(1 + \varepsilon - \gamma \eta) - 1), \quad (19)$$

где

$$p_1(\varepsilon, \gamma) = (\ln f_2^* - \ln f_1^*) \left[f_1^* \ln f_1^* + f_2^* \ln f_2^* + \frac{1 + \varepsilon}{\gamma} (f_1^* \ln f_1^* - f_2^* \ln f_2^*) \right] + 4 \gamma;$$

$$p_2(\varepsilon, \gamma) = 1 + \varepsilon + (\ln f_2^* - \ln f_1^*) \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2 \gamma} (1 + \varepsilon)^2 \right);$$

$$p_3(\varepsilon, \gamma) = f_1^* \ln f_1^* - f_2^* \ln f_2^* + 2 \gamma; \quad p_4(\varepsilon, \gamma) = f_1^* \ln f_1^* + f_2^* \ln f_2^* - 2(1 + \varepsilon).$$

Постоянные $f_1^* = 1 + \varepsilon - \gamma$, $f_2^* = 1 + \varepsilon + \gamma$ соответствуют f_1, f_2 .

Сравнение формул (18), (19) показывает, что функция v_n не является нечетной в отличие от распределения вертикальной скорости стационарного слоистого конвективного течения в вертикальном слое, которое является нечетной функцией согласно классической модели конвекции. Профили скорости представлены на рис. 1, где кривая 1 — профиль скорости $v_b = v$ в классической модели; кривые 2–5 — профили скорости $v_n = v \cdot 10^2$ в новой модели (2 — $\varepsilon = 0,1$, $\gamma = 0,1$; 3 — $\varepsilon = 0,1$, $\gamma = 0,5$; 4 — $\varepsilon = 0,01$, $\gamma = 0,1$; 5 — $\varepsilon = 0,01$, $\gamma = 0,5$). Видно, что с увеличением разности температур стенок значение $v_n(0)$ возрастает, а максимальное значение v_n^{\max} смещается в сторону нагретой стенки.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Движение в вертикальной щели (для решения вида (9) и его нестационарного варианта) исследовалось в работе [2]. Граничные условия были взяты в виде (6). Однако в [2] допущены некоторые неточности в формулах для температуры и, следовательно, скорости и отсутствуют явные формулы для скорости, необходимые для исследования устойчивости этого течения.

Анализ стационарного решения при заданной температуре на стенках. Рассмотрим случай, когда граничные условия берутся в виде (5), т. е. на стенках $x = \pm a$ задается температура θ_1, θ_2 . Согласно второму условию (5) имеем $\Theta|_{x=-a} = \theta_1$, $\Theta|_{x=a} = \theta_2$. Из (9) получим $\theta_1 = \bar{\Theta} + u_0 a / (\beta \chi)$, $\theta_2 = \bar{\Theta} - u_0 a / (\beta \chi)$. Таким образом, особое решение (9) будет удовлетворять этим условиям, если постоянные u_0 и $\bar{\Theta}$ зависят от θ_1, θ_2 следующим образом:

$$\bar{\Theta} = (\theta_1 + \theta_2) / 2, \quad u_0 = (\theta_1 - \theta_2) \beta \chi / (2a).$$

При этом плотность положительна ($\beta \bar{\Theta} > -1$) и $\bar{\Theta} > 0$ в слое $|x| < a$.

Для стационарных решений вида (8) на стенках должны выполняться условия

$$\frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{c_1} - 1 + c_2 \exp \left(-\frac{c_1 u_0 a}{\chi} \right) \right] = \theta_1, \quad \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{c_1} - 1 + c_2 \exp \left(\frac{c_1 u_0 a}{\chi} \right) \right] = \theta_2. \quad (20)$$

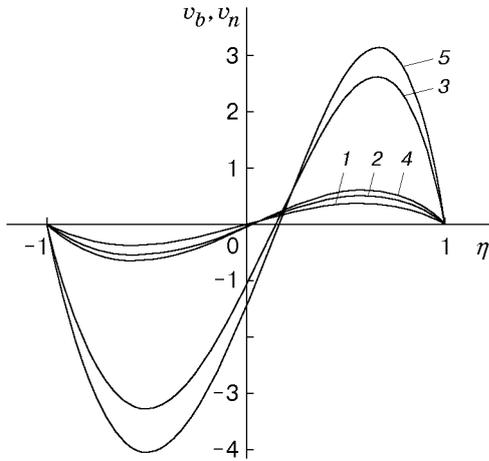


Рис. 1

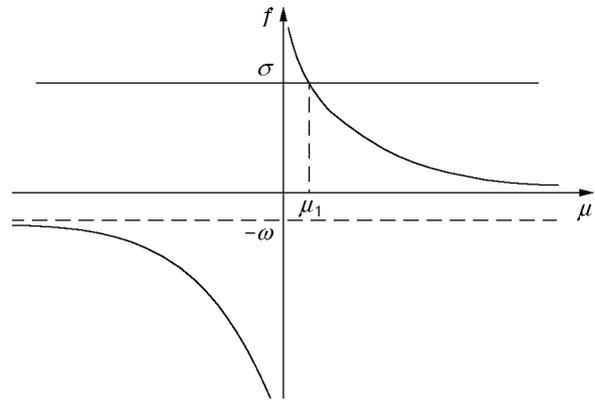


Рис. 2

Вычитая из второго уравнения системы (20) первое, получим

$$\frac{c_2}{\beta} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\exp(\mu) - \exp(-\mu)}, \tag{21}$$

где $\mu = c_1 u_0 a / \chi$.

Рассмотрим возможные варианты.

1. Если $\theta_1 = \theta_2$, то $c_2 = 0$, $c_1 = 1/(1 + \beta\theta_1)$, т. е. температура в слое постоянна.

2. Пусть $\theta_1 \neq \theta_2$. Подставив (21) в первое уравнение (20), после замены $\omega = \beta\chi(\theta_2 - \theta_1)/(u_0 a)$, $\sigma = (1 + \beta\theta_1)\chi/(u_0 a)$ получим уравнение

$$\frac{1}{\mu} + \frac{\omega}{\exp(2\mu) - 1} = \sigma. \tag{22}$$

Заметим, что $\sigma > 0$ (считаем $u_0 > 0$). Выясним, существуют ли решения уравнения (22). Пусть $f(\mu) = 1/\mu + \omega/(\exp(2\mu) - 1)$. Производная этой функции имеет вид

$$f'(\mu) = -\frac{1}{\mu^2} - \frac{2\omega \exp(2\mu)}{(\exp(2\mu) - 1)^2}. \tag{23}$$

2'. При $\omega > 0$ ($\theta_2 > \theta_1$) функция $f(\mu)$ монотонно убывает ($f'(\mu) < 0$) в области определения. Поэтому существует единственное решение $f(\mu_1) = \sigma$ и $\mu_1 > 0$ (рис. 2), т. е. существуют единственные постоянные

$$c_1 = \frac{\chi}{u_0 a} \mu_1 > 0, \quad c_2 = \frac{2\beta(\theta_2 - \theta_1)}{\text{sh } \mu_1}. \tag{24}$$

Пусть $\omega < 0$. При $\mu \rightarrow 0$ имеем $f(\mu) \approx (1/\mu)[1 + \omega/2 - \omega\mu/2]$, следовательно, необходимо рассмотреть случаи $1 + \omega/2 = 0$, $-2 < \omega < 0$, $\omega < -2$.

3. Пусть $1 + \omega/2 = 0$, т. е. $\omega = -2$. Тогда $f(+\infty) = 0$, $f(-\infty) = 2$ и $f \rightarrow 1$ при $\mu \rightarrow \pm 0$. Согласно (23) при $\omega = -2$ производная $f'(\mu) = -1/\mu^2 + 4 \exp(2\mu)/(\exp(2\mu) - 1)^2$. Определим, имеет ли $f(\mu)$ точки локального экстремума. Можно показать, что $f'(\mu_*) = 0$ тогда и только тогда, когда выполняется $|\text{sh } \mu_*| = |\mu_*|$. Последнее равенство выполняется только при $\mu_* = 0$, но в точке $\mu = 0$ в данном случае $f(0) = 1$. Производная $f'(\mu) \leq 0$ ($f'(\mu) = 0$ только при $\mu = 0$), значит, функция $f(\mu)$ убывает на всей оси. Таким образом, единственное решение (22) при $\omega = -2$ есть μ_1 , и оно существует только при $0 < \sigma < 2$. Это означает, что существуют однозначно определенные постоянные c_1, c_2 для указанных значений σ (рис. 3).

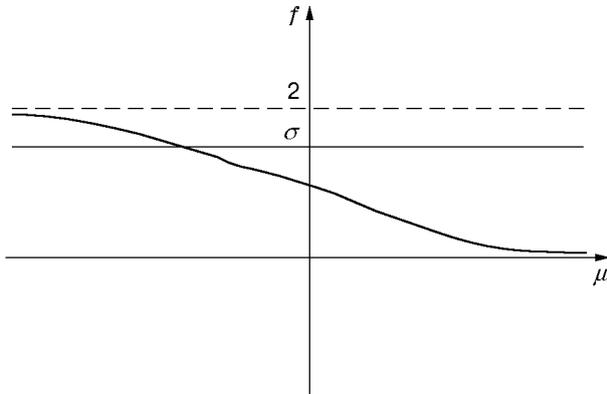


Рис. 3

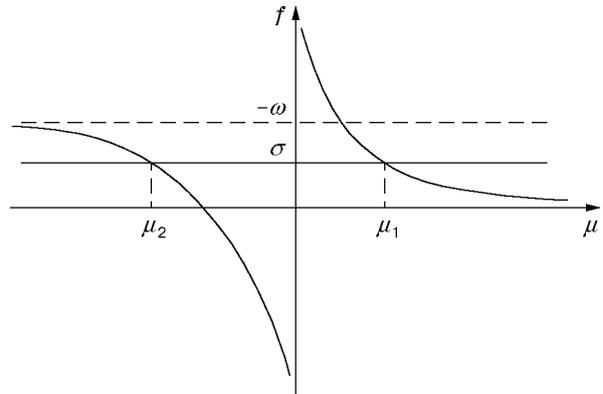


Рис. 4

4. Пусть $1 + \omega/2 > 0$, т. е. $\omega > -2$. Тогда $f(\mu) \sim (1 + \omega/2)/\mu$. Функция $f(\mu)$ имеет разрыв в точке $\mu = 0$ и $f(\pm 0) = \pm\infty$. Если $f'(\mu_*) = 0$, то возможны следующие случаи:

а) $-2 < \omega < 0$;

б) $\omega > 0$ (этот случай сводится к случаю 2').

В случае "а" имеем $-\omega = |\omega|$. Рассмотрим уравнение $f'(\mu) = 0$, т. е.

$$f'(\mu) = -\frac{1}{\mu^2} + \frac{|\omega|}{2 \operatorname{sh}^2 \mu} = 0. \quad (25)$$

Производная равна нулю только при $\operatorname{sh}^2 \mu_* = |\omega| \mu_*^2 / 2$ ($\mu_* \neq 0$). Заметим, что если μ — решение (25), то и $-\mu$ — решение (25). Поэтому будем считать $\mu_* > 0$. Тогда $\operatorname{sh} \mu_* = \sqrt{|\omega|/2} \mu_*$. Нетрудно показать, что решение уравнения (25) будет существовать только при $|\omega| > 2$, а поскольку в данном случае $-2 < \omega < 0$, последнее уравнение решений не имеет. Таким образом, производная $f'(\mu)$ сохраняет знак в области определения ($f'(\mu) < 0$), и функция $f(\mu)$ убывает.

Если $0 < \sigma < -\omega$, то уравнение (22) имеет два решения: $\mu_1 > 0$ и $\mu_2 < 0$. Значит, существует две пары констант (c_1^1, c_2^1) , (c_1^2, c_2^2) . Если $\sigma \geq -\omega$, уравнение (22) имеет одно решение (рис. 4).

5. Пусть $1 + \omega/2 < 0$, т. е. $\omega < -2$ и $-\omega = |\omega|$. Функция $f(\mu) \sim (1 + \omega/2)/\mu$, а при $\mu \rightarrow 0$ согласно определению функции $f(+0) \rightarrow -\infty$ и $f(-0) \rightarrow +\infty$. Нетрудно показать, что решениями уравнения

$$f'(\mu) = \frac{1}{\mu^2 \operatorname{sh}^2 \mu} \left[\frac{|\omega|}{2} \mu^2 - \operatorname{sh}^2 \mu \right] = 0$$

будут $\mu_* > 0$ и $-\mu_*$, если выполняется неравенство $|\omega| > 2$. Таким образом, $f(-\mu_*) = -1/\mu_* - |\omega|(\exp(-2\mu_*) - 1)$ и $f(\mu_*) = \omega(\exp(2\mu_*) - 1) + 1/\mu_*$. Вообще говоря, при $f(-\mu_*) < f(\mu_*)$ уравнение (22) может иметь четыре решения, если $f(-\mu_*) < \sigma < f(\mu_*)$. Покажем, что $f(\mu_*) < f(-\mu_*)$. Другими словами, надо показать, что $2/\mu_* < |\omega| \operatorname{cth} \mu_*$. Последнее неравенство эквивалентно $\operatorname{th} \mu_* < |\omega| \mu_* / 2$ ($\mu_* > 0$). Для проверки этого неравенства рассмотрим функцию $h(\mu) = \operatorname{th} \mu - |\omega| \mu / 2$. Имеем $h(0) = 0$, $h'(\mu) = 1/\operatorname{ch}^2 \mu - |\omega|/2$. Определим знак производной в точке $\mu = 0$. Очевидно, что $h'(0) = 1 - |\omega|/2 < 0$. Так как $\operatorname{ch} \mu > 1$, выполняется условие $h'(\mu) < 0$, т. е. функция $h(\mu)$ убывает. Значит, $h(\mu) < 0$ при $\mu > 0$, т. е. $\operatorname{th} \mu_* < |\omega| \mu_* / 2$, или $f(\mu_*) < f(-\mu_*)$. Итак, если $f(\mu_*) < \sigma < f(-\mu_*)$, то уравнение (22) решений не имеет. Если $f(-\mu_*) < \sigma < -\omega$ или $0 < \sigma < f(\mu_*)$, то уравнение (22) имеет два решения, а если $\sigma = f(\mu_*)$, $\sigma = f(-\mu_*)$ или $\sigma \geq -\omega$, — одно решение (рис. 5).

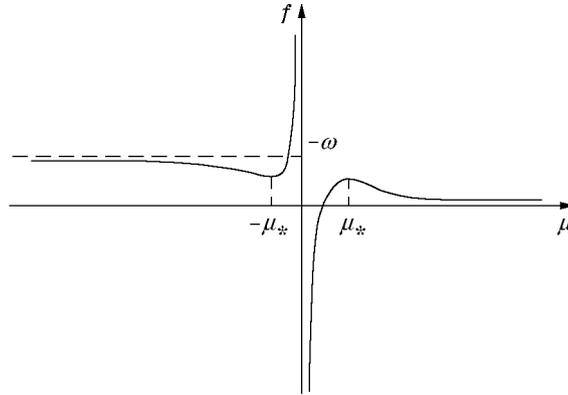


Рис. 5

Проверим выполнение условий, при которых решение уравнения (22) неединственное. Для всех приведенных выше случаев должно быть справедливо неравенство $\sigma < -\omega$:

$$(1 + \beta\theta_1)\chi/(u_0a) < -\beta\chi(\theta_2 - \theta_1)/(u_0a),$$

откуда получаем $\theta_2 < 0$. Таким образом, ни одно из условий, при котором уравнение (22) может иметь два решения, не выполняется. Следовательно, при любых значениях θ_1 и θ_2 уравнение (22) имеет только одно решение. Единственные значения c_1, c_2 определяются из (24).

Принимая $\Theta(x)$ в виде (8) с указанными c_1, c_2 , проецируем (3) на ось y . В результате получим уравнение для определения вертикальной компоненты скорости v

$$(1/c_1 + c_2 \exp(kx))\nu v_{xx} - c_1 c_2 u_0 \exp(kx) v_x = f(x), \quad (26)$$

где $k = c_1 u_0 / \chi$; $f(x) = \varphi(1/c_1 + c_2 \exp(kx)) - g(1/c_1 - 1 + c_2 \exp(kx))$.

После замены $z = 1 + c_1 c_2 \exp(kx)$ общее решение уравнения (26) имеет вид

$$v = \int_{h_1}^z \frac{z^\alpha}{z-1} \left[\frac{\varphi - g}{\nu k^2} \int \frac{dz}{z^\alpha(z-1)} + \frac{g c_1}{\nu k^2} \int \frac{dz}{z^{\alpha+1}(z-1)} + D_1 \right] dz + D_2, \quad (27)$$

где D_1, D_2 — постоянные; $h_1 = 1 + c_1 c_2 \exp(-ak)$; $\alpha = \chi/\nu \equiv 1/\text{Pr}$; Pr — число Прандтля. Постоянная φ определяется из (13):

$$\varphi = g(1 - c_1 F_1) - D_1 \nu k^2 F_2,$$

где

$$F_1 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{z} \int_{h_1}^z \frac{\sigma^\alpha}{\sigma-1} \int_{h_1}^\sigma \frac{d\tau}{\tau^{\alpha+1}(\tau-1)} d\sigma dz \left(\int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{z} \int_{h_1}^z \frac{\sigma^\alpha}{\sigma-1} \int_{h_1}^\sigma \frac{d\tau}{\tau^\alpha(\tau-1)} d\sigma dz \right)^{-1};$$

$$F_2 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{z} \int_{h_1}^z \frac{\sigma^\alpha}{\sigma-1} d\sigma dz \left(\int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{z} \int_{h_1}^z \frac{\sigma^\alpha}{\sigma-1} \int_{h_1}^\sigma \frac{d\tau}{\tau^\alpha(\tau-1)} d\sigma dz \right)^{-1}.$$

Константы интегрирования D_1, D_2 находятся из условия прилипания на неподвижной твердой стенке:

$$D_1 = \left(\frac{gc_1 F_1}{\nu k^2} \int_{h_1}^{h_2} \frac{z^\alpha}{z-1} \int_{h_1}^z \frac{d\sigma}{\sigma^\alpha(\sigma-1)} dz - \frac{gc_1}{\nu k^2} \int_{h_1}^{h_2} \frac{z^\alpha}{z-1} \int_{h_1}^z \frac{d\sigma}{\sigma^{\alpha+1}(\sigma-1)} dz \right) \times \\ \times \left(\int_{h_1}^{h_2} \frac{z^\alpha}{z-1} dz - F_2 \int_{h_1}^{h_2} \frac{z^\alpha}{z-1} \int_{h_1}^z \frac{d\sigma}{\sigma^\alpha(\sigma-1)} dz \right)^{-1}, \quad D_2 = 0,$$

где $h_2 = 1 + c_1 c_2 \exp(ak)$.

Для сравнения полученного решения для вертикальной компоненты с аналогичным решением стационарной задачи в классической постановке введем безразмерный параметр $\gamma_1 = ak$ и с помощью замены $z = 1 + c_1 c_2 \exp(\gamma_1 \eta)$ запишем (27) в безразмерном виде

$$v_n = \frac{\nu k^2}{g} v(\eta), \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad (28)$$

где

$$v(\eta) = -(c_1 F_1 + D_1^* F_2) \gamma_1^2 \int_{-1}^{\eta} (1 + c_1 c_2 \exp(\gamma_1 \eta))^\alpha \int \frac{d\sigma}{(1 + c_1 c_2 \exp(\gamma_1 \sigma))^\alpha} d\eta + \\ + c_1 \gamma_1^2 \int_{-1}^{\eta} (1 + c_1 c_2 \exp(\gamma_1 \eta))^\alpha \int \frac{d\sigma}{(1 + c_1 c_2 \exp(\gamma_1 \sigma))^{\alpha+1}} d\eta + D_1^*; \\ D_1^* = \left(c_1 F_1 \gamma_1^2 \int_{-1}^1 (1 + c_1 c_2 \exp(\gamma_1 \eta))^\alpha \int_{-1}^{\eta} \frac{d\sigma}{(1 + c_1 c_2 \exp(\gamma_1 \sigma))^\alpha} d\eta - \right. \\ \left. - c_1 \gamma_1^2 \int_{-1}^1 (1 + c_1 c_2 \exp(\gamma_1 \eta))^\alpha \int_{-1}^{\eta} \frac{d\sigma}{(1 + c_1 c_2 \exp(\gamma_1 \sigma))^{\alpha+1}} d\eta \right) \left(\gamma_1 \int_{-1}^1 (1 + c_1 c_2 \exp(\gamma_1 \eta))^\alpha d\eta - \right. \\ \left. - F_2 \gamma_1^2 \int_{-1}^1 (1 + c_1 c_2 \exp(\gamma_1 \eta))^\alpha \int_{-1}^{\eta} \frac{d\sigma}{(1 + c_1 c_2 \exp(\gamma_1 \sigma))^\alpha} d\eta \right)^{-1}.$$

Профили скорости представлены на рис. 6, где кривая 1 — профиль скорости $v_b = v$ в классической модели, кривые 2–7 — профили скорости $v_n = v \cdot 10^3$ в новой модели (2 — разность температур $\Delta\Theta = 20$ °C; 3 — $\Delta\Theta = 50$ °C; 4 — $\Delta\Theta = 100$ °C; 5 — $\Delta\Theta = 20$ °C; 6 — $\Delta\Theta = 50$ °C; 7 — $\Delta\Theta = 100$ °C); сплошные линии — $a = 0,05$ см, штриховые — $a = 0,025$ см. Видно, что максимальное значение v_n^{\max} растет с увеличением $\Delta\Theta$, кроме того, для профиля (28) характерно смещение значения v_n^{\max} в сторону нагретой стенки.

Расчеты проводились для расплавов кремния при $u_0 = 1$. При этом получены следующие значения:

1) $a = 0,025$ см, $\Delta\Theta = 20$ °C:

$$c_1 = 9,886\,931\,958\,7 \cdot 10^{-1}, \quad c_2 = 6,066\,145\,631\,4 \cdot 10^{-3}, \\ \varphi = 1,685\,645\,101\,2 \cdot 10^{-1}, \quad D_1 = -1,526\,491\,898\,3 \cdot 10^{-3};$$

2) $a = 0,025$ см, $\Delta\Theta = 50$ °C:

$$c_1 = 9,908\,499\,087\,4 \cdot 10^{-1}, \quad c_2 = 1,513\,232\,779\,0 \cdot 10^{-2}, \\ \varphi = 2,329\,902\,616\,5 \cdot 10^{-1}, \quad D_1 = -7,484\,861\,807\,9 \cdot 10^{-4};$$

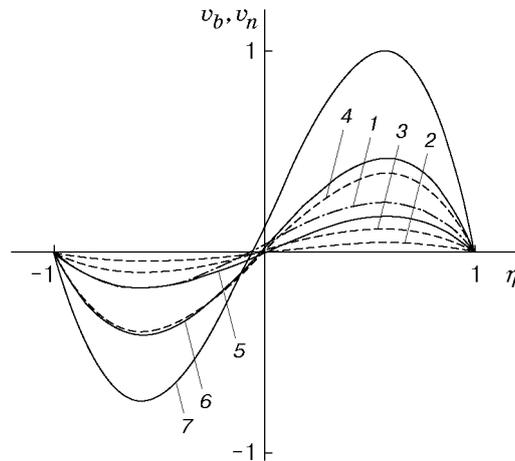


Рис. 6

3) $a = 0,025$ см, $\Delta\Theta = 100$ °C:

$$c_1 = 9,944\,230\,413\,1 \cdot 10^{-1}, \quad c_2 = 3,015\,582\,036\,4 \cdot 10^{-2},$$

$$\varphi = 3,378\,146\,487\,8 \cdot 10^{-1}, \quad D_1 = -1,026\,115\,768\,9 \cdot 10^{-4};$$

4) $a = 0,05$ см, $\Delta\Theta = 20$ °C:

$$c_1 = 9,879\,365\,158\,5 \cdot 10^{-1}, \quad c_2 = 3,031\,698\,302\,8 \cdot 10^{-3},$$

$$\varphi = 1,471\,498\,303\,7 \cdot 10^{-1}, \quad D_1 = -5,324\,952\,265\,8 \cdot 10^{-3};$$

5) $a = 0,05$ см, $\Delta\Theta = 50$ °C:

$$c_1 = 9,889\,643\,688\,1 \cdot 10^{-1}, \quad c_2 = 7,571\,342\,851\,6 \cdot 10^{-3},$$

$$\varphi = 1,801\,112\,797\,0 \cdot 10^{-1}, \quad D_1 = -5,964\,436\,907\,9 \cdot 10^{-3};$$

6) $a = 0,05$ см, $\Delta\Theta = 100$ °C:

$$c_1 = 9,906\,723\,539\,8 \cdot 10^{-1}, \quad c_2 = 1,511\,649\,357\,3 \cdot 10^{-2},$$

$$\varphi = 2,341\,831\,664\,3 \cdot 10^{-1}, \quad D_1 = -3,164\,228\,737\,0 \cdot 10^{-3}.$$

Автор выражает благодарность В. К. Андрееву за помощь и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пухначев В. В. Модель конвективного течения при пониженной гравитации // Моделирование в механике. 1992. Т. 6, № 4. С. 47–56.
2. Пухначев В. В. Микроконвекция в вертикальном слое // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1994. № 5. С. 76–84.
3. Пухначев В. В. Стационарная задача микроконвекции // Динамика сплошной среды / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1996. Вып. 111. С. 109–116.

Поступила в редакцию 27/VI 2000 г.,
в окончательном варианте — 20/XI 2000 г.