

ПРОНИКАНИЕ СТРУИ В КАНАЛ

Ф. С. Владимирова
(Томск)

Методом С. А. Чаплыгина [1], обобщенным С. В. Фальковичем [2] на случай нескольких характерных скоростей, решается плоская задача о проникании дозвуковой струи сжимаемой жидкости, вытекающей под углом наклона из щели, в поток той же жидкости, ограниченный параллельными стенками. Предельным переходом получено решение задачи для случая несжимаемой жидкости. При помощи таблиц [3] произведен расчет коэффициента сжатия слившегося потока для газа и несжимаемой жидкости.

§ 1. Пусть вдоль канала с параллельными стенками MON и $ABCE$ (фиг. 1) шириной H слева направо движется плоский, установившийся, потенциальный адиабатический поток газа плотностью ρ_2 с дозвуковой скоростью v_2 слева на бесконечности, который будем называть основным потоком. Из плоской щели шириной h с прямолинейными параллельными стенками GB и FC , наклоненными под углом λ к стенке канала $ABCE$, вытекает струя того же газа, который далеко в щели имеет плотность ρ_1 и дозвуковую скорость v_1 . После столкновения этих потоков предполагается, что струя газа отрывается от стенки канала в точке C и проникает в основной поток, при этом образуется поверхность разрыва CD , которая отделяет слившийся поток от пространства, заполненного неподвижным газом. Ограничимся случаем, когда граница между передней кромкой струи BK и основным потоком будет не линией разрыва, а линией тока, общей для течений с непрерывным изменением скорости вдоль границы.

Пусть ρ_3, v_3 — соответственно плотность и скорость газа на поверхности струи CD , δ — ширина слившегося потока на бесконечности справа. Начало координат выберем на стенке канала MON , по которой направим ось x в направлении течения, ось y проведем через точку B . Координаты точки C обозначим через b и $H + d$, причем $d \geq 0$ (на фиг. 1 случай $d > 0$). Тогда ширина щели

$$h = b \sin \lambda + d \cos \lambda$$

Примем, что на линии тока MON функция тока $\psi = 0$. Тогда, если расходы газа в сечениях AM и FG обозначить через Q_2 и Q_1 соответственно, а расход газа в сечении DN — через Q

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (1.1)$$

то вдоль линий тока AB и GBK , которые сливаются в точке B , функция тока $\psi = Q_2$ и $\psi = Q$ — на линии тока FCD

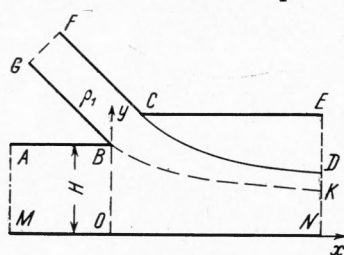
В плоскости $\tau\theta$ годографа скорости (с полярными координатами $\tau = v^2/v_{\max}^2$, v — скорость, v_{\max} — максимальная скорость, а θ — угол наклона скорости к оси x) рассматриваемая область течения представится круговым сектором радиуса τ_3 и углом раствора λ (фиг. 2).

Граничные условия имеют вид

$$\psi = Q_2 \quad \text{при } \theta = -\lambda, \quad 0 < \tau < \tau_1, \quad \psi = Q_2 \quad \text{при } \theta = 0, \quad 0 < \tau < \tau_2 \quad (1.2)$$

$$\psi = Q \quad \text{при } \theta = -\lambda, \quad \tau_1 < \tau < \tau_3, \quad \psi = 0 \quad \text{при } \theta = 0, \quad \tau_2 < \tau < \tau_3$$

$$\psi = Q \quad \text{при } -\lambda < \theta < 0, \quad \tau = \tau_3 \quad (1.3)$$



Фиг. 1

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к нахождению решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Чаплыгина

$$4\tau^2(1-\tau)\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2} + 4\tau[1+(\beta-1)\tau]\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + [1-(2\beta+1)\tau]\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = 0 \quad (1.4)$$

$$\beta = 1/(\kappa-1), \quad \kappa = c_p/c_v$$

в соответствующих областях кругового сектора.

Следя С. В. Фальковичу [2], решение задачи будем искать в виде

$$\psi_1 = Q_2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_{\omega}(\tau) \sin 2n\theta \quad \left(\omega = \frac{n\pi}{2\lambda}\right) \quad (1.5)$$

$$\psi_2 = Q_2 - Q_1 \frac{\theta}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n z_{\omega}(\tau) + B_n \xi_{\omega}(\tau)] \sin 2n\theta \quad (1.6)$$

$$\psi_3 = -Q \frac{\theta}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n z_{\omega}(\tau) + D_n \xi_{\omega}(\tau)] \sin 2n\theta \quad (1.7)$$

Здесь индекс при ψ соответствует номеру области кругового сектора, в которой ищется данное решение; $z_{\omega}(\tau)$ — интеграл уравнения

$$\tau^2(1-\tau)z_{\omega}'' + \tau[1+(\beta-1)\tau]z_{\omega}' - \omega^2[1-(2\beta+1)\tau]z_{\omega} = 0 \quad (1.8)$$

ограниченный при $\tau = 0$; $\xi_{\omega}(\tau)$ — функция Черри (4) — второй линейно независимый интеграл уравнения (1.8), рассмотренный С. В. Фальковичем [2]. Существенно, что для вронскиана этих интегралов имеем

$$W(\tau) = \begin{vmatrix} z_{\omega}'(\tau) & \xi_{\omega}'(\tau) \\ z_{\omega}(\tau) & \xi_{\omega}(\tau) \end{vmatrix} = \frac{\omega}{\tau}(1-\tau)^{\beta} \quad (1.9)$$

Коэффициенты a_n, A_n, B_n, C_n, D_n подлежат определению.

Функция тока, определенная равенствами (1.5) — (1.7), удовлетворяет граничным условиям (1.2). Потребуем теперь, чтобы удовлетворялось граничное условие (1.3), а также, чтобы ψ_2 была аналитическим продолжением ψ_1 из области (1) в область (2), а ψ_3 — аналитическим продолжением ψ_2 из области (2) в область (3), т. е. потребуем, чтобы при $-\lambda < \theta < 0$ выполнялись равенства

$$\psi_3(\tau_3, \theta) = Q, \quad \psi_1(\tau_1, \theta) = \psi_2(\tau_1, \theta), \quad \frac{\partial\psi_1(\tau_1, \theta)}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi_2(\tau_1, \theta)}{\partial\tau}$$

$$\psi_2(\tau_2, \theta) = \psi_3(\tau_2, \theta), \quad \frac{\partial\psi_2(\tau_2, \theta)}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi_3(\tau_2, \theta)}{\partial\tau} \quad (1.10)$$

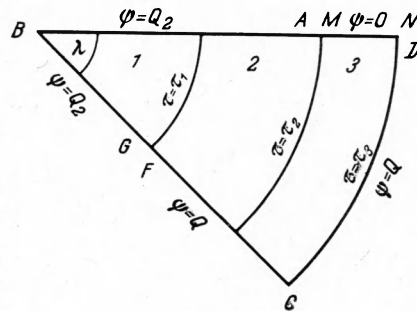
Подставляя ψ_1, ψ_2, ψ_3 , согласно (1.5) — (1.7), в (1.10) и приравнявая коэффициенты при $\sin 2n\theta$, получим систему уравнений для определения коэффициентов

$$C_n z_{\omega}(\tau_3) + D_n \xi_{\omega}(\tau_3) = -2Q/n\pi$$

$$(C_n - A_n) z_{\omega}(\tau_2) + (D_n - B_n) \xi_{\omega}(\tau_2) = -2Q_2/n\pi$$

$$(A_n - a_n) z_{\omega}(\tau_1) + B_n \xi_{\omega}(\tau_1) = -(-1)^n 2Q_1/n\pi \quad (1.11)$$

$$(A_n - a_n) z_{\omega}'(\tau_1) + B_n \xi_{\omega}'(\tau_1) = 0, \quad (C_n - A_n) z_{\omega}'(\tau_2) + (D_n - B_n) \xi_{\omega}'(\tau_2) = 0$$



Фиг. 2

Разрешая систему уравнений (1.11) и используя зависимость (1.9), найдем коэффициенты a_n, A_n, B_n, C_n, D_n . Тем самым и определится функция тока ψ . В дальнейшем потребуется только функция ψ в области $\tau_2 < \tau < \tau_3$, т. е. ψ_3 , которую будем обозначать просто через ψ . Подставляя коэффициенты C_n и D_n в (1.7), найдем

$$\psi = \frac{Q}{\lambda} \left[-\theta + \sum_{n=1}^{\infty} f_{\omega}(\tau) \frac{\sin 2\omega\theta}{\omega} \right] \quad (1.12)$$

$$f_{\omega}(\tau) = -\frac{z_{\omega}(\tau)}{z_{\omega}(\tau_3)} + \left[\frac{\sigma_2 \tau_2}{\omega (1-\tau_2)^{\beta}} \frac{z_{\omega}'(\tau_2)}{z_{\omega}(\tau_3)} + (-1)^n \frac{\sigma_1 \tau_1}{\omega (1-\tau_1)^{\beta}} \frac{z_{\omega}'(\tau_1)}{z_{\omega}(\tau_3)} \right] T_{\omega}(\tau, \tau_3)$$

$$T_{\omega}(\tau, \tau_3) = z_{\omega}(\tau) \zeta_{\omega}(\tau_3) - \zeta_{\omega}(\tau) z_{\omega}(\tau_3), \quad \sigma_1 = Q_1/Q, \quad \sigma_2 = Q_2/Q \quad (1.13)$$

Для дальнейшего заметим, что

$$T_{\omega}'(\tau_i, \tau_3) = [T_{\omega}'(\tau, \tau_3)]_{\tau=\tau_i}, \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.14)$$

$$T_{\omega}'(\tau_i, \tau_i) = w(\tau_i), \quad T_{\omega}(\tau_i, \tau_i) = 0, \quad f_{\omega}(\tau_3) = -1$$

$$f_{\omega}'(\tau_3) = -\frac{z_{\omega}'(\tau_3)}{z_{\omega}(\tau_3)} + \sigma_2 \frac{\tau_2}{\tau_3} \frac{(1-\tau_3)^{\beta}}{(1-\tau_2)^{\beta}} \frac{z_{\omega}'(\tau_2)}{z_{\omega}(\tau_3)} + (-1)^n \sigma_1 \frac{\tau_1}{\tau_3} \frac{(1-\tau_3)^{\beta}}{(1-\tau_1)^{\beta}} \frac{z_{\omega}'(\tau_1)}{z_{\omega}(\tau_3)}$$

§ 2. Определим коэффициент сжатия слившегося потока. Вдоль линии тока имеет место общая формула

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = 2\tau \frac{(1-\tau)^{-\beta}}{v} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \sin \theta \quad (2.1)$$

Внося в (2.1) функцию тока ψ из (1.12), полагая $\tau = \tau_3$, интегрируя в пределах от $-\lambda$ до θ и учитывая, что $y = H + d$ при $\theta = -\lambda$, получим ординату y вдоль струи CD

$$y = \frac{Q}{\lambda} \frac{\tau_3 (1-\tau_3)^{-\beta}}{v_3} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{\omega}'(\tau_3)}{\omega} \left[\frac{\sin(2\omega-1)\theta}{2\omega-1} - \frac{\sin(2\omega+1)\theta}{2\omega+1} \right] - \right.$$

$$\left. - 4 \sin \lambda \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{f_{\omega}'(\tau_3)}{4\omega^2-1} \right\} + H + d \quad (2.2)$$

Если принять во внимание расход $Q = \delta v_3 (1-\tau_3)^{\beta}$ и условие, что на бесконечности $\theta = 0, y = \delta$, то легко (2.2) преобразовать к виду

$$\delta = (H + d) \left[1 + \frac{4\tau_3}{\lambda} \sin \lambda \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{f_{\omega}'(\tau_3)}{4\omega^2-1} \right]^{-1} \quad (2.3)$$

Под коэффициентом сжатия слившегося потока k будем понимать отношение наименьшей ширины δ этого потока к ширине $h + H$ щели и канала. Из (2.3) непосредственно имеем

$$\frac{1}{k} = \frac{h+H}{H+d} \left[1 + \frac{4\tau_3}{\lambda} \sin \lambda \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{f_{\omega}'(\tau_3)}{4\omega^2-1} \right] \quad \left(k = \frac{\delta}{h+H} \right) \quad (2.4)$$

К формулам (2.3) и (2.4) необходимо добавить уравнение неразрывности (1.1), которое можно записать в виде

$$Q = h v_1 (1-\tau_1)^{\beta} + H v_2 (1-\tau_2)^{\beta} = \delta v_3 (1-\tau_3)^{\beta} \quad (2.5)$$

Соотношения (2.3), (2.4), (2.5) определяют скорость потока v_3 , его ширину δ , а также коэффициент сжатия k в функции v_1, v_2, h, H .

В частном случае $\lambda = \frac{1}{2}\pi, d = 0$ и $\omega = n$ для коэффициента сжатия потока с учетом (1.14) будем иметь

$$\frac{1}{k} = \frac{h+H}{H} \left\{ 1 - \frac{8\tau_3}{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} \frac{z_n'(\tau_3)}{z_n(\tau_3)} - \right. \right. \quad (2.6)$$

Таблица 1

τ_3	τ_2	τ_1	h/H	k	τ_3	τ_2	τ_1	h/H	k	
0.04	0.02	0.02	0.0535	0.7274	0.12	0.08	0.02	0.0223	0.8600	
						0.08	0.04	0.0146	0.8655	
0.06	0.04	0.02	0.1447	0.6119		0.08	0.06	0.0111	0.8675	
	0.04	0.04	0.0240	0.8355		0.08	0.08	0.0089	0.8686	
0.08	0.02	0.02	0.0140	0.8409		0.14	0.02	0.02	0.4664	0.4535
							0.04	0.02	0.2366	0.5459
	0.04	0.02	0.1642	0.7214			0.04	0.04	0.1448	0.6233
	0.04	0.04	0.1022	0.7502			0.08	0.02	0.0400	0.8163
	0.06	0.02	0.0128	0.8877			0.08	0.04	0.0265	0.8255
	0.06	0.04	0.0079	0.8910			0.08	0.06	0.0204	0.8290
0.10	0.02	0.02	0.0056	0.8920	0.16	0.08	0.08	0.0167	0.8308	
						0.10	0.02	0.0132	0.8941	
	0.04	0.02	0.3208	0.5040		0.10	0.04	0.0087	0.8922	
	0.04	0.02	0.1217	0.6722		0.10	0.06	0.0067	0.8939	
	0.04	0.04	0.0782	0.6926		0.10	0.08	0.0055	0.8950	
	0.06	0.02	0.0391	0.8115		0.10	0.10	0.0047	0.8999	
0.12	0.06	0.04	0.0247	0.8204	1/6	0.06	0.06	0.8204	0.8204	
						0.06	0.06	0.0186	0.8235	
	0.02	0.02	0.3975	0.4744		0.02	0.02	0.5470	0.4347	
	0.04	0.02	0.1718	0.6257		0.04	0.02	0.2761	0.5625	
	0.04	0.04	0.1126	0.6518		0.04	0.04	0.1834	0.5977	
	0.06	0.02	0.0689	0.7556		0.06	0.02	0.1357	0.6762	
0.12	0.06	0.04	0.0451	0.7697	1/6	0.06	0.04	0.0908	0.6997	
						0.06	0.06	0.0708	0.7090	
	0.08	0.04	0.0626	0.7719		0.06	0.06	0.0708	0.7090	
	0.08	0.04	0.0419	0.7851		0.08	0.02	0.0626	0.7719	
	0.08	0.06	0.0326	0.7903		0.08	0.04	0.0419	0.7851	
	0.08	0.08	0.0271	0.7930		0.08	0.06	0.0326	0.7903	

Таблица 2

τ_2/τ_3	τ_1/τ_3	h/H	k	τ_2/τ_3	τ_1/τ_3	h/H	k
0.50	0.50	0.0626	0.7071	0.5000	0.3333	0.0854	0.6968
				0.6667	0.1667	0.0522	0.7963
0.3333	0.3333	0.1500	0.5773	0.6667	0.3333	0.0335	0.8088
0.6667	0.3333	0.0324	0.8088	0.6667	0.5000	0.0246	0.8140
0.6667	0.6667	0.0184	0.8166	0.1428	0.1428	0.6368	0.3779
0.2500	0.2500	0.2973	0.5000	0.2857	0.1428	0.3628	0.4929
				0.2857	0.2857	0.2361	0.5346
0.5000	0.2500	0.1035	0.6877	0.5714	0.1428	0.1013	0.7211
0.7500	0.2500	0.0216	0.8584	0.5714	0.2857	0.0659	0.7321
0.7500	0.5000	0.0130	0.8641	0.5714	0.4286	0.0494	0.7510
0.7500	0.7500	0.0086	0.8662	0.5714	0.5714	0.0338	0.7558
0.2000	0.2000	0.4156	0.4472	0.7143	0.1428	0.0406	0.8270
				0.7143	0.2857	0.0264	0.8373
0.4000	0.2000	0.1890	0.6018	0.7143	0.4286	0.0198	0.8416
0.4000	0.4000	0.1191	0.6310	0.7143	0.5714	0.0156	0.8439
0.6000	0.2000	0.0706	0.7531	0.7143	0.7143	0.0123	0.8453
0.6000	0.4000	0.0445	0.7686	0.12	0.12	0.7727	0.3464
0.6000	0.6000	0.0315	0.7747				
0.8000	0.2000	0.0155	0.8876	0.24	0.12	0.4796	0.4534
0.8000	0.4000	0.0097	0.8919	0.24	0.24	0.3173	0.4899
0.8000	0.6000	0.0069	0.8936	0.36	0.12	0.2976	0.5418
0.8000	0.8000	0.0049	0.8945	0.36	0.24	0.1970	0.5818
0.1667	0.1667	0.5285	0.4083	0.36	0.36	0.1498	0.6000
				0.48	0.12	0.1781	0.6396
0.3333	0.1667	0.2745	0.5408	0.48	0.24	0.1179	0.6707
0.3333	0.3333	0.1765	0.5773	0.48	0.36	0.0896	0.6848
0.5000	0.1667	0.1328	0.6720	0.48	0.48	0.0720	0.6920

$$\left. - \sigma_2 \frac{\tau_2}{\tau_3} \left(\frac{1-\tau_3}{1-\tau_2} \right)^\beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} \frac{z_n'(\tau_2)}{z_n(\tau_3)} - \sigma_1 \frac{\tau_1}{\tau_3} \left(\frac{1-\tau_3}{1-\tau_1} \right)^\beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \frac{z_n'(\tau_1)}{z_n(\tau_2)} \right\}$$

Если струя будет вытекать из бесконечно широкого сосуда через отверстие, то $\tau_1 = 0$, и при $\tau_2 = 0$, $H \rightarrow \infty$, и формула (2.6) переходит в известную формулу Чаплыгина [1]

$$\frac{1}{k_\infty} = 1 - \frac{8\tau_3}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} \frac{z_n'(\tau_3)}{z_n(\tau_3)} \quad (2.7)$$

Подробные вычисления по этой формуле произведены в работе [3]. Учитывая (2.7) и (1.13), которые можно привести к виду

$$\sigma_1 = \frac{h}{\delta} \left(\frac{\tau_1}{\tau_3} \right)^{1/2} \left(\frac{1-\tau_1}{1-\tau_3} \right)^\beta, \quad \sigma_2 = \frac{H}{\delta} \left(\frac{\tau_2}{\tau_3} \right)^{1/2} \left(\frac{1-\tau_2}{1-\tau_3} \right)^\beta$$

преобразуем (2.5) и (2.6) к формулам, удобным для вычислений

$$k = \frac{v}{1+v} \left(\frac{\tau_1}{\tau_3} \right)^{1/2} \left(\frac{1-\tau_1}{1-\tau_3} \right)^\beta + \frac{1}{1+v} \left(\frac{\tau_2}{\tau_3} \right)^{1/2} \left(\frac{1-\tau_2}{1-\tau_3} \right)^\beta \left(v = \frac{h}{H} = \frac{1-\Omega_2(\tau_2)}{\Omega_1(\tau_1)} \right)$$

$$\Omega_2(\tau_2) = \frac{1}{k_\infty} \left(\frac{\tau_2}{\tau_3} \right)^{1/2} \left(\frac{1-\tau_2}{1-\tau_3} \right)^\beta + \frac{8}{\pi} \left(\frac{\tau_2^3}{\tau_3} \right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} \frac{z_n'(\tau_2)}{z_n(\tau_3)}$$

$$\Omega_1(\tau_1) = \frac{1}{k_\infty} \left(\frac{\tau_1}{\tau_3} \right)^{1/2} \left(\frac{1-\tau_1}{1-\tau_3} \right)^\beta + \frac{8}{\pi} \left(\frac{\tau_1^3}{\tau_3} \right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \frac{z_n'(\tau_1)}{z_n(\tau_3)} \quad (2.8)$$

В частности, для несжимаемой жидкости

$$\lim_{\tau_i, j \rightarrow 0} \frac{\tau_i z_n'(\tau_i)}{z_n(\tau_j)} = n \left(\frac{\tau_i}{\tau_j} \right)^n \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

и ряды в (2.8) легко суммируются. В результате суммирования рядов из (2.8) нетрудно получить

$$k = \frac{v}{1+v} \left(\frac{\tau_1}{\tau_3} \right)^{1/2} + \frac{1}{1+v} \left(\frac{\tau_2}{\tau_3} \right)^{1/2} \quad (2.9)$$

$$\frac{h}{H} = \left\{ 1 - \left[\left(\frac{\tau_2}{\tau_3} \right)^{1/2} + \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{\tau_2}{\tau_3} \right) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\tau_2}{\tau_3} \right)^{1/2} \right] \right\} \times \\ \times \left[\left(\frac{\tau_1}{\tau_3} \right)^{1/2} + \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{\tau_1}{\tau_3} \right) \operatorname{Ar} \operatorname{th} \left(\frac{\tau_1}{\tau_3} \right)^{1/2} \right]^{-1}$$

Расчеты по формулам (2.8), (2.9) проводились с точностью до четырех десятичных знаков. Результаты вычислений сведены соответственно в табл. 1 и 2. Причем для несжимаемой жидкости отношения τ_2/τ_3 , τ_1/τ_3 вычислялись для тех же значений τ_1 , τ_2 , τ_3 , что и для сжимаемой жидкости. При расчетах значения функции $z_n(\tau)$ и $z_n'(\tau)$ брались из таблиц [3], и использовались результаты расчетов из работы [5].

Поступила 6 IX 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. О газовых струях. Гостехиздат, 1949.
2. Фалькович С. В. К теории газовых струй. ПММ, 1957, т. 21, вып. 4.
3. Ferguson D. F., Lighthill M. G. The hodograph transformation in trans-sonic flow. IV. Tables. Proc. Roy. Soc. A, 1947, vol. 192, No. 1028.
4. Cheng T. M. Asymptotic Expansions for the Hypergeometric Functions Occuring in Gas — Flow Theory. Proc. Roy. Soc. London A, 1950, vol. 202, No. 1071.
5. Асланов С. К., Легкова В. А. Истечение газовой струи из сосуда конечной ширины. ПММ, 1959, т. 23, вып. 1.