УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ СРЕДЫ НА ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН

В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, 690041 Владивосток
E-mails: ragozina@vlc.ru, ivanova@iacp.dvo.ru

С использованием метода сращиваемых асимптотических разложений получены решения краевых задач ударного деформирования нелинейно-упругого слабонеоднородного полупространства. Показано, что нелинейность модели и различные свойства неоднородности приводят к новым эволюционным уравнениям в прифронтовых областях продольных и поперечных ударных волн, переход в которые обусловлен преобразованиями всех независимых координат задачи.

Ключевые слова: нелинейная упругая среда, неоднородность, ударные волны, объемное и сдвиговое деформирование, эволюционное уравнение.

Введение. Аналитические решения задач ударного деформирования в твердом теле имеют большое значение как для теории, так и для практики, поскольку эти задачи позволяют изучить общие закономерности движения и изменения волновых фронтов и формирования напряженно-деформационных полей за каждым волновым фронтом. Вследствие нелинейности задач ударного деформирования, за исключением краевых задач автомодельного типа, построить точные аналитические решения не представляется возможным, поэтому возрастает роль приближенных теоретических методов, таких как методы малого параметра [1, 2]. Среди этих методов одним из наиболее эффективных является метод сращиваемых асимптотических разложений [3]. В работах [3–6] показано, что плоские продольные и поперечные (в несжимаемых средах) ударные волны в основном можно описать на основе эволюционных волновых уравнений. Данные уравнения определяют поведение одного из сращиваемых решений и справедливы в областях пространственно-временных координат, где нелинейные эффекты являются доминирующими. По аналогии с газовой динамикой для плоских продольных ударных волн эволюционным является уравнение Коула — Хопфа [7]. В случае поперечных ударных волн это уравнение справедливо только для функции квадрата импульса [6, 8, 9]. В [5, 10] решаются задачи ударного деформирования с учетом ненулевой кривизны волнового фронта и изменений эволюционного уравнения, к которым она приводит. Многообразие реальных свойств твердых тел определяет необходимость модельного учета таких эффектов, как вязкость, внутренняя структура, анизотропия и неоднородность среды [11, 12]. Неоднородность свойств среды в большей степени проявляется в твердых телах, имеющих большую протяженность хотя бы в одном направлении, поэтому для полупространств, как правило, решаются задачи о плоских ударных волнах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 11-01-00360-а, 11-01-98514-р_восток_а, 12-01-90004-Бел_а).

В настоящей работе выполнен анализ нескольких возможных вариантов учета свойств неоднородности изотропного упругого материала и общего нелинейного характера модельных соотношений, выведен ряд новых эволюционных уравнений и обсуждаются математические особенности их решений и методики получения.

1. Общие модельные соотношения и постановка краевых задач. Нелинейно-упругая изотропная среда в представлении Эйлера в декартовой пространственной системе координат x_1, x_2, x_3 определяется системой уравнений

$$\begin{gathered}
v_i = \dot{u}_i + u_{i,j}v_j, \quad \rho = \rho_0 \det(\delta_{ij} - u_{i,j}), \quad \alpha_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j})/2, \\
\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}}(\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \qquad \sigma_{ij,j} = \rho(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j), \\
W(I_1, I_2, I_3) = \lambda I_1^2/2 + \mu I_2 + lI_1I_2 + mI_1^3 + nI_3 + \ldots, \\
I_1 = \alpha_{ii}, \quad I_2 = \alpha_{ij}\alpha_{ji}, \quad I_3 = \alpha_{ij}\alpha_{jk}\alpha_{ki}, \quad \dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j},
\end{gathered} \tag{1}$$

где ρ_0, ρ — плотность среды свободного и текущего состояний соответственно; u_i, v_i — компоненты перемещений и скоростей; α_{ij}, σ_{ij} — компоненты тензоров деформаций Альманси и напряжений Эйлера — Коши соответственно; W — функция упругого потенциала, заданная рядом Тейлора в окрестности свободного состояния для случая адиабатического приближения; λ, μ, l, m, n — упругие модули среды (λ, μ — параметры Ламе); по повторяющимся индексам проводится суммирование; многоточием обозначены слагаемые с более высокой степенью малости. В случае если необходимо рассмотреть только поперечные волновые процессы без учета влияния на них предварительного объемного деформирования, в качестве модели выбираем несжимаемую нелинейно-упругую среду, причем соответствующие уравнения системы (1) заменим на уравнения

$$\begin{gathered}
\rho = \rho_0, \qquad \sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}}(\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \\
W = (a - \mu)I_1 + aI_2 + bI_1^2 - \varkappa I_1I_2 - \theta I_1^3 + cI_1^4 + dI_2^2 + kI_1^2I_2 + \ldots,
\end{gathered} \tag{2}$$

где P — функция добавочного гидростатического давления; μ, a, b, $\varkappa$, θ, c, d, k — упругие модули среды. Модельные соотношения (1), (2) записаны для адиабатического приближения. В рассматриваемых далее одномерных задачах среда полагается слабонеоднородной на исследуемых расстояниях распределения волн. Таким образом, имеем

$$\begin{gathered}
\lambda = \lambda_0 + \varepsilon^k\tilde{\lambda}_1 s, \quad \mu = \mu_0 + \varepsilon^k\tilde{\mu}_1 s, \quad \rho_0 = \tilde{\rho}_0 + \varepsilon^k\tilde{\rho}_1 s, \quad l = l_0 + \varepsilon^k\tilde{l}_1 s, \\
m = m_0 + \varepsilon^k\tilde{m}_1 s, \quad n = n_0 + \varepsilon^k\tilde{n}_1 s, \quad s = \frac{x_1}{C_{10}T}, \quad C_{10} = \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\tilde{\rho}_0}},
\end{gathered} \tag{3}$$

причем λ_0, $\tilde{\lambda}_1$, μ_0, $\tilde{\mu}_1$, $\tilde{\rho}_0$, $\tilde{\rho}_1$, l_0, $\tilde{l}_1$, m_0, $\tilde{m}_1$, n_0, $\tilde{n}_1$ — константы; T — характерное время; $C_{10}T$ — характерное расстояние; $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр, связь которого с константами краевых задач устанавливается далее; $k > 0$. Для несжимаемой среды можно задать формулы, аналогичные (3), с заменой C_{10} на величину $C_{20} = \sqrt{\mu_0\tilde{\rho}_0^{-1}}$.

Рассмотрим решение двух основных краевых задач. В первой из них в момент $t = 0$ на границе $x_1 = 0$ не деформированного предварительно полупространства $x_1 \geqslant 0$, задаваемого системой (1), (3), происходит удар, результатом которого являются перемещения границы

$$u_1\big|_{x_1=\tilde f_1(t),\ t\geqslant 0}=\tilde f_1(t), \qquad \tilde f_1'(0)>0, \\ u_2\big|_{x_1=\tilde f_1(t)}=u_3\big|_{x_1=\tilde f_1(t)}=0, \tag{4}$$

где $\tilde f_1(t)$ — известная функция. Также вследствие этого удара происходят перемещения в среде $u_1=u_1(x_1,t)$, $u_2=u_3=0$, причем передний фронт деформационного процесса представляет собой продольную ударную волну. Для скорости G_1 и интенсивности τ этой волны из динамических [13], геометрических и кинематических [14] условий совместности получаем условия

$$G_1=C_1(x_1)\sqrt{1+\Big(1-\frac{\tilde\alpha}{\lambda+2\mu}\Big)\tau+\ldots}\,, \qquad \tau=[u_{1,1}]\big|_{x_1=\int_0^t G_1(\xi)\,d\xi}, \\ C_1(x_1)=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}}, \qquad \tilde\alpha=-\frac{7}{2}\,(\lambda+2\mu)+3(l+m+n). \tag{5}$$

Также на этой волне должны выполняться краевые условия

$$u_1\big|_{x_1=\int_0^t G_1(\xi)\,d\xi}=0, \qquad \tau\big|_{x_1=\int_0^t G_1(\xi)\,d\xi}=u^-_{1,1}\big|_{x_1=\int_0^t G_1(\xi)\,d\xi}. \tag{6}$$

Из системы (1), (3) для рассматриваемой краевой задачи следует уравнение движения

$$(\lambda+2\mu+2\tilde\alpha u_{1,1})u_{1,11}+((\lambda+2\mu)_{,1}+\tilde\alpha_{,1}u_{1,1})u_{1,1}+\ldots= \\ =\frac{\rho_0}{(1-u_{1,1})^2}\,\{\ddot u_1(1-2u_{1,1})+2\dot u_{1,1}\dot u_1\}+\ldots. \tag{7}$$

Уравнение (7) и условия (4)–(6) полностью определяют решение поставленной краевой задачи.

Для решения второй задачи рассмотрим не деформированное предварительно несжимаемое полупространство $x_1\geqslant 0$ с модельными соотношениями (1)–(3). Под действием ударной сдвигающей нагрузки при $t\geqslant 0$ граничные точки полупространства смещаются по закону

$$u_2\big|_{x_1=0,\ t\geqslant 0}=\tilde g_2(t), \qquad \tilde g_2'(0)>0, \\ u_1\big|_{x_1=0}=u_3\big|_{x_1=0}=0, \tag{8}$$

где $\tilde g_2(t)$ — известная функция. Создаваемое в среде поле перемещений описывается формулами $u_2=u_2(x_1,t)$, $u_1=u_3=0$. В этом случае скорость поперечной ударной волны находим из выражений [15]

$$G_2^2=\frac{1}{\rho_0}\,(\mu+\tilde\beta\gamma^2+\ldots), \quad \tilde\beta=a+b+\varkappa+d, \quad \gamma=[u_{2,1}]\big|_{x_1=\int_0^t G_2(\xi)\,d\xi}, \tag{9}$$

где γ — интенсивность поперечной волны. На смещающейся поверхности перемещения удовлетворяют условиям

$$u_2\big|_{x_1=\int_0^t G_2(\xi)\,d\xi}=0, \qquad \gamma=-u^-_{2,1}\big|_{x_1=\int_0^t G_2(\xi)\,d\xi}. \tag{10}$$

Уравнение движения для функции $u_2(x_1,t)$ имеет вид

$$(\mu+3\tilde\beta u_{2,1}^2)u_{2,11}+(\mu_{,1}+3\tilde\beta_{,1}u_{2,1}^2)u_{2,1}+\ldots=\rho_0\ddot u_2. \tag{11}$$

Второе уравнение движения данной задачи служит для определения дополнительного гидростатического давления $P(x_1,t)$ по найденному полю $u_2(x_1,t)$. Так как основная задача заключается в определении перемещений среды, то решение для $P(x_1,t)$ далее не рассматривается. Система условий и уравнений (8)–(11) задает краевую задачу для поперечной волны. Следует отметить, что в обеих задачах неоднородность среды может определять разные виды эволюционного уравнения и его решения.

2. Метод возмущений для задачи о продольной ударной волне в неоднородной среде. Для определения внешнего разложения в методе сращиваемых асимптотических разложений выберем безразмерные переменные

$$s=\frac{x_1}{C_{10}T},\quad m=\frac{t}{T},\quad w(s,m)=\varepsilon^{-1}\frac{u_1(x_1,t)}{C_{10}T} \tag{12}$$

и будем полагать, что малый параметр задачи в первую очередь связан с интенсивностью краевого воздействия и вычисляется по функции $f_1(t)$. Слабая неоднородность задается с помощью того же малого параметра в степени k, что позволяет избежать двухпараметрических представлений. Рассмотрим поставленную задачу при различных значениях k.

Пусть $k=2$, т. е. неоднородность на порядок меньше малости предполагаемого поля перемещений.

Уравнение (7) в переменных (12) имеет вид

$$\begin{gathered}
w_{,ss}(1+\alpha_0\varepsilon w_{,s}+\alpha_1\varepsilon^2 s+2\alpha_2\varepsilon^3 sw_{,s})+\varepsilon^2 w_{,s}(\alpha_1+(\alpha_2-\alpha+1)\varepsilon w_{,s})+\ldots=\\
=(1+\varepsilon^2\rho_1 s)(w_{,mm}(1-2\varepsilon w_{,s})+2\varepsilon w_{,m}w_{,ms})+\ldots,\\
\alpha_0=-9+6\,\frac{l_0+m_0+n_0}{\lambda_0+2\mu_0},\quad \alpha_1=\frac{\tilde\lambda_1+2\tilde\mu_1}{\lambda_0+2\mu_0},\quad \rho_1=\frac{\tilde\rho_1}{\tilde\rho_0},\\
2\alpha_2=-9\,\frac{\tilde\lambda_1+2\tilde\mu_1}{\lambda_0+2\mu_0}+6\,\frac{\tilde l_1+\tilde m_1+\tilde n_1}{\lambda_0+2\mu_0}.
\end{gathered} \tag{13}$$

Неизвестную функцию $w(s,m)$ представим в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра ε:

$$w(s,m)=w_0(s,m)+\varepsilon w_1(s,m)+\varepsilon^2 w_2(s,m)+\ldots. \tag{14}$$

От краевого условия (4) перейдем к условию

$$w(s,m)\big|_{s=\varepsilon f_1(m)}=f_1(m),\qquad f_1'(0)>0. \tag{15}$$

Подставляя ряд (14) в уравнение (13) и условие (15) и используя метод последовательных линейных приближений, с требуемой точностью вычислим $w(s,m)$:

$$\begin{gathered}
w(s,m)=f_1(\xi)+\varepsilon\Big\{-\frac{\alpha_0}{4}\,(f_1'(\xi))^2 s+f_1'(\xi)f_1(\xi)\Big\}+\\
+\varepsilon^2\Big\{\frac{\alpha_0^2}{8}\,(f_1'(\xi))^2 f_1''(\xi)s^2-\frac{\alpha_0}{6}\Big(\alpha_0+\frac{5}{2}\Big)(f_1'(\xi))^3 s+\frac{f_1^2(\xi)f_1''(\xi)}{2}-\\
-\frac{\alpha_0}{2}\,f_1(\xi)f_1'(\xi)f_1''(\xi)s+\Big(1+\frac{\alpha_0}{4}\Big)(f_1'(\xi))^2 f_1(\xi)-\frac{\alpha_1}{2}\,f_1(\xi)s+\\
+\frac{\alpha_1-\rho_1}{4}\,f_1'(\xi)(\xi+s)s-\frac{\alpha_1-\rho_1}{4}\,(f_1'(\xi)\xi-f_1(\xi))s\Big\}+\ldots,\\
\xi=m-s\geqslant 0.
\end{gathered} \tag{16}$$

Анализ решения (16) показывает, что слабая неоднородность проявляется только начиная с члена ряда (14) $w_2(s,m)$. В рассматриваемом случае неравномерность ряда (16) появляется при $\xi\sim 1$, $s\sim\varepsilon^{-1}$, поэтому дополнительное внутреннее [1] решение необходимо на больших расстояниях. При выводе формулы (16) не учитывались условия (5), (6), которым невозможно удовлетворить в случае внешнего решения, где ударная волна занимает положение $\xi = 0$. Для внутреннего решения используем новые переменные

$$n = \varepsilon s, \qquad p = s - m, \qquad w = w(p, n). \tag{17}$$

Записав в переменных (17) уравнение (13) и представив функцию $w(p, n)$ в виде ряда по степеням ε, на нулевом шаге метода получаем уравнение

$$2w_{0,np} + \alpha_0 w_{0,pp} w_{0,p} + (\alpha_1 - \rho_1) n w_{0,pp} = 0,$$

из которого для функции $v_0 = w_{0,p}$ имеем

$$v_{0,n} + \Big(\frac{\alpha_0}{2}\, v_0 + \frac{\alpha_1 - \rho_1}{2}\, n\Big) v_{0,p} = 0. \tag{18}$$

Уравнение (18) можно назвать эволюционным для рассматриваемой задачи. Действительно, угол наклона его характеристик зависит и от строящегося решения $v_0(p, n)$, и от неоднородности среды. В случае $\alpha_1 = \rho_1 = 0$ уравнение (18) переходит в известное уравнение Коула — Хопфа. Последнее слагаемое уравнения (18) связано с неоднородностью среды следующим образом:

$$\tilde{C}_1(\varepsilon s) = C_{10} \sqrt{\frac{1 + \alpha_1 \varepsilon s}{1 + \rho_1 \varepsilon s}} \approx C_1 \Big(1 + \frac{\alpha_1 - \rho_1}{2}\, \varepsilon s + \ldots\Big),$$

поэтому в данном уравнении учтены искажения характеристик вследствие неоднородности среды. Начальный импульс передается вдоль характеристики, и общее решение (18) принимает вид

$$v_0 = v_0 \Big(p - \frac{\alpha_0}{2}\, v_0 n - \frac{\alpha_1 - \rho_1}{4}\, n^2\Big). \tag{19}$$

Полагая, что на переднем фронте ударной волны переменные p и n зависимы: $p = p(n) = p_0(n) + \varepsilon p_1(n) + \ldots$, из краевых условий (5), (6) в переменных (17) получаем уравнение

$$\frac{dp_0}{dn} = \frac{\alpha_0}{4}\, v_0(p_0(n), n) + \frac{\alpha_1 - \rho_1}{2}\, n, \qquad p_0(0) = 0,$$

из которого следует, что угол наклона характеристик зависит и от краевых условий, и от неоднородности среды.

Приведем один из примеров решения для краевого условия (15), где $f_1(m) = m + Am^2/2$, т. е. $\varepsilon = v/C_1$, $v = \tilde{f}_1'(0)$. Внешнее решение определяется рядом (19) с подстановкой в него функции $f_1(m)$. Для внутреннего решения из общей формулы (19) достаточно выбрать

$$v_0(p, n) = B_1 + B_2 \Big(p - \frac{\alpha_0}{2}\, v_0 n - \theta n^2\Big), \qquad \theta = \frac{\alpha_1 - \rho_1}{2},$$

где B_1, B_2 — неизвестные константы. При этом поле перемещений на нулевом шаге и положение переднего фронта ударной волны задаются формулами

$$w_0(p, n) = \frac{Ap^2}{2\tilde{n}} - \frac{1}{\tilde{n}} \Big(1 + \frac{A\theta}{2}\, n^2\Big) p - \frac{Ap_0^2(n)}{2\tilde{n}} + \frac{1}{\tilde{n}} \Big(1 + \frac{A\theta}{2}\, n^2\Big) p_0(n),$$

$$p_0(n) = \frac{2\theta \tilde{n}^2}{A^2 \alpha_0^2} - \frac{4\theta \tilde{n}}{A^2 \alpha_0^2} - \frac{\tilde{n}^{1/2}}{A} + \frac{2\theta}{A^2 \alpha_0^2} + \frac{1}{A}, \qquad \tilde{n} = 1 + \frac{\alpha_0 A n}{2},$$

в которых на основе сравнения внутреннего и внешнего решений учитывается, что $B_1 = -1$, $B_2 = A$.

Большая общность построения решений частных краевых задач достигается за счет отказа от определения скорости $v_0(p,n)$ явным образом из общего решения (19). В работах [6, 8, 9] показано, что формулу (19) можно считать обыкновенным дифференциальным уравнением с независимой переменной p, параметрической переменной n, искомой функцией $w_0(p,n)$, поскольку $v_0 = w_{0,p}$. Данное дифференциальное уравнение содержит параметры $w_{0,p}$, p, поэтому его решение удобно определять с использованием новой дополнительной параметрической переменной. В [6, 8, 9] этот метод назван параметрическим и подробно рассмотрен для волн в однородных средах, но его можно применить к решаемым в настоящей работе задачам. В качестве примера приведем экспоненциальное граничное условие

$$u_1\big|_{x_1=-(D/\tilde{E})(1-\mathrm{e}^{\tilde{E}t})} = -\frac{D}{\tilde{E}}\,(1-\mathrm{e}^{\tilde{E}t}), \qquad D>0, \quad \tilde{E}<0,$$

в переменных s, m имеющее вид

$$w(s,m)\big|_{s=(\varepsilon/E)(1-\mathrm{e}^{-Em})} = \frac{1}{E}\,(1-\mathrm{e}^{-Em}), \qquad \varepsilon=\frac{D}{C_1}, \quad E=-\tilde{E}T.$$

Рассмотрим метод получения внутреннего решения. Для согласования внутреннего решения с внешним решением и краевыми условиями предположим, что

$$v_0 = -\exp\Big[E\Big(p-\frac{\alpha_0}{2}\,v_0 n-\frac{\theta}{2}\,n^2\Big)\Big]$$

и выполняются условия $v_0=\psi(\delta)=-\mathrm{e}^{\delta}$, $-\infty<\delta\leqslant 0$, т. е. $\delta=E(p+\alpha_0\,\mathrm{e}^{\delta}\,n/2-\theta n^2/2)$, $p=\varphi(\delta,n)=\delta/E-\alpha_0\,\mathrm{e}^{\delta}\,n/2+\theta n^2/2$. В этом случае $dw_0=\psi(\delta)\varphi'(\delta,n)\,d\delta$, и получаем

$$w_0(\delta,n) = -\frac{\mathrm{e}^{\delta}}{E}+\frac{\alpha_0}{4}\,\mathrm{e}^{2\delta}\,n+W_0(n), \qquad p(\delta,n)=\frac{\delta}{E}-\frac{\alpha_0}{2}\,\mathrm{e}^{\delta}\,n+\frac{\theta}{2}\,n^2,$$

где $W_0(n)$ — неизвестная функция. Для ее определения уравнение эйконала запишем в переменных p, n с учетом параметра δ, полагая на ударной волне $n=n(\delta)$, $p=p(\delta)$. Отсюда получаем

$$n(\delta)=\frac{4}{\alpha_0 E}\,\mathrm{e}^{-\delta}(1-\mathrm{e}^{-\delta}), \quad p(\delta)=\frac{\delta}{E}-\frac{2}{E}\,(1-\mathrm{e}^{-\delta})+\frac{8\theta\,\mathrm{e}^{-2\delta}}{\alpha_0^2E^2}\,(1-\mathrm{e}^{-\delta})^2. \tag{20}$$

Из соотношений (20) и краевых условий задачи следует, что $W_0=1/E$. Параметрическое решение, удобное для графического представления получаемых зависимостей, можно продолжить на приближения более высокого порядка.

Рассмотрим поставленную задачу о продольной ударной волне в предположении, что в формулах (3) $k=1$, т. е. неоднородность среды и импульс на границе имеют один порядок малости. При этом внешнее решение может быть задано рядом

$$\begin{aligned} w(s,m) = f_1(\xi)+\varepsilon\Big[f_1(\xi)f_1'(\xi)+\frac{\theta}{2}\,f_1''(\xi)(\xi+s)s\,-&\\ -\Big(\frac{\theta}{2}\,(f_1'(\xi)\xi-f_1(\xi))+\frac{\alpha_1}{2}\,f_1(\xi)+\frac{\alpha_0}{4}\,(f_1'(\xi))^2\Big)s\Big]+\ldots.& \end{aligned} \tag{21}$$

Из решения (21) следует, что неравномерность ряда начинает проявляться на расстояниях $s\sim\varepsilon^{-1/2}$ и связана только с неоднородностью среды. Следует предположить, что в этом случае внутреннее решение лишь отражает нелинейные искажения характеристики p, но не показывает их пересечения. Действительно, для переменных p, $l=\varepsilon^{1/2}s$, $w(p,l)$ на нулевом шаге внутреннего решения имеем

$$w_0 = w_0(z), \qquad z = p - \theta l^2/2,$$

а положение ударной волны задается формулой $z = 0$. Построение следующих приближений и их совместный с решением $w_0(z)$ анализ показывают необходимость нового сжатия масштаба $y = \varepsilon^{1/6} l$ и $w = w(z, y)$. В этом случае дополнительно уточняется формула для полухарактеристики:

$$\zeta = z - \frac{(3\alpha_1 + \rho_1)(\rho_1 - \alpha_1)}{24}\, y^3, \qquad w_0 = w_0(\zeta).$$

Если для полухарактеристики вновь использовать координаты s, m, получаем

$$\zeta = s - m - \frac{\theta}{2}\,\varepsilon s^2 - \frac{(3\alpha_1 + \rho_1)(\rho_1 - \alpha_1)}{24}\,\varepsilon^2 s^3,$$

т. е. для очередного k-го внутреннего перехода сжимаем исходную координату в $k/(k+1)$ раз и одновременно уточняем ряд для полухарактеристики. При $k \to \infty$ рассмотрим предельный переход

$$r = s - m - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varepsilon^k s^{k+1}, \qquad n = \varepsilon s, \quad w = w(r, n), \tag{22}$$

где $A_k = \mathrm{const}$ известны из предыдущих внутренних решений. Определим функцию

$$F(n) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} A_k (k+1) n^k,$$

$$F'(n) = -\sum_{k=1}^{\infty} A_k k (k+1) n^{k-1}.$$

С учетом данной функции уравнение движения в переменных (22) принимает вид

$$(\varepsilon^2 w_{,nn} + 2\varepsilon w_{,rn} F(n) + w_{,rr} F^2(n) + \varepsilon w_{,r} F'(n))\{1 + \alpha_1 n + \alpha_0 \varepsilon (w_{,r} F(n) + \varepsilon w_{,n}) +$$
$$+ 2\alpha_2 n \varepsilon (w_{,r} F(n) + \varepsilon w_{,n})\} + \varepsilon (w_{,r} F(n) + \varepsilon w_{,n})\{\alpha_1 + \varepsilon(\alpha_2 - \alpha_1)(w_{,r} F(n) + \varepsilon w_{,n})\} + \ldots =$$
$$= (1 + \rho_1 n)\{w_{,rr}(1 - 2\varepsilon(w_{,r} F(n) + \varepsilon w_{,n})) + 2\varepsilon w_{,r}(w_{,rr} F(n) + \varepsilon w_{,rn})\} + \ldots .$$

Из этого уравнения следует, что $F(n) = \pm\sqrt{(1 + \rho_1 n)(1 + \alpha_1 n)^{-1}}$. Из разложения в ряд Тейлора $F(\varepsilon s)$ при $n = \varepsilon s$, $\varepsilon \to 0$ получаем формулу для коэффициентов A_k:

$$F(\varepsilon s) = \pm\Big\{1 + \theta \varepsilon s + \frac{(\alpha_1 - \rho_1)(\rho_1 + 3\alpha_1)}{8}\,\varepsilon^2 s^2 + \ldots\Big\},$$

в которой в соответствии с исходным определением координаты p оставляем знак “+”. Соотношения (22) включают ряд, представляющий собой интеграл от $F(n)$, для которого выполняется равенство

$$\int \sqrt{\frac{1 + \rho_1 n}{1 + \alpha_1 n}}\, dn = \frac{1}{\alpha_1}\sqrt{(1 + \rho_1 n)(1 + \alpha_1 n)} - \frac{\rho_1 - \alpha_1}{2\alpha_1}\, H(n) + K,$$

где

$$H(n) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{-\alpha_1 \rho_1}}\operatorname{arctg}\sqrt{-\dfrac{\rho_1}{\alpha_1}\,\dfrac{1 + \alpha_1 n}{1 + \rho_1 n}}, & \alpha_1 \rho_1 < 0, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{\alpha_1 \rho_1}}\ln\big(\sqrt{\alpha_1(1 + \rho_1 n)} + \sqrt{\rho_1(1 + \alpha_1 n)}\,\big), & \alpha_1 \rho_1 > 0, \end{cases}$$

K определяется условием $r \to p$ при $n \to 0$. Представляя функцию $w(r,n)$ в виде ряда по степеням ε, на нулевом шаге метода получаем эволюционное уравнение

$$v_{0,n} + v_{0,r} v_0 \frac{F^2(n)(\alpha_0 + 2\alpha_2 n)}{2(1+\alpha_1 n)} + v_0\Big(\frac{\alpha_1}{2(1+\alpha_1 n)} + \frac{F'(n)}{2F(n)}\Big) = 0, \qquad v_0 = w_{0,r}, \tag{23}$$

которое в случае однородной среды при $F(n) = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ переходит в уравнение Коула — Хопфа. В рассматриваемом случае уравнение отражает искажение начального импульса, обусловленное неоднородностью среды, зависимость угла наклона характеристик от строящегося решения и от неоднородных свойств, что объясняет механизм формирования ударной волны. Общее решение уравнения (23) находим по формуле

$$V_0(r,n) = \Phi\Big(r - \frac{V_0(r,n)}{2}\int\limits_0^n \sqrt[4]{\frac{(1+\rho_1\xi)^3}{(1+\alpha_1\xi)^9}}\,(\alpha_0 + 2\alpha_2\xi)\,d\xi\Big), \qquad V_0(r,n) = v_0(r,n)\sqrt{F(n)(1+\alpha_1 n)}. \tag{24}$$

Для уравнения эйконала, полагая на переднем фронте продольной ударной волны $r = r_0(n) + \varepsilon r_1(n) + \ldots$, в нулевом приближении получаем уравнение

$$\frac{dr_0}{dn} = \frac{F^2(n)}{1+\alpha_1 n}\, v_0(r_0(n), n)\Big(\frac{\alpha_0}{4} + \frac{\alpha_2}{2}\,n\Big), \tag{25}$$

которое показывает, что отношение тангенса угла наклона ударной волны к тангенсу угла наклона подходящей к ней характеристики равно $1/2$. В качестве краевого условия вновь выберем квадратичные по времени перемещения границы. Для внутреннего решения из общей формулы (24) целесообразно выбрать

$$v_0(r,n) = \frac{Ar - 1}{\sqrt{F(n)(1+\alpha_1 n)}\,(1 + AH(n)/2)},$$

$$H(n) = \int\limits_0^n \sqrt[4]{\frac{(1+\rho_1\xi)^3}{(1+\alpha_1\xi)^9}}\,(\alpha_0 + 2\alpha\xi)\,d\xi,$$

при этом из уравнения (25) получаем

$$\frac{dr_0}{r_0 - A^{-1}} = \frac{F^{3/2}(n)}{(1+\alpha_1 n)^{3/2}}\,\Big(\frac{\alpha_0}{4} + \frac{\alpha_2 n}{2}\Big)\,dn \Big/ \Big(\int\limits_0^n \frac{F^{3/2}(\xi)}{(1+\alpha_1\xi)^{3/2}}\Big(\frac{\alpha_0}{2} + \alpha_2\xi\Big)\,d\xi + A^{-1}\Big).$$

Положение ударной волны определяется функцией

$$r_0(n) = \frac{1}{A} - \sqrt{\frac{1}{A} + \int\limits_0^n \frac{F^{3/2}(\xi)}{(1+\alpha_1\xi)^{3/2}}\Big(\frac{\alpha_0}{2} + \alpha_2\xi\Big)\,d\xi}, \qquad \int\limits_0^n \frac{F^{3/2}(\xi)}{(1+\alpha_1\xi)^{3/2}}\,\Big(\frac{\alpha_0}{2} + \alpha_2\xi\Big)\,d\xi + \frac{1}{A} \geqslant 0 \tag{26}$$

в предположении, что подкоренное выражение в (26) больше нуля. Тогда в соответствии с этим уравнением для поля перемещений получаем

$$w_0(r,n) = \frac{-r + Ar^2/2 + r_0(n) - Ar_0^2(n)/2}{\sqrt{F(n)(1+\alpha_1 n)}\,(1 + AH(n)/2)}. \tag{27}$$

Следует отметить, что в решении (26), (27) координата r сложным образом связана с исходными координатами s, m.

Полученное решение свидетельствует о том, что эволюционные свойства уравнений задачи проявляются в координатах, задаваемых цепочкой последовательных внутренних переходов. Однако это имеет место не всегда. В качестве примера приведем соотношения для неоднородной среды вида

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon^2\tilde{\lambda}_1 s^2, \qquad \mu = \mu_0 + \varepsilon^2\tilde{\mu}_1 s^2, \qquad \rho_0 = \tilde{\rho}_0 + \varepsilon^2\tilde{\rho}_1 s^2$$

и т. д. Если в случае среды с такими параметрами неравномерность внешнего ряда оценивать по пространственной координате, то она появляется при $s \sim \varepsilon^{-1}$. Изменяя только ее масштаб и считая $n = \varepsilon s$, $p = s - m$, получаем некорректное уравнение. Если же положить

$$n = \varepsilon s, \qquad r = \int\limits_0^s \sqrt{\frac{1 + \rho_1\varepsilon^2\xi^2}{1 + \alpha_1\varepsilon^2\xi^2}}\, d\xi - m = F_1(s) - m, \quad w = w(r,m),$$

то на нулевом шаге внутреннего решения получаем эволюционное уравнение

$$v_{0,n} + v_{0,r}v_0\,\frac{(F_1')^2(\alpha_0 + 2\alpha_2 n^2)}{2(1+\alpha_1 n^2)} + \frac{v_0}{2}\Big(\frac{F_1''}{F_1'} + \frac{2\alpha_1 n}{1 + \alpha_1 n^2}\Big) = 0, \qquad v_0 = w_{0,r}. \tag{28}$$

Уравнение (28) отличается от уравнения (23) множителями, определяющими вид неоднородности и скорость ее изменения в направлении оси x_1. Зависимость от искомого решения для угла наклона характеристик и вид искажения исходного импульса неоднородной средой сохраняются. Решение (28) легко получить по аналогии с решением, рассмотренным выше.

Из приведенных примеров следует, что неоднородность может по-разному влиять на приближенные решения и механизм определения для них пространственно-временной области, где основную роль играют эволюционные уравнения.

3. Эволюционное уравнение для задачи о поперечной ударной волне в слабонеоднородной несжимаемой среде. Для решения краевой задачи (8)–(11) предположим, что упругие модули и плотность среды имеют слабую неоднородность вида (3), где $k = 2$. Обсудим основные свойства асимптотических решений для данного случая.

Решение внешней задачи в переменных s, m, $w(s,m)$ находится из уравнения движения

$$w_{,ss}(1 + \varepsilon^2\mu_1 s + 3(\beta_0 + \beta_1\varepsilon^2 s)\varepsilon^2 w_{,s}^2) + \varepsilon^2 w_{,s}(\mu_1 + \beta_1\varepsilon^2 w_{,s}^2) + \ldots = (1 + \varepsilon^2\rho_1 s)w_{,mm},$$

$$\rho_1 = \frac{\tilde{\rho}_1}{\tilde{\rho}_0}, \quad \mu_1 = \frac{\tilde{\mu}_1}{\mu_0}, \quad \beta_0 = \frac{\tilde{\beta}_0}{\mu_0}, \quad \beta_1 = \frac{\tilde{\beta}_1}{\mu_0}, \tag{29}$$

$$\tilde{\beta}_0 = a_0 + b_0 + \varkappa_0 + d_0, \quad \tilde{\beta}_1 = \tilde{a}_1 + \tilde{b}_1 + \tilde{\varkappa}_1 + \tilde{d}_1.$$

Функцию $w(s,m)$ достаточно представить в виде асимптотического ряда по четным степеням ε: $w(s,m) = w_0(s,m) + \varepsilon^2 w_2(s,m) + \ldots$. Подставляя этот ряд в уравнение (29) и краевое условие (8), заданное в переменных s, m, $w(s,m)$, получаем внешнее решение задачи

$$w(s,m) = g_2(\xi) + \varepsilon^2\Big\{\frac{\mu_1-\rho_1}{4}\,g_2'(\xi)s^2 - \frac{\mu_1+\rho_1}{4}\,g_2(\xi)s + \frac{\beta_0}{2}\,(g_2'(\xi))^3 s\Big\} + \ldots,$$
$$\xi = m - s, \tag{30}$$

где $g_2(m)$ — безразмерная функция, задающая перемещения нагружаемой границы $s = 0$. Первоначальная неравномерность ряда (30) появляется при $s \sim \varepsilon^{-1}$ и связана не с нелинейностью модельных соотношений, а только с неоднородностью среды. Как и при решении для продольной ударной волны, имеет место последовательность внутренних решений, связанных со сжатием масштаба пространственной координаты для k-го решения в $2k/(k+1)$ раз и последовательным уточнением уравнения полухарактеристики. Для сдвиговой волны в пределе $k \to \infty$ построим внутреннее решение в координатах

$$n = \varepsilon^2 s, \qquad r = s - m - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \varepsilon^{2k} s^{k+1}, \qquad w = w(r,n). \tag{31}$$

Переход к координатам (31) для уравнения движения (29) определяет сумму ряда, получаемого почленным дифференцированием ряда, входящего в (31): $F(n) = \sqrt{(1+\rho_1 n)(1+\mu_1 n)^{-1}}$. При этом для функции нулевого приближения $v_0 = w_{0,r}$ внутреннего решения получаем

$$v_{0,n} + v_{0,r}\,\frac{v_0^2}{2}\,\frac{F^3(n)(3\beta_0 + 3\beta_1 n)}{1+\mu_1 n} + \frac{v_0}{2}\Big(\frac{F'(n)}{F(n)} + \frac{\mu_1}{1+\mu_1 n}\Big) = 0,$$
$$v_0 = w_{0,r}. \tag{32}$$

Уравнение (32) назовем эволюционным для сдвиговой волны в среде со слабой неоднородностью вида (3). Заметим, что при $F(n) = 1$, $\beta_1 = \mu_1 = 0$ уравнение (32) переходит в уравнение сдвиговых волн в однородных средах, свойства которого подробно обсуждались в [6, 8, 9], где показано, что угол наклона характеристик для сдвиговых волн зависит от удельной кинетической энергии, а не от удельного импульса (последнее характерно для продольных волн). В данном случае в качестве мультипликативного фактора также имеет место изменение полухарактеристик (31) в силу неоднородности среды при условии, что неоднородность влияет на искажение исходной функции v_0 вдоль характеристик уравнения (32).

В рассматриваемой задаче общее решение уравнения (32) имеет вид

$$\begin{aligned} V_0(r,n) = \Phi\Big\{ r - \frac{3V_0^2}{2}\Big[&\frac{\beta_1 - \beta_0(\mu_1-\rho_1)}{2\mu_1^2(1+\mu_1 n)^2} - \frac{\beta_0\rho_1 + \beta_1}{\mu_1^2(1+\mu_1 n)} - \\ &- \frac{\beta_1 - \beta_0(\mu_1-\rho_1)}{2\mu_1^2} + \frac{\beta_0\rho_1+\beta_1}{\mu_1^2} + \rho_1\beta_1\Big(\frac{n - 2n(1+\mu_1 n)}{2\mu_1^2(1+\mu_1 n)^2} + \\ &+ \frac{1}{2\mu_1^3(1+\mu_1 n)} - \frac{1}{2\mu_1^3} + \frac{1}{\mu_1^3}\ln(1+\mu_1 n)\Big)\Big]\Big\}, \end{aligned} \tag{33}$$
$$V_0 = v_0(r,n)\sqrt{F(n)}\,\sqrt{1+\mu_1 n}\,,$$

где выражение в фигурных скобках задает характеристику уравнения (32). Для определения в нулевом приближении положения переднего фронта сдвиговой ударной волны имеем

$$\frac{dr_0}{dn} = \frac{v_0^2(r_0(n), n)}{2}\,\frac{F^3(n)}{1+\mu_1 n}\,(\beta_0+\beta_1 n),$$
$$r(n) = r_0(n) + \varepsilon^2 r_2(n) + \ldots. \tag{34}$$

Из уравнения (34) следует, что отношение тангенсов угла наклона ударной волны и характеристик уравнения (32) равно 1/3. На основе решения (33) и уравнения (34) можно построить решения различных краевых задач, которые в настоящей работе не рассматриваются.

Заключение. Проблема поиска обобщенных решений краевых задач ударного деформирования в твердом теле не является полностью исследованной, несмотря на постоянный интерес к ней и большое число публикаций. Как известно, даже сравнительно небольшие изменения нелинейных уравнений математической физики порождают новые важные свойства их решений. Большое значение имеют эволюционные уравнения задач интенсивного деформирования в твердом теле, позволяющие выделить наиболее существенные составляющие динамического процесса и объясняющие механизм данного процесса. Рассмотренные методы и эволюционные уравнения показывают, каким образом развиваются продольные и сдвиговые волны деформаций в слабонеоднородных средах, и вместе с тем указывают на возможный способ определения эволюционных уравнений для задач с несколькими волновыми фронтами либо с учетом факторов вязкости, дисперсии и т. д. В рамках представленного подхода можно предположить, что переход к области эволюционного уравнения потребует изменения всех независимых координат задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ван-Дайк М.** Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
2. **Коул Дж.** Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
3. **Буренин А. А., Россихин Ю. А.** О влиянии вязкости на характер распространения плоской продольной ударной волны // ПМТФ. 1990. № 6. С. 13–17.
4. **Буренин А. А., Рагозина В. Е.** О прифронтовых асимптотиках в нелинейной динамической теории упругости // Проблемы механики сплошных сред и элементов конструкций: Сб. науч. тр. к 60-летию со дня рожд. проф. Г. И. Быковцева. Владивосток: Дальнаука, 1998. С. 225–242.
5. **Иванова Ю. Е., Рагозина В. Е.** Об ударных осесимметрических движениях несжимаемой упругой среды при ударных воздействиях // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 6. С. 144–151.
6. **Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е.** Об эволюционных уравнениях задач ударного деформирования с плоскими поверхностями разрывов // Вычисл. механика сплошных сред. 2009. Т. 2, № 3. С. 82–95.
7. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
8. **Буренин А. А., Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е.** Эволюционное уравнение для волновых процессов формоизменения // Изв. Сам. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 4, ч. 2. С. 14–24.
9. **Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е.** Эволюционное уравнение для одномерных сдвиговых волн разрыва деформаций // Вестн. Сам. гос. ун-та. Естеств.-науч. сер. 2011. № 2. С. 91–104.
10. **Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е.** Математическая модель движения сдвиговых ударных волн ненулевой кривизны на основе их эволюционного уравнения // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 1. С. 77–85.

11. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1973. Т. 1, 2.
12. **Пелиновский Ю. Н.** Нелинейные эволюционные уравнения / Ю. Н. Пелиновский, В. Е. Фридман, Ю. К. Энгельбрехт. Таллин: Валгус, 1984.
13. **Томас Т.** Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964.
14. **Быковцев Г. И.** Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. Владивосток: Дальнаука, 1998.
15. **Куликовский А. Г.** Нелинейные волны в упругих средах / А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова. М.: Моск. лицей, 1998.

Поступила в редакцию 17/X 2012 г.,
в окончательном варианте — 21/III 2013 г.