

Отсутствие регулярности вырождения в краевой задаче «а» связано с тем, что граничные условия (1.2) «одного порядка» относительно  $\varepsilon$ , так как в граничных условиях (1.2) участвуют производные по нормальной координате, вдоль которой происходит быстрое изменение решения. Для того чтобы получить регулярно вырождающуюся краевую задачу, необходимо привести краевые условия (1.2) к каноническому виду, что и было проделано выше. Отмеченная выше «перевязка» граничных условий (нерегулярность вырождения) является типичной для вырожденных краевых задач [6, 7].

Поступила 29 X 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М., Наука, 1977.
2. Немировский Ю. В. Об упругопластическом поведении армированного слоя.— ПМТФ, 1969, № 6.
3. Болотин В. В. Плоская задача теории упругости для деталей из армированных материалов.— В кн.: Расчеты на прочность. Вып. 12. М., Машиностроение, 1966.
4. Эскин Г. И. Краевые задачи для уравнений с постоянными коэффициентами на плоскости.— Матем. сборник, 1962, т. 59 (101).
5. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.— УМН, 1957, т. 12, вып. 5.
6. Brezis H. Singular perturbations of hyperbolic systems.— In: Lecture Notes in Math., 1974, N 384.
7. Вахромеев Ю. М., Корнев В. М. О краевых задачах с малым параметром для обыкновенных дифференциальных уравнений.— Диф. уравнения, 1977, т. 13, № 7.

УДК 539.374

### К ТЕОРИИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГРУНТА С ПОРИСТОЙ СТРУКТУРОЙ

*В. В. Дудукаленко, А. Ю. Смыслов*

(Куйбышев)

Твердая фаза грунта состоит из плотно упакованных связанных частиц, которые образовались в результате роста кристаллов, цементации отложений, сопровождающих длительные процессы фильтрации, диффузии. Степень упаковки твердых частиц связана с историей образования структуры грунта. Разрыхление как следствие микроразрушений и разупаковки при деформировании является результатом механического воздействия. Упругие деформации предполагаем пренебрежимо малыми. Деформирование плотной фазы грунта при нагрузках, действующих сравнительно короткое время, за которое процессы ползучести не успевают значительно проявиться, опишем предельным условием Мизеса — Шлейхера и ассоциированным с ним законом деформирования [1]

$$(0.1) \quad \sqrt{s_{ij}s_{ij}} + \alpha \sigma_{kk}/3 = k;$$

$$(0.2) \quad e_{ij} = \lambda (s_{ij}/\sqrt{s_{kl}s_{kl}} + \alpha \delta_{ij}/3), \quad \lambda \geq 0.$$

Здесь  $s_{ij}$  — девиатор тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ ;  $e_{ij}$  — скорость деформации;  $k$ ,  $\alpha$  — коэффициенты связности и кулоновского трения.

Из соотношений (0.1), (0.2) следует, что объемная деформация всегда положительна. Однако дилатансионная зависимость для грунтов имеет

более сложный вид, поэтому в структуре грунта с плотной фазой (0.1), (0.2) рассмотрим случайное распределение пор. В этом случае объемные макродеформации будут зависеть от преобладания одного из процессов: разрыхления в плотной фазе или уплотнения за счет уменьшения объема пор, имеющих в начальный момент деформирования. Статистику распределения пор определим случайной функцией  $\chi$ , принимающей значение 1 в области пор и 0 — в остальных точках макрообъема  $V$ . Объемная концентрация пор  $c$  задана.

Разнообразие свойств и структур распределения составляющих грунта приводит к необходимости рассмотрения частных теорий. В данном случае сделанных предположений достаточно для ограничений применимости теории и для математической постановки задачи об отыскании связи между макронапряжениями и макродеформациями.

Пусть на поверхности  $S$  макрообъема  $V$  действуют силы  $p_i$ . Воспользуемся теоремой о минимуме скорости диссипации [2] применительно к соотношениям (0.1), (0.2). Из условий минимальности функционала, определенного в области твердой фазы  $V_2$ ,

$$(0.3) \quad \int_{V_2} k \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}} dV - \int_S p_i v_i dS,$$

где  $\varepsilon_{ij}$  — девиатор тензора  $e_{ij}$ , в классе кинематически возможных полей скоростей  $v_i$ , удовлетворяющих в области  $V_2$  соотношению

$$(0.4) \quad e_{kk} = \alpha \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}},$$

следуют соотношения (0.1), (0.2), уравнения равновесия и граничные условия на  $S$  и на поверхностях пор.

В макрообъеме  $V$  рассмотрим статистически однородные поля  $\chi$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $e_{ij}$ . Объем  $V$  выберем достаточно большим, в пределе занимающим все пространство  $x_i$ . Используя гипотезу об эргодичности полей, осреднение будем производить по объему  $V$  и обозначать угловыми скобками

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV.$$

Так как осреднение по ансамблю (математическое ожидание) совпадает с осреднением по объему, можно показать, что средние значения интегралов по поверхности  $S$ , отнесенные к объему  $V$ , при статистически однородном подынтегральном выражении стремятся к нулю при  $V \rightarrow \infty$  как отношение площади к объему  $S/V$ .

Вариационная постановка статистической задачи в данном случае предполагает отыскание статистически однородного поля флуктуаций  $v_i$  при заданных  $\langle e_{ij} \rangle$ , которые при условии (0.4) соответствуют минимальному значению функционала

$$(0.5) \quad D = \frac{1}{V} \int_{V_2} k \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}} dV.$$

В этой формулировке имеет место аналогия с соответствующей задачей теории пластичности [3]. Связь между напряжениями  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  и скоростями макродеформаций  $\langle e_{ij} \rangle$  определяется соотношениями

$$(0.6) \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = \partial D / \partial \langle e_{ij} \rangle,$$

которые тоже являются следствием минимальности функционала (0.3).

Индексами 1, 2 после угловых скобок будем отмечать средние по областям пор  $V_1$  и матрицы  $V_2$ , штрихом — флуктуации относительно сред-

них по объему  $V$ . Имеет смысл рассматривать средние  $\langle e_{ij} \rangle_1$ , так как из формулы Гаусса — Остроградского

$$\langle e_{ij} \rangle_1 = \frac{1}{2V_1} \int_{S_1} (v_i n_j + v_j n_i) dS$$

следует, что значение  $\langle e_{ij} \rangle_1$  однозначно определено скоростью материальных частиц на поверхности пор  $S_1$  ( $n_i$  — нормаль к поверхности  $S_1$ ). В частности, имеют место соотношения

$$(0.7) \quad \langle e_{ij} \rangle_1 = \langle e_{ij} \rangle + \langle \kappa' e'_{ij} \rangle / c, \quad \langle e_{ij} \rangle = c \langle e_{ij} \rangle_1 + (1 - c) \langle e_{ij} \rangle_2.$$

Диссипативная функция  $D$  зависит от объемной концентрации по  $c = \langle \kappa \rangle$ , которая является параметром истории деформирования с начальным значением  $c_0$ . Учитывая изменение объемов  $V_1$  и  $V$  в процессе деформирования, для скорости изменения концентрации  $c = V_1/V$  получим уравнение

$$(0.8) \quad dc/dt = c(\langle e_{kk} \rangle_1 - \langle e_{kk} \rangle).$$

1. Из интегральных неравенств следуют оценки

$$(1.1) \quad \langle V \overline{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}} \rangle_2 \leq V \overline{\langle \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle_2} = V \overline{(\langle \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle - c \langle \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle_1) / (1 - c)} \leq \\ \leq V \overline{(\langle \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle - c \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1) / (1 - c)}.$$

Независимо от неравенств (1.1) сделаем некоторые оценки диссипативной функции макросреды  $D(\langle e_{ij} \rangle)$  при произвольно фиксированных значениях  $\langle e_{ij} \rangle$ . Минимальное значение функционала (0.5) при неизменной концентрации  $c$  зависит от геометрической структуры области, занятой твердой фазой, и изменяется от нуля до некоторого конечного максимального значения. Очевидно, что диссипативная функция макрообъема равна нулю, если твердые частицы не связаны, т. е. находятся во взвешенном состоянии.

Этой структуре при равных концентрациях  $c$  противопоставим некоторую оптимально связанную область распределения твердой фазы, которой соответствует максимальное значение диссипативной функции  $D^*(\langle e_{ij} \rangle)$ .

Будем предполагать, что существует оптимальная структура материала, при которой минимальное значение верхней оценки (1.1) функционала (0.5) совпадает с  $D^*$ . Тогда для предполагаемой структуры имеет место

$$(1.2) \quad D = \min [k \sqrt{1 - c} \sqrt{\langle \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle - c \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1}]$$

при условии (0.4).

Подобные оценки получены в теории упругих композитов, причем оптимальной структуре материала соответствует сферическая форма включений или пор [4, 5]. Заметим, что приближение (1.2) косвенно учитывает связность области твердой фазы, для которой пока не существует количественных представлений, например для разветвленных включений, взаимопроникающих структур.

Минимизацию функционала (1.2) произведем при произвольно заданных статистически однородных полях  $e_{kk}$ . Варьируя по флуктуациям  $v'_i$  с учетом выражения (0.7) для  $\langle e_{ij} \rangle_1$ , получим

$$\frac{1}{2} v'_{i,j} - \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 \kappa'_{i,j} + f'_{i,i} = 0,$$

где  $f'$  — множитель Лагранжа при условии  $v'_{i,i} = e'_{kk}$ .

Полагаем, что  $\kappa'$  и  $e'_{hk}$  — статистически изотропные функции, тогда, следуя работе [3], вычислим

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \langle \kappa' e'_{ij} \rangle &= \frac{2}{5} c (1 - c) \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1, \\ \langle \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij} \rangle &= \frac{2}{5} c (1 - c) \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 + \frac{2}{3} \langle (e'_{hk})^2 \rangle. \end{aligned}$$

Формулы (0.7), (1.3) приводят к соотношению

$$(1.4) \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 = \langle \varepsilon_{ij} \rangle / [1 - (2/5)(1 - c)],$$

и выражение (1.2) принимает вид

$$(1.5) \quad D = \min \left[ k \sqrt{1 - c} \sqrt{a \langle \varepsilon_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \frac{2}{3} \langle (e'_{hk})^2 \rangle} \right];$$

$$(1.6) \quad a = 1 - c / [1 - (2/5)(1 - c)],$$

здесь минимизация проводится по  $e'_{hk}$  при условии (0.4).

В областях  $V_1$  и  $V_2$  значения  $e_{hk}$  будем учитывать с точностью до средних  $\langle e_{hk} \rangle_1$  и  $\langle e_{hk} \rangle_2$ . Вычисление  $\langle e_{hk} \rangle_2$  из условия (0.4) приближенно заменим соотношением для средних по  $V_2$ . Таким образом,

$$(1.7) \quad \begin{aligned} e_{hk} &= \langle e_{hk} \rangle_1 \kappa + \langle e_{hk} \rangle_2 (1 - \kappa), \\ \langle e_{hk} \rangle_2 &= \alpha \sqrt{\langle \varepsilon_{ij} \rangle_2 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_2}. \end{aligned}$$

Из соотношений (0.7), (1.4) с учетом формул (1.7) следует

$$\langle (e'_{hk})^2 \rangle = \frac{1 - c}{c} [\langle e_{hk} \rangle - \alpha a \sqrt{\langle \varepsilon_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle} / (1 - c)]^2.$$

Формулы будут менее громоздкими, если соотношение (1.6) заменить на  $a = 1 - c$ , различие между которыми показано на фиг. 1.

Диссипативная функция (1.5) после подстановки значения  $\langle (e'_{hk})^2 \rangle$  равна

$$(1.8) \quad D = k(1 - c) \sqrt{\langle \varepsilon_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \frac{2}{3} c^{-1} (\langle e_{hk} \rangle - \alpha \sqrt{\langle \varepsilon_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle})^2}.$$

В процессе деформирования происходит изменение концентрации  $c$ , которая определяется уравнением (0.8). Подстановка формул (0.7), (1.7) в уравнение (0.8) дает

$$(1.9) \quad dc/dt = (1 - c) (\langle e_{hk} \rangle - \alpha \sqrt{\langle \varepsilon_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle}).$$

Диссипативная функция (1.8) и соотношение (0.6) определяют условие предельного равновесия грунта [6]

$$(1.10) \quad \sqrt{\langle s_{ij} \rangle \langle s_{ij} \rangle} + \alpha \langle \sigma_{hk} \rangle / 3 - \sqrt{k^2 (1 - c)^2 - c \langle \sigma_{hk} \rangle^2 / 6} = 0$$

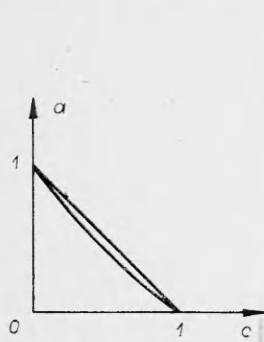
и ассоциированный закон деформирования

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij} \rangle &= \lambda \langle s_{ij} \rangle / \sqrt{\langle s_{kl} \rangle \langle s_{kl} \rangle}, \quad \lambda \geq 0, \\ \langle e_{hk} \rangle &= \lambda (\alpha + (1/2) c \langle \sigma_{hk} \rangle) / \sqrt{k^2 (1 - c)^2 - c \langle \sigma_{hk} \rangle^2 / 6}. \end{aligned}$$

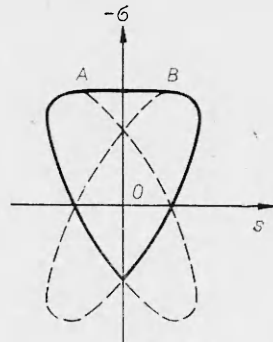
При переходе от выражения для диссипативной функции (1.8) к соотношениям (1.10), (1.11) выявляются следующие особенности.

Условие (1.10) имеет место при ограничениях

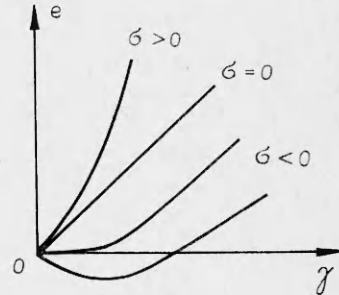
$$\sigma_1 \leq \langle \sigma_{hk} \rangle / 3 \leq \sigma_2, \quad \sigma_1 = -k \frac{1 - c}{\sqrt{c}} \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \sigma_2 = \alpha^{-1} \sqrt{k^2 (1 - c)^2 - \frac{3}{2} c \sigma_2^2}.$$



Ф и г. 1



Ф и г. 2



Ф и г. 3

При значениях всестороннего давления  $\sigma_2$  из условия (1.10) следует, что  $s_{ij} = 0$ , и в соотношениях (1.11) появляется неопределенность значений  $\langle e_{ij} \rangle$ , соответствующая конической точке на поверхности предельного равновесия. Эту особенность следовало ожидать, так как коническая точка определяется еще в исходных соотношениях (0.1), (0.2).

При давлениях  $\sigma_1$  из (1.11) следует, что  $\langle e_{ij} \rangle / \langle e_{kk} \rangle = 0$  независимо от значений  $s_{ij}$  в определенных границах. Откуда получаем  $\langle e_{ij} \rangle = 0$  и  $\langle e_{kk} \rangle \neq 0$ . Этот случай соответствует закону деформирования, ассоциированному с условием  $\langle \sigma_{kk} \rangle = 3\sigma_1$ . Можно показать, что в пространстве  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  гиперплоскость  $\langle \sigma_{kk} \rangle = 3\sigma_1$  плавно смыкается с гиперповерхностью (1.11).

Эти особенности становятся наглядными, если в пространстве  $e_{ij}$  представить поверхность  $D = \text{const}$ , тогда из условия градиентальности (0.7) следует, что конической точке на поверхности  $D = \text{const}$  соответствует плоский участок поверхности предельного равновесия, плоскому участку — коническая точка в пространстве  $\sigma_{ij}$ .

Для того чтобы учесть уплотнение грунтов и сохранить ассоциированный закон деформирования, в феноменологических теориях поверхность предельного равновесия замыкалась плоским дном, соответствующим некоторому значению  $\sigma_{kk}$ , при котором начинается процесс уплотнения [6,7]. Данная работа показывает, что это предположение не является условно введенным.

2. Исследуем некоторые свойства грунта, определенного соотношениями (1.9)—(1.11). Рассмотрим действие гидростатического давления  $\sigma$  и касательного напряжения  $s$ . Условие (1.10) принимает вид

$$(2.1) \quad |s| + \alpha\sigma - \sqrt{k^2(1-c)^2 - 3c\sigma^2/2} = 0.$$

Соотношение (2.1) в плоскости  $\sigma, s$  описывает область, ограниченную отрезками эллиптических кривых (фиг. 2) и прямолинейным участком  $AB$ , соответствующим значению  $\sigma = \sigma_1$ . На штриховых линиях значения в условии (2.1) приводят к мнимым величинам.

В работе [8] экспериментально определены области предельного равновесия, которые по форме близки к области, показанной на фиг. 2.

Деформационные свойства грунта существенны при расчетах проходимости шасси. Глубина колеи зависит от процессов уплотнения под поверхностью колеса и условий разрыхления на обочинах колеи. В частности, прогнозирование условий посадки летательных аппаратов на естественные грунты сопряжено с исследованиями дилатансионных зависимостей, которые в ряде случаев имеют сложный вид [9, 10]. Дилатансионные

соотношения должны учитывать изменение предельного условия (2.1) в процессе деформирования с использованием уравнения (1.9).

Изменение объемной деформации  $e$  при монотонном возрастании деформации сдвига  $\gamma$  исследуем в условиях постоянного давления  $\sigma$ . Из соотношений (1.11) следует

$$(2.2) \quad de/d\gamma = \alpha + (3/2)c\sigma/\sqrt{k^2(1-c)^2 - 3c\sigma^2/2},$$

и уравнение (1.9) принимает вид

$$(2.3) \quad dc/d\gamma = (1-c)(de/d\gamma - \alpha).$$

Так как значение  $\sigma$  фиксировано, условие (2.1) определяет касательное напряжение  $s$ . Уравнения (2.2), (2.3) можно проинтегрировать при заданной в начальный момент деформирования пористости  $c_0$ . Концентрацию пор будем предполагать малой и относительно ее учитывать только линейные слагаемые, тогда после интегрирования уравнений (2.2), (2.3) получим

$$(2.4) \quad e = \alpha\gamma + c_0 \left( e^{\frac{3}{2} \frac{\sigma}{k} \gamma} - 1 \right).$$

На фиг. 3 показаны дилатансионные кривые (2.4), вид которых характерен для песчаных грунтов [10, 11]. Эффект перехода процессов уплотнения в разрыхление при  $\sigma < 0$  был обнаружен экспериментально [10]. Исходные соотношения (0.1), (0.2) не позволяют описать установившийся процесс с изменяющимися объемными деформациями.

Поступила 13 XI 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Drucker D., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design.— Quart. Appl. Math., 1952, vol. 10, N 2.
2. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М., Наука, 1966.
3. Дудукаленко В. В., Минаев В. А. К расчету предела пластичности композитных материалов.— ПММ, 1970, т. 4, № 5.
4. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials.— J. Mech. Phys. Solids, 1963, vol. 11, N 2.
5. Левин В. М. К определению упругих и термоупругих постоянных композитных материалов.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 6.
6. Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М., Наука, 1971.
7. Jenike A. W., Shield R. T. On the plastic flow of Coulomb solids beyond original failure.— Trans. ASME, 1959, E26, N 4.
8. Дидух Б. И., Иоселевич В. А. О построении теории пластического упрочнения грунта.— Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 2.
9. Цитович Н. А. Механика грунтов. М., Госстройиздат, 1963.
10. Тейлор Д. В. Основы механики грунтов. М., Госстройиздат, 1960.
11. Vesic A., Clough G. Behaviour of granular materials under high stresses.— J. Soil Mech. and Found. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Engs., 1968, vol. 9, N 3.