

## ЛИТЕРАТУРА

1. Lortz D. Exact solutions of the hydromagnetic dynamo problem.— Plasma Phys., 1968, vol. 10, N 11, p. 967.
2. Брагинский С. И. О самовозбуждении магнитного поля при движении хорошо проводящей жидкости.— ЖЭТФ, 1964, т. 47, вып. 3.
3. Тверской Б. А. К теории гидродинамического самовозбуждения регулярных магнитных полей.— Геомагнетизм и аэрономия, 1966, т. 6, № 1.
4. Гайлитис А. Самовозбуждение магнитного поля парой кольцевых вихрей.— Магнитн. гидродинамика, 1970, № 1.
5. Пономаренко Ю. Б. К теории гидромагнитного динамо.— ПМТФ, 1973, № 6.
6. Гайлитис А. К., Фрейберг Я. Ж. К теории винтового МГД-динамо.— Магнитн. гидродинамика, 1976, № 2.
7. Зельдович Я. Б. Магнитное поле в проводящей турбулентной жидкости при двумерном движении.— ЖЭТФ, 1956, т. 31, вып. 1.
8. Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. М., ИЛ, 1963.
9. Ерохин Н. С., Моисеев С. С. Волновые процессы в плазме.— В кн.: Вопросы теории плазмы. Т. 7. М., Атомиздат, 1973.

УДК 538.3 : 538.4

### СЛАБЫЕ РАЗРЫВЫ В ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Н. Ф. Пацегон

(Харьков)

1. Рассмотрим распространение слабых разрывов в проводящей намагничивающейся жидкости. Жидкость предполагается несжимаемой ( $\rho = \text{const}$ ), идеальной (диссипативные процессы отсутствуют), неоднородно и изотропно намагничивающейся по произвольному закону  $\mu = \mu(\rho, T, H)$ , так что магнитная индукция  $\mathbf{B}$  и напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  связаны равенством

$$(1.1) \quad \mathbf{B} = \mu(\rho, T, H)\mathbf{H}.$$

Зависимость магнитной проницаемости  $\mu$  от плотности  $\rho$  и температуры  $T$  позволяет учесть магнитоstrictionные и магнитокалорические эффекты в намагничивающейся жидкости. Уравнение (1.1) принимается при исследовании течений жидких диа- и парамагнитных металлов [1] и электропроводных ферромагнитных жидкостей [2], в которых можно пренебречь явлениями, связанными с гистерезисом намагниченности.

Система уравнений, описывающая в магнитогидродинамическом приближении нестационарные движения такой жидкости, имеет вид [3]

$$(1.2) \quad \text{div } \mathbf{v}' = 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \frac{d}{dt} (S + S^e) = 0,$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla(p + \psi) + \frac{1}{4\pi} \text{rot } \mathbf{H} \times \mathbf{B} + M \nabla H, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}].$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — скорость жидкости,  $M = (\mu - 1)H/(4\pi)$  — намагниченность,

$$(1.3) \quad \psi = \int_0^H (\mu - 1 - \rho\mu_\rho) H dH, \quad S^e = \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^H \mu_T H dH,$$

$n_\rho, u_T \dots$  обозначают частную производную функции  $u$  по  $\rho, T$  соответственно при постоянных остальных параметрах.

Энтропия  $S$  и температура  $T$  жидкости в отсутствие электромагнитного поля удовлетворяют [4] уравнению состояния  $T = T(S)$ .

Разрыв первых производных произвольной величины  $u$  при переходе через поверхность  $\varphi(x, y, z, t) = 0$  слабого разрыва полностью определяется одной функцией  $\lambda_u$  [5], так что

$$(1.4) \quad \langle \nabla u \rangle = \lambda_u \mathbf{n}, \quad \langle \partial u / \partial t \rangle = -\lambda_u G,$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к поверхности  $\varphi(x, y, z, t) = 0$ ,  $G = -\mathbf{n} \frac{\partial \varphi}{\partial t} / \sqrt{|\nabla \varphi|^2}$  — скорость распространения разрыва; угловые скобки обозначают разрыв заключенной в них величины при переходе через поверхность разрыва.

Используя (1.4), из (1.2) получим динамические условия на слабых разрывах

$$(1.5) \quad (\lambda_v \mathbf{n}) = 0, \quad (\lambda_B \mathbf{n}) = 0, \quad \theta (\lambda_S + \lambda_{Se}) = 0, \\ \rho \theta \lambda_v = (\lambda_p + \lambda_\psi) \mathbf{n} + \frac{\mathbf{B}}{4\pi} \times (\mathbf{n} \times \lambda_H) - M \lambda_H \mathbf{n}, \\ \lambda_B \theta + \lambda_v B_n = 0,$$

где  $\theta = G - v_n$  — нормальная составляющая скорости элемента разрыва относительно среды;  $v_n = (\mathbf{v} \mathbf{n})$ ;  $B_n = (\mathbf{B} \mathbf{n})$ ;  $\lambda_v = \lambda_{v_x} \mathbf{i} + \lambda_{v_y} \mathbf{j} + \lambda_{v_z} \mathbf{k}$ ;  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  — орты декартовой системы координат  $x, y, z$ .

Из равенств (1.1), (1.3) и уравнения состояния дополнительно имеем

$$(1.6) \quad \lambda_T = T_S \lambda_S, \quad \lambda_\psi = \psi_T \lambda_T + (\mu - 1 - \rho \mu \rho) H \lambda_H / (4\pi), \\ \lambda_{Se} = S_T^e \lambda_T + \mu_T H \lambda_H / (4\pi \rho), \\ \lambda_H = \mu (\lambda_B \mathbf{B}) / B - \mu_T \lambda_T \mathbf{B} / (\mu^2 + \mu_H B), \\ \lambda_H = \frac{\lambda_B}{\mu} - \frac{\mu_H (\lambda_B \mathbf{B}) \mathbf{B}}{\mu B (\mu^2 + \mu_H B)} - \frac{\mu_T \lambda_T \mathbf{B}}{\mu^2 + \mu_H B}.$$

Представим каждый из векторов в виде  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\tau + v_n \mathbf{n}$ , где  $\mathbf{v}_\tau$  — проекция вектора  $\mathbf{v}$  на касательную плоскость к поверхности разрыва. Учитывая, что  $\lambda_{v_\tau} = \lambda_v - \lambda_{v_n} \mathbf{n}$ , и используя равенства (1.6), преобразуем систему уравнений (1.5) к виду

$$(1.7) \quad \lambda_{v_n} = 0, \quad \lambda_{B_n} = 0;$$

$$(1.8) \quad \lambda_p = -\lambda_\psi - (\mathbf{B} \lambda_H) / (4\pi) + B_n (\lambda_H \mathbf{n}) / (4\pi) + M \lambda_H;$$

$$(1.9) \quad B_n \lambda_{v_\tau} = -\theta \lambda_{B_\tau};$$

$$(1.10) \quad \rho \theta \lambda_{v_\tau} = -\frac{B_n}{4\pi} \left\{ \frac{\lambda_{B_\tau}}{\mu} - \frac{\mu_H (\lambda_{B_\tau} \mathbf{B}_\tau) \mathbf{B}_\tau}{\mu^2 + \mu_H B} - \frac{\mu_T T_S \lambda_S \mathbf{B}_\tau}{\mu^2 + \mu_H B} \right\};$$

$$(1.11) \quad \theta [\lambda_S + N \mu \mu_T m (\lambda_{B_\tau} \mathbf{B}_\tau)] = 0,$$

$$m = [4\pi \rho (\mu^2 + \mu_H B)]^{-1}, \quad N = [1 + S_T^e T_S - \mu_T^2 T_S m B^2]^{-1}.$$

Из равенств (1.7) следует, что производные нормальных компонент скорости и индукции магнитного поля непрерывны на характеристике, так что разрыв могут претерпевать только производные касательных составляющих скорости и индукции. Равенство (1.8) определяет интенсивность скачка производных давления. Система однородных уравнений (1.9)—(1.11) служит для определения  $\lambda_S, \lambda_{v_\tau}, \lambda_{B_\tau}$ . Из условия существования нетривиальных решений этой системы получаем уравнение,

определяющее возможные скорости  $\theta$  слабых разрывов в проводящей намагничивающейся жидкости

$$(1.12) \quad \theta \left( \theta^2 - \frac{B_n^2}{4\pi\mu} \right) \left[ \theta^2 - mB_n^2 (\mu^2 + \mu_H B_n^2/B) - N\mu^2 \mu_T^2 T_S m^2 B_n^2 B_\tau^2 \right] = 0.$$

Таким образом, в электропроводной несжимаемой намагничивающейся жидкости существуют следующие типы слабых разрывов:

магнитогидродинамический (альфвеновский)

$$(1.13) \quad \theta_A^2 = mB_n^2 (\mu^2 + \mu_H B);$$

магнитозвуковой

$$(1.14) \quad \theta_M^2 = mB_n^2 [\mu^2 + \mu_H B_n^2/B + N\mu^2 \mu_T^2 T_S m B_\tau^2];$$

энтропийный

$$(1.15) \quad \theta_S = 0.$$

Таким образом, магнитоэстрикционные эффекты в несжимаемой жидкости сказываются только на интенсивности скачка давления. Если  $\mu = \mu(\rho) = \text{const}$ , то в электропроводной жидкости возможны только альфвеновский и энтропийный разрывы, так что магнитозвуковой разрыв в изотропно намагничивающейся жидкости появляется исключительно из-за неоднородности закона намагничивания.

На возможность плоских магнитозвуковых волн бесконечно малой амплитуды в проводящей намагничивающейся жидкости впервые было указано в работе [6].

Из (1.13), (1.14) получаем, что скорость распространения магнитозвукового разрыва равна альфвеновской только в случаях, когда вектор магнитной индукции ортогонален элементу разрыва ( $B_\tau = 0$ ), касательный к нему ( $B_n = 0$ ), либо при значениях параметров, когда

$$(1.16) \quad \mu^2 \mu_T^2 T_S m B_\tau^2 = \mu_H [1 + S_T^e T_S - \mu_T^2 T_S m B^2].$$

В последнем случае магнитозвуковая скорость совпадает с альфвеновской при произвольной ориентации элементов разрывов относительно поля. Отметим, что этот случай невозможен, если учитывается зависимость магнитной проницаемости только от температуры, либо только от напряженности магнитного поля.

Определим величины  $\lambda_i (i = \rho, T, \dots)$  в каждом типе разрывов. Из (1.9), (1.10) имеем

$$[\theta^2 - (\mu^2 + \mu_H B_n^2/B) m B_n^2] (\lambda_{B_\tau} B_\tau) = -\mu \mu_\tau T_S m B_n^2 B_\tau^2 \lambda_S,$$

а уравнение (1.11) приводится к виду

$$\theta (\theta^2 - \theta_M^2) [\theta^2 - mB_n^2 (\mu^2 + \mu_H B_n^2/B)]^{-1} \lambda_S = 0.$$

Для магнитогидродинамического разрыва ( $\theta = \theta_A$ ) отсюда следует  $\lambda_{S1} = 0$ , так что и  $\lambda_T = 0$ . Из (1.6) — (1.9) имеем

$$\lambda_{v_n} = \lambda_{B_n} = \lambda_H = \lambda_{S^e} = \lambda_p = (\lambda_v B) = (\lambda_B B) = 0,$$

$$\lambda_H = \lambda_B / \mu, \quad \lambda_{v_\tau} = \pm \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu}} \lambda_{B_\tau}.$$

В магнитогидродинамических разрывах изменяются только касательные составляющие скорости, индукции и напряженности магнитного поля.

Свойства магнитозвуковых разрывов существенно зависят от учета магнитокалорического эффекта в жидкостях. Рассмотрим сначала случай, когда  $\mu_T = 0$ . Такие законы намагничивания, в частности, имеют место в диамагнитных жидкостях и в парамагнитной жидкости в сильных полях, когда намагниченность близка к насыщению.

Для этого случая  $S^e = 0$  и из (1.11) получаем  $\lambda_S = 0$ , а из (1.6)–(1.8)

$$(1.17) \quad \lambda_T = 0, \quad \lambda_p = -(\lambda_{B_\tau} \mathbf{B}_\tau) m \mu \rho [\mu - \rho \mu_\rho + \mu_H B_n^2 / (\mu B)],$$

$$\lambda_{B_\tau} = (\lambda_{B_\tau} \mathbf{B}_\tau) \frac{\mathbf{B}_\tau}{B_\tau^2},$$

$$\lambda_{v_\tau} = -\frac{\theta}{B_n} \lambda_{B_\tau}, \quad \lambda_H = 4\pi \rho \mu^2 m (\lambda_{B_\tau} \mathbf{B}_\tau) / B.$$

Следовательно, производные термодинамических параметров непрерывны.

Для случая  $\mu_T \neq 0$  из (1.6)–(1.11) получим

$$(1.18) \quad \lambda_T = T_S \lambda_S, \quad \lambda_H = -\lambda_S (1 + S_T^e T_S) / (\mu^2 + \mu_H B) \mu_T m B,$$

$$\lambda_p = \frac{\lambda_S}{\mu \mu_T} \{ -\psi_T T_S \mu \mu_T + \rho (1 + S_T^e T_S) [(2 - \rho \mu_\rho) \mu + \mu_H B_n^2 / B] - \\ - \rho \mu_T^2 T_S m B_n^2 (\mu^2 + \mu_H B) \},$$

$$\lambda_{B_\tau} = -\lambda_S \mathbf{B}_\tau / N \mu \mu_T m B_\tau^2, \quad \lambda_{v_\tau} = -\frac{\theta}{B_n} \lambda_{B_\tau}.$$

При учете магнитокалорического эффекта в слабых разрывах претерпевают скачки и производные термодинамических параметров. Из (1.17), (1.18) следует, что скачки производных касательных компонент скорости и индукции лежат в плоскости, проходящей через  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{B}_\tau$ . Таким образом, в отличие от альфвеновских магнитозвуковых разрывы плоскополяризованы.

Пусть теперь элемент магнитозвукового разрыва движется с альфвеновской скоростью. Тогда, если  $B_\tau = 0$ , для скачков производных получаем те же соотношения, что и в магнитогидродинамических разрывах. Если же  $B_n = 0$  либо выполняется условие (1.16), то разрывы производных магнитогидродинамических параметров вообще произвольны.

Для энтропийного разрыва ( $\theta = 0$ ) из уравнения (1.9) следует  $\lambda_{v_\tau} B_n = 0$ . Если  $B_n \neq 0$ , то  $\lambda_{v_\tau} = 0$ . При этом из (1.10)

$$\lambda_{B_\tau} = \mu \mu_T T_S B \mathbf{B}_\tau \lambda_S / (\mu^2 B + \mu_H B_n^2),$$

$$\lambda_H = -\mu_T T_S B_n^2 \lambda_S / (\mu^2 B + \mu_H B_n^2),$$

$$\lambda_p = - \left[ \psi_T + \frac{\rho \mu \mu_T B_n^2 B}{4\pi \mu (\mu^2 B + \mu_H B_n^2)} \right] T_S \lambda_S.$$

В этом случае производные скорости на энтропийном разрыве непрерывны. Если  $\mu_T = 0$ , то в энтропийном разрыве испытывают скачок только производные температуры и энтропии.

Если же  $B_n = 0$ , то  $\lambda_{v_\tau}$ ,  $\lambda_{B_\tau}$  и  $\lambda_S$  произвольны,  $\lambda_p$  и  $\lambda_H$  определяются из уравнений (1.6), (1.8).

2. Изучим вопрос о распространении слабых разрывов в проводящей намагничивающейся жидкости.

Намагниченность  $M$  парамагнитных жидкостей определяется формулой Ланжевена [1]

$$(2.1) \quad M = M_0 L(\xi), \quad L(\xi) = \text{cth } \xi - \xi^{-1}, \quad \xi = m_0 H / kT,$$

где  $m_0$  — магнитный момент молекулы;  $k$  — постоянная Больцмана;  $M_0 = \text{const}$ .

Формула (2.1) принимается и для ферромагнитных жидкостей [7]; при этом  $m_0$  — магнитный момент однодоменных частиц диспергированного ферромагнетика.

Уравнение (1.16) в случае закона Ланжевена имеет вид

$$f(\xi) = \zeta(\xi \text{cth } \xi - 1)(1 - \xi^2/\text{sh}^2 \xi) + \xi \text{cth } \xi + \xi^2/\text{sh}^2 \xi - 2 = 0, \\ \zeta = M_0 k T_S / m_0 \rho T.$$

При значениях  $0 < \xi < \infty$  это уравнение не имеет решений и функция  $f(\xi)$  положительна. Таким образом, в парамагнитной жидкости  $\theta_M^2 \geq \theta_A^2$ .

Для случая  $\mu = \mu(H)$  из (1.12) имеем

$$(2.2) \quad \frac{\theta_M^2}{\theta_A^2} = 1 - \frac{\mu_H B_\tau^2 / B}{\mu^2 + \mu_H B}.$$

Известные законы намагничивания, а также кинетические представления о природе намагниченности диа- и парамагнетиков [1] позволяют предположить, что для намагниченности  $M(H)$  в парамагнетике  $dM/dH > 0$ ,  $d^2M/dH^2 \leq 0$ , а в диамагнетике  $dM/dH < 0$ ,  $d^2M/dH^2 \geq 0$ . Тогда для магнитной проницаемости имеем [8]

$$(2.3) \quad 0 \leq \mu_H \leq (1 - \mu)/H (\mu < 1), \quad (1 - \mu)/H \leq \mu_H \leq 0 (\mu > 1).$$

Поэтому из (2.2) следует, что в парамагнитной жидкости скорость магнитозвуковых разрывов больше альфвеновской, а в диамагнитных жидкостях всегда меньше (за исключением элементов разрывов, для которых  $B_n = 0$  либо  $B_\tau = 0$ ).

Представим скорость магнитозвуковых разрывов в виде

$$(2.4) \quad \theta^2 = al + bl(1 - l), \quad a = B^2/4\pi\rho\mu, \quad l = \cos^2 \varphi, \quad \cos \varphi = B_n/B.$$

В парамагнитной жидкости

$$b = mB^2 (N\mu^2\mu_T^2 T_S m B^2 - \mu_H B),$$

и в силу вышеизложенного можно считать  $b > 0$ .

В диамагнитной жидкости

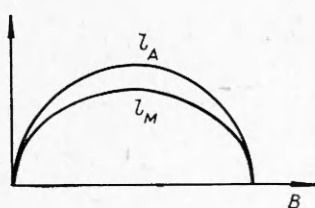
$$b = - \frac{\mu_H B^3}{4\pi\rho(\mu^2 + \mu_H B)} < 0,$$

при этом  $a + b > 0$ .

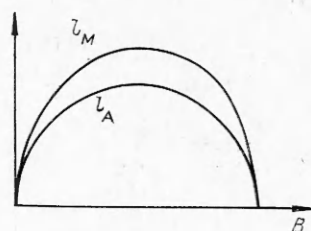
Общий вид диаграмм фазовых скоростей изображен на фиг. 1, 2, где  $l_A$  и  $l_M$  обозначают кривые  $\theta(\varphi)$  соответственно для магнитогидродинамических и магнитозвуковых разрывов (приведены четверти диаграмм). Такой же вид имеют диаграммы фазовых скоростей в жидкости, намагничивающейся по произвольному закону  $\mu = \mu(\rho, T, H)$ , если исключить из рассмотрения случай вырождения, когда выполняется равенство (1.16). В последнем случае кривые  $l_A$  и  $l_M$  совпадают.

Пусть состояние жидкости характеризуется значениями параметров

$$v(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{const}, \quad T(\mathbf{r}, t) = \text{const}, \quad p(\mathbf{r}, t) = \text{const}, \\ \mathbf{r} = xi + yj + zk.$$



Ф и г. 1



Ф и г. 2

Используя результаты работы [9], получим, что каждый элемент поверхности разрыва перемещается по жидкости не вращаясь, с постоянной скоростью. Нормальная к элементу разрыва составляющая скорости совпадает с одной из скоростей  $\theta$  (см. (1.12)). Если поверхность слабого разрыва задана в начальный момент времени  $t_0$ , то в момент времени  $t = t_0 + 1$  она является огибающей плоскостей, касательных к начальной поверхности разрыва  $\Omega_0$  и смещенных в направлении нормалей к  $\Omega_0$  на расстояние  $\theta$ .

Для начальной поверхности разрыва  $\Omega_0$ , сосредоточенной вблизи начала координат и содержащей всевозможно ориентированные элементы, сечение поверхности разрыва плоскостью, проходящей через  $B$  в момент  $t_0 + 1$ , изображено на фиг. 3, 4. Кривые  $L_M$  обозначают сечения поверхностей магнитозвуковых разрывов. Точки  $L_A$  обозначают альфвеновские разрывы. Энтропийный разрыв совпадает с поверхностью тока и на диаграммах изображен точкой  $O$ .

Поверхности слабых разрывов в этом случае задаются параметрически уравнениями [10]

$$(2.5) \quad X = \left[ \theta(l) + 2 \frac{d\theta}{dl} (1-l) \right] \sqrt{l}, \quad Y = \left[ \theta(l) - \frac{2d\theta}{dl} l \right] \sqrt{1-l}$$

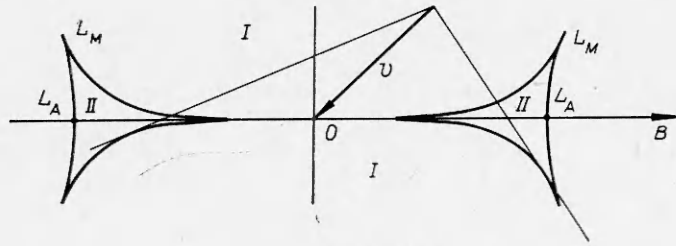
(начало декартовой системы координат  $(X, Y)$  совпадает с поверхностью разрыва в начальный момент времени, ось  $X$  направлена по вектору  $\mathbf{B}$ ). Для магнитозвуковых разрывов с использованием (2.4) уравнения (2.5) приводятся к виду

$$(2.6) \quad X = \frac{a + b(1-l)^2}{\sqrt{a + b(1-l)}}, \quad Y = \frac{bl^{3/2}\sqrt{1-l}}{\sqrt{a + b(1-l)}}.$$

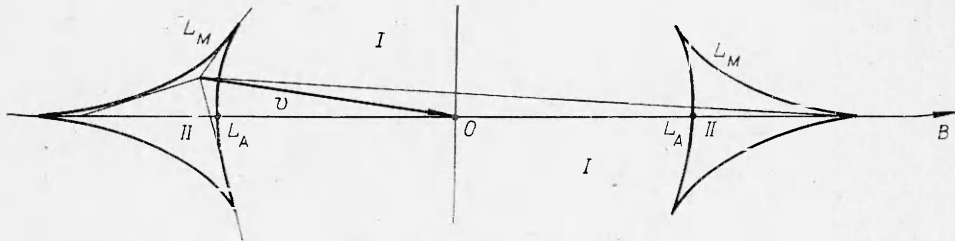
Элементарные исследования показывают, что кривые (2.6) изображают два криволинейных треугольника, вершины которых являются точками возврата, а выпуклость этих треугольников направлена внутрь ограниченной ими области. В парамагнитной жидкости эти треугольники заостренностью направлены от начала координат (фиг. 4), а в диамагнитной жидкости — к началу координат (фиг. 3). Вершины треугольников определяются равенствами

$$l = 0, \quad l = (3b + 2a - \sqrt{4a^2 + 3ab})/3b.$$

Кривые  $L_M$  в неоднородно намагничивающейся жидкости существуют при значениях магнитной проницаемости, сколь угодно мало отклоняющихся от единицы, и только в однородно намагничивающихся жидкостях они вырождаются в точки  $L_A$ . Отметим, что диаграммы на фиг. 3 аналогичны диаграммам для медленных магнитозвуковых волн в магнитной гидродинамике. Диаграммы, приведенные на фиг. 4, не имеют аналога в изотропной магнитной гидродинамике.



Ф и г. 3



Ф и г. 4

Фиг. 3, 4 соответствуют случаям, когда между скоростями разрывов имеют место зависимости, изображенные на фиг. 1, 2.

3. Рассмотрим плоские стационарные движения идеальной проводящей намагничиваемой жидкости при  $v_z = 0$ ,  $B_z = 0$ . В этом случае характеристические поверхности системы уравнений (1.2) будут цилиндрическими поверхностями, образующие которых параллельны оси  $z$ . В плоских движениях жидкости возможны только магнитозвуковые и энтропийные характеристики. Последние совпадают с линиями тока. Для стационарных движений  $\theta = -v_n$ . С учетом этого из (1.14) получим уравнение, определяющее возможные характеристические направления в плоскости  $(x, y)$ :

$$(3.1) \quad (y')^4 [Q_x^2 - q_x^2 (R_1 + q_x^2 R_2)] - 2(y')^3 [Q_x Q_y - q_x q_y (R_1 + 2q_x^2 R_2)] + \\ + (y')^2 [Q^2 - R_1 - 6q_x^2 q_y^2 R_2] - 2y' [Q_x Q_y - q_x q_y (R_1 + 2q_y^2 R_2)] + \\ + Q_y^2 - q_y^2 (R_1 + q_y^2 R_2) = 0,$$

где  $y' = \frac{dy}{dx}$ ;  $Q = v/A$ ;  $q = A/A$ ;  $A = B/\sqrt{4\pi\rho\mu}$ ;  $Q^2 = Q_x^2 + Q_y^2$ ;

$$R_1 = (\mu^2 + N\mu^2\mu_T^2 T_{sm} B^2)/(\mu^2 + \mu_H B); \quad R_2 = \\ = (\mu_H B - N\mu^2\mu_T^2 T_{sm} B^2)/(\mu^2 + \mu_H B).$$

В общем случае в точке потока  $\mathbf{r}$  уравнение (3.1) определяет либо четыре, либо два характеристических направления в зависимости от величины вектора  $\mathbf{v}$ . Для определения числа и направлений характеристик по параметрам потока в точке  $\mathbf{r}$  строим кривые  $L_M$ . Тогда аналогично [9] можно показать, что направления характеристик в этой точке совпадают с направлениями касательных, проведенных к кривым  $L_M$  из точки  $-\mathbf{v}(\mathbf{r})$ . Отсюда следует, что если конец вектора  $-\mathbf{v}(\mathbf{r})$  попадает в области II, ограниченные криволинейными треугольниками на фиг. 3, 4, то в точке потока  $\mathbf{r}$  существует четыре действительных характеристиче-

ских направления. Если же конец вектора  $-\mathbf{v}(\mathbf{r})$  попадает в области  $I$ , то имеем только две действительные характеристики.

Для течений жидкости в перпендикулярном магнитном поле в области  $II$  характеристик нет, а в области  $I$  имеем две характеристики. Если векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$  параллельны, то в области  $II$ , кроме линий тока, существуют две действительные характеристики, а в области  $I$  действительных магнитозвуковых характеристик нет. Для течений жидкости вдоль силовых линий магнитного поля условие существования характеристик записывается в виде

$$\mu^2 + N\mu^2\mu_T^2 T smB^2 \leq v^2/mB^2 \leq \mu^2 + \mu_H B \quad (\theta_M^2 < \theta_A^2)$$

либо

$$\mu^2 + \mu_H B \leq v^2/mB^2 \leq \mu^2 + N\mu^2\mu_T^2 T smB^2 \quad (\theta_M^2 > \theta_A^2).$$

4. Наличие действительных магнитозвуковых характеристик приводит к существенным отличиям в движении несжимаемой неоднородно намагничивающейся жидкости по сравнению с течением электропроводных жидкостей, для которых магнитная проницаемость полагается постоянной.

Рассмотрим одномерные простые волны, являющиеся частным случаем поперечных волн, которые изучались в [11].

Для произвольного закона намагничивания  $\mu = \mu(\rho, T, H)$  из системы (1.2) можно получить уравнения простых волн [12] в виде

$$(4.1) \quad \frac{dT}{dB_y} = -N\mu\mu_T T smB_y, \quad \frac{dv_x}{dB_y} = -\theta/B_x,$$

$$B_x = \text{const}, \quad v_x = \text{const}, \quad B_z = 0, \quad v_z = 0,$$

где  $\theta$  — скорость движения фронта простой волны, определяемая выражением (1.14), в котором надо положить  $B_n = B_x$ .

Поскольку для парамагнитной жидкости намагниченность убывает с возрастанием температуры ( $\mu_T < 0$ ), то в магнитозвуковых простых волнах, как это следует из (4.1), температура монотонно возрастает, а скорость, наоборот, монотонно убывает с увеличением магнитной индукции.

Уравнение

$$(4.2) \quad x - (v_x + \theta(B_y))t = F(B_y)$$

после интегрирования системы (4.1) определяет зависимость  $B_y(x, t)$  в простой волне, распространяющейся в положительном направлении оси  $x$ , по заданному начальному распределению магнитной индукции:  $B_y = F^{-1}(x)$ .

Для электропроводной парамагнитной жидкости, намагничивающейся по закону Ланжевена, в слабых магнитных полях ( $\xi \ll 1$ ) из (2.1) получим

$$\frac{\mu - 1}{\mu} = \frac{\mu_0 - 1}{\mu_0} \frac{T_0}{T}.$$

Принимая для жидкости уравнение состояния в виде [4]  $S = c_p \ln T + \text{const}$  ( $c_p$  — теплоемкость) и пренебрегая в (4.1) слагаемыми порядка  $(\mu_0 - 1)^2$  и выше, после интегрирования получим

$$(4.3) \quad T^2 - T_0^2 = (\mu_0 - 1) \frac{T_0}{c_p} \frac{B_y^2 - B_{y0}^2}{4\pi\rho},$$

$$v_y - v_{y0} = -\frac{B_y - B_{y0}}{\sqrt{4\pi\rho}} + \frac{(\mu_0 - 1)(B_y - B_{y0})}{2\sqrt{4\pi\rho}}.$$



При  $\mu_0 = 1$  формулы (4.3) определяют изменение переменных в альфвеновской простой волне.

В сильных магнитных полях ( $\xi \gg 1$ , состояние насыщения намагниченности) намагниченность  $M$  постоянна, так что  $\mu - 1 = 4\pi M/H$ . Тогда из (4.1) получим

$$(4.4) \quad \frac{dv_y}{dB} = - \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}} \left( \frac{B^3 - 4\pi M B_x^2}{B^3 - B B_x^2} \right)^{1/2}, \quad T = \text{const.}$$

Ограничиваясь значениями  $|\mu - 1| \ll 1$ , из (4.4) имеем

$$v_y = - \frac{B_y}{\sqrt{4\pi\rho}} \left\{ 1 + \frac{2\pi M}{B} - \frac{\pi^2 M^2}{2 B^2} \left( \frac{3}{8} + \frac{B_x^2}{4B^2} + \frac{3}{8} \frac{B^2}{B_x B_y} \arctg \frac{B_y}{B_x} \right) + O \left( \frac{M^3}{B^3} \right) \right\} + \text{const.}$$

Уравнения (4.1) могут быть исследованы в случае произвольного закона намагничивания  $\mu = \mu(\rho, H)$ . Тогда температура в простой волне не изменяется, а зависимость поперечной составляющей скорости от индукции определяется вторым уравнением (4.1), причем

$$\theta = \frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho}} \sqrt{\frac{\gamma}{\mu}}, \quad \gamma \equiv \frac{\mu^2 B + \mu_H B_x^2}{\mu^2 B + \mu_H B^2}.$$

Так как

$$(4.5) \quad \theta \frac{d\theta}{dB_y} = \frac{B_y B_x^2 \mu^2}{8\pi\rho\gamma^2 (\mu + \mu_H H) B} \frac{3B_x^2 \mu_H (\mu^2 + \mu_H B)^3 + 4\pi B_y^2 \mu^4 M_{HH}}{(\mu^3 H + \mu_H B_x^2)^2},$$

то из неравенств (2.3) следует, что в парамагнитной жидкости  $d\theta/dB_y > 0$ , а в диамагнитной жидкости  $d\theta/dB_y < 0$  для волн, распространяющихся в положительном направлении оси  $x$ .

Интегральные кривые  $\sqrt{\rho} v_y(B_y)$  в плоскости  $(B_y, \sqrt{\rho} v_y)$  пересекают ось  $(\sqrt{\rho} v_y)$  под постоянным углом  $-\arctg(1/\sqrt{4\pi\rho\mu})$  и монотонно убывают с ростом  $B_y$ . В диамагнитной жидкости эти кривые выпуклы вниз, а в парамагнитной — вверх.

Из (4.5) следует, что профиль простой магнитозвуковой волны с течением времени деформируется.

Дифференцируя (4.2) по  $x$  при постоянном  $t$  и используя последнее уравнение (1.2), получим

$$- \frac{t d\theta/dB_y + dF/dB_y}{\theta(B_y)} \frac{dB_y}{dt} = 1.$$

Отсюда получаем, что в диамагнитной жидкости на участках профиля простой волны, где в начальный момент времени имело место намагничивание ( $dF/dB_y < 0$ ), оно сохранится и в последующие моменты времени. На участке размагничивания ( $dF/dB_y > 0$ ) размагничивание происходит до момента времени

$$t_1 = \min \left[ - \frac{dF/dB_y}{d\theta/dB_y} \right].$$

В момент времени  $t = t_1$  на участке размагничивания профиля простой волны образуется точка перегиба [10]:

$$(4.6) \quad \left( \frac{\partial x}{\partial B_y} \right)_t = 0, \quad \left( \frac{\partial^2 x}{\partial B_y^2} \right)_t = 0,$$

что свидетельствует о возникновении ударной волны размагничивания. Система уравнений (4.6) служит для определения момента времени и места образования ударной волны.

Аналогично показывается, что в парамагнитной жидкости ударные волны, возникающие при деформировании профиля простой волны, являются волнами намагничивания. В отличие от альфвеновских эти ударные волны слабой интенсивности имеют стационарную структуру [13].

Автор выражает благодарность И. Е. Тарапову за постоянное внимание к работе.

Поступила 14 II 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вонсовский С. В. Магнетизм. М., Наука, 1971.
2. Каган И. Я., Рыков В. Г., Яитовский Е. И. Ферромагнитные электропроводные жидкости.— Магнитн. гидродинамика, 1970, № 3.
3. Таранов И. Е. К гидродинамике поляризующихся и намагничивающихся сред.— Магнитн. гидродинамика, 1972, № 1.
4. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М., Наука, 1976.
5. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М., ГИТТЛ, 1963.
6. Тарапов И. Е. Звуковые волны в намагничивающейся среде.— ПМТФ, 1973, № 1.
7. Шапошников И. Г., Шлюмис М. И. Гидродинамика намагничивающихся сред.— Магнитн. гидродинамика, 1975, № 1.
8. Пацегон Н. Ф., Тарапов И. Е. Звуковые и простые волны в проводящей намагничивающейся среде.— Укр. физ. ж., 1974, т. 19, № 6.
9. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., ГИФМЛ, 1962.
10. Электродинамика плазмы. Под редакцией А. И. Ахизера. М., Наука, 1974.
11. Тарапов И. Е. Поперечные волны и разрывы в идеальной намагничивающейся жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 6.
12. Пацегон Н. Ф., Половин Р. В., Тарапов И. Е. Простые волны и сильные разрывы в намагничивающейся среде.— ПММ, 1979, № 1.
13. Пацегон Н. Ф. Структура скачка слабой интенсивности в проводящей намагничивающейся жидкости.— Магнитн. гидродинамика, 1978, № 2.

УДК 538.4

### О МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ ТЯЖЕЛЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Р. Х. Зейтунян

(Лилль, Франция)

При рассмотрении стационарного потока идеальной сжимаемой вращающейся плазмы в поле тяжести в уравнениях появляются четыре безразмерных параметра: числа Фруда  $F_r$ , Россби  $Ro$ , Маха  $M_0$  и Альфвена  $A_0$ . Здесь предполагается, что  $A_0$  и  $M_0$  одновременно очень малы и удовлетворяют соотношению подобия  $A_0^2/M_0 = \nu_0$ , где  $\nu_0 = O(1)$  — константа. Сначала анализируется случай, когда  $F_r \rightarrow 0$  и  $A_0^2/F_r^2 = \lambda_0$ , где  $\lambda_0 = O(1)$  — константа; получается классическое приближение статического равновесия. Если заметить, что  $F_r^2 = \gamma M_0^2 / \beta_0$ , где  $\beta_0$  — отношение характерных длин, то необходимо рассмотреть два случая. Первый случай соответствует  $\beta_0 = O(1)$  и получается предельная система уравнений, позволяющая изучать атмосферные движения вблизи планет солнечной системы, для которых характерная угловая скорость вращения не очень высока ( $A_0^2/Ro \ll 1$ ). Второй случай соответствует  $\beta_0 \rightarrow 0$  и  $\beta_0/M_0 = \mu_0$ , где  $\mu_0 = O(1)$  — новая константа; можно получить предельную систему уравнений, подходящую для анализа развития солнечных пятен, где магнитные и конвективные эффекты тесно связаны.