

РАСПАД ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА НА КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. М. Тешуков

(Новосибирск)

Для системы уравнений газовой динамики доказано существование разрывного кусочно-аналитического решения пространственной задачи о распаде произвольного разрыва, сосредоточенного в начальный момент на заданной криволинейной гиперповерхности.

Задача о распаде произвольного разрыва на криволинейной поверхности возникает при описании взрыва заряда несферической формы [1], волнового движения жидкости при разрушении плотины и т. д. Эти и близкие к ним задачи пространственной газовой динамики изучались в основном в рамках приближенных моделей или численно. В плоском случае одна из конфигураций распада произвольного разрыва рассматривалась в работе [2] в точной постановке, где доказана возможность построения решения в классе формальных степенных рядов при определенных ограничениях на начальные данные.

1. Постановка задачи и основной результат. Пусть Γ_0 — аналитическая гиперповерхность в R^3 без самопересечений, разделяющая R^3 на подобласти D_1 и D_2 . В момент времени $t = 0$ задано состояние газа:

$$(1.1) \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_i^0(\mathbf{x}), \quad p|_{t=0} = p_i^0(\mathbf{x}), \quad S|_{t=0} = S_i^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D_i, \quad i = 1, 2,$$

где \mathbf{u} — скорость газа; p — давление; S — энтропия. Функции \mathbf{u}_i^0 , p_i^0 , S_i^0 аналитичны в областях \bar{D}_i , а на Γ_0 их предельные значения различны. Требуется описать движение газа при $t > 0$. Газ предполагается невязким, нетеплопроводным, нормальным [3, 4], его уравнения состояния — аналитическими.

В одномерной постановке аналогичная задача достаточно хорошо изучена [3, 5]. В зависимости от начальных данных по обе стороны разрыва возникают три основные конфигурации разрыва. Согласно [3], конфигурацией А называется образование ударной волны, центрированной волны и контактного разрыва, конфигурации Б соответствует образование двух ударных волн и контактного разрыва, конфигурации В — образование двух центрированных волн и контактного разрыва. Конфигурация А содержит два подслучая — движение ударной волны в D_1 , центрированной в D_2 и наоборот. Кроме этих основных, возникают промежуточные конфигурации, соответствующие обращению в нуль амплитуды одной из волн, вырождающейся при этом в слабый разрыв на характеристике.

В работе построено кусочно-аналитическое решение пространственной задачи о распаде разрыва. На поверхностях разрывов решения выполнены определенные условия. Для слабых разрывов это условия непрерывного примыкания. Для ударных волн — соотношения Гюгонно

$$(1.2) \quad [\rho(u_n - D_n)] = 0, \quad [p + \rho(u_n - D_n)^2] = 0, \\ [\varepsilon + p/\rho + 1/2(u_n - D_n)^2] = 0, \quad [u_\sigma] = 0$$

и условие возрастания энтропии. Для контактных разрывов — условия

$$(1.3) \quad [u_n] = 0, \quad [p] = 0,$$

где $[]$ — символ скачка; $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$; $u_\sigma = \mathbf{n} \times \mathbf{u} \times \mathbf{n}$; \mathbf{n} — нормаль к сечению поверхности разрыва плоскостью $t = \text{const}$; D_n — скорость движения поверхности в направлении нормали; ε — внутренняя энергия газа; ρ — плотность газа.

Одним из элементов решения будут волны, центрированные на поверхности Γ_0 (так называются решения, обладающие свойством: звуковые характеристики одного из семейств, проходящие при $t = 0$ через Γ_0 , покрывают область определения решения). Как показано в [6], для построения центрированной волны достаточно задать условия непрерывного примыкания по характеристике к известному решению и предельное значение на Γ_0 нормальной компоненты скорости на второй граничной характеристике. Асимптотически при $t \rightarrow 0$ центрированная волна ведет себя так же, как простая волна Римана, центрированная на плоскости, касательной к Γ_0 в данной точке.

В связи с этим ясно, что локально в окрестности каждой точки Γ_0 вид конфигурации распада разрыва определяется точно так же, как в одномерном случае. Введем величины Φ_{ij} , Ψ_{ij} ($i = 1, 2, j = 1, 2$), Δu_n , Δp следующим образом:

$$\Phi_{ij} = [(p_j^0 - p_i^0)(\tau_i^0 - \tau_i(p_j^0))]^{1/2}|_{\Gamma_0}, \quad \Delta p = (p_2^0 - p_1^0)|_{\Gamma_0},$$

$$\Psi_{ij} = (\sigma_i(p_j^0) - \sigma_i(p_i^0))|_{\Gamma_0}, \quad \Delta u_n = (u_{n2}^0 - u_{n1}^0)|_{\Gamma_0},$$

где σ — функция переменных p , S такая, что $\partial\sigma/\partial p = (\rho c)^{-1}$; $\sigma_i(p) = \sigma(p, S_i^0)$; c — скорость звука; $\tau_i^0 = (\rho_i^0)^{-1}$; $\tau_i = \tau_i(p)$ — уравнение адиабаты Гюгонио с центром в точке τ_i^0 , p_i^0 . Конфигурация А возникает при выполнении следующих неравенств:

$$(1.4) \quad \Psi_{21}\theta(\Delta p) + \Psi_{12}\theta(-\Delta p) < \Delta u_n < \\ < \Phi_{21}\theta(-\Delta p) + \Phi_{12}\theta(\Delta p)$$

(нормаль n направлена в D_1). Конфигурации Б соответствует неравенство

$$(1.5) \quad \Delta u_n > \Phi_{21}\theta(-\Delta p) + \Phi_{12}\theta(\Delta p).$$

Неравенство, при выполнении которого возникает конфигурация В, имеет вид

$$(1.6) \quad \Delta u_n < \Psi_{21}\theta(\Delta p) + \Psi_{12}\theta(-\Delta p).$$

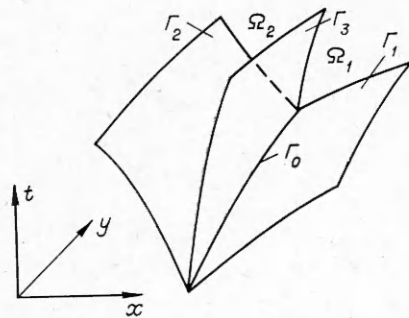
Промежуточным конфигурациям соответствует достижение равенства в одном из неравенств (1.4)–(1.6) ($\theta(x) = 0$, $x < 0$; $\theta(x) = 1$, $x \geq 0$).

В силу конечности скорости распространения возмущений достаточно рассмотреть случай ограниченных областей D_i , прилегающих к Γ_0 . Пусть начальные данные в D_i удовлетворяют условию: конфигурация распада разрыва для всех точек Γ_0 одна и та же. Тогда справедлива

Т е о р е м а 1. В области $\Omega = (\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2) \times (0, t_0]$ ($t_0 > 0$) существует единственное кусочно-аналитическое решение задачи (1.1).

Случай изменений конфигурации распада разрыва вдоль Γ_0 требует отдельного рассмотрения в связи с появлением новых особенностей решения.

2. Конфигурация В. В этом случае начальные данные удовлетворяют (1.6). Аналогично одномерному случаю можно найти предельные значения величины u_n на Γ_0 в области за центрированными волнами. По теореме Коши — Ковалевской существуют аналитические решения уравнений газовой динамики, принимающие данные (1.1) в D_1 и D_2 . Условиями примыкания к этим решениям и величиной u_n на Γ_0 определяются аналитические при $t > 0$ центрированные волны [6]. Остается построить поверхность контактного разрыва и решения в областях, ограниченных этой поверхностью и граничными характеристиками центрированных волн. Аналитические данные на этих характеристиках таковы, что $[u_n] = 0$ и $[p] = 0$ на Γ_0 . Существование решения этой задачи доказано в работе [7].



Теорема доказана в случае конфигурации В и соответствующей промежуточной конфигурации.

3. Конфигурация В. На Γ_0 выполнены неравенства (1.4). Аналогично предыдущему случаю находятся аналитические решения, принимающие данные (1.1). Требуется найти поверхности ударных волн Γ_1, Γ_2 , поверхность контактного разрыва Γ_3 и решения уравнений газовой динамики в областях Ω_1 и Ω_2 , ограниченных этими поверхностями (фигура иллюстрирует плоский случай) так, чтобы на Γ_1, Γ_2 выполнялись соотношения Гюгонио (1.2), а на контактной характеристике Γ_3 — условия (1.3).

Переходом к новым независимым переменным задача в области с неизвестными границами сводится к задаче в фиксированной области [8]. Пусть Γ_0 задана параметрически:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(\beta, \gamma), \quad |\mathbf{x}_{0\beta}| > \delta > 0, \quad |\mathbf{x}_{0\gamma}| > \delta > 0, \\ |\mathbf{x}_{0\beta} \times \mathbf{x}_{0\gamma}| > \delta > 0.$$

Рассмотрим две задачи Коши в области Ω_1 :

$$t_\alpha = 1, \quad \mathbf{y}_\alpha = d_n(\mathbf{y}_\beta \times \mathbf{y}_\gamma) \cdot |\mathbf{y}_\beta \times \mathbf{y}_\gamma|^{-1}, \\ t|_{\alpha=0} = 0, \quad \mathbf{y}|_{\alpha=0} = \mathbf{x}_0(\beta, \gamma), \quad (3.1)$$

$$t_\tau = 1, \quad \mathbf{x}_\tau = u_n(\mathbf{x}_\beta \times \mathbf{x}_\gamma) \cdot |\mathbf{x}_\beta \times \mathbf{x}_\gamma|^{-1}, \\ t|_{\tau=0} = \alpha, \quad \mathbf{x}|_{\tau=0} = \mathbf{y}|_{\tau=0}.$$

Величина $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$, а $\mathbf{n} = (\mathbf{x}_\beta \times \mathbf{x}_\gamma) \cdot |\mathbf{x}_\beta \times \mathbf{x}_\gamma|^{-1}$; функция d_n будет определена так, что при $\tau = 0$ она будет совпадать со скоростью движения ударной волны в направлении нормали \mathbf{n} . Соотношения $t = \tau + \alpha$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau, \alpha, \beta, \gamma)$ задают переход к новым переменным в области Ω_1 . Эти соотношения при $\tau = 0$ задают в параметрическом виде поверхность ударной волны, а при $\alpha = \text{const}$ — контактную характеристику, проходящую в момент времени $t = \alpha$ через фронт ударной волны [8]. Введем вектор $\mathbf{u}_\sigma = \mathbf{n} \times \mathbf{u} \times \mathbf{n}$ ($\mathbf{u} = u_n \mathbf{n} + \mathbf{n} \times \mathbf{u} \times \mathbf{n}$). Предельные значения на Γ_0 из области Ω_1 скорости \mathbf{u} , давления p , энтропии s , скорости движения фронта ударной волны в направлении нормали d_n однозначно определяются из соотношений (1.2), (1.3) как аналитические функции переменных β, γ . Преобразуем уравнения газовой динамики в области Ω_1 к переменным $\tau, \alpha, \beta, \gamma$, рассматривая в качестве искомым функций $r = u_n + p/\rho_1 c_1$, $l = u_n - p/\rho_1 c_1$, \mathbf{u}_σ и s :

$$r_\alpha = (1-m)r_\tau + f_1, \quad (1+m)l_\tau = l_\alpha + f_2, \\ \mathbf{u}_{\sigma\tau} = a_1 \mathbf{v}_\beta + a_2 \mathbf{v}_\gamma, \quad s_\tau = a_3 s_\beta + a_4 s_\gamma, \quad (3.2)$$

где

$$f_1 = \mathbf{a}_5 \mathbf{v}_\beta + \mathbf{a}_6 \mathbf{v}_\gamma + \mathbf{b}_1 \mathbf{v}_\tau + \mathbf{b}_2 \mathbf{v}_\alpha; \quad m = |d_{n1} - u_{n1}| c_1^{-1}; \\ f_2 = \mathbf{a}_7 \mathbf{v}_\beta + \mathbf{a}_8 \mathbf{v}_\gamma + \mathbf{b}_3 \mathbf{v}_\tau + \mathbf{b}_4 \mathbf{v}_\alpha \quad (0 < m < 1);$$

$\rho_1, c_1, u_{n1}, d_{n1}$ — значения соответствующих величин в фиксированной точке A_0 ($\beta = \beta_0, \gamma = \gamma_0$) поверхности Γ_0 ; \mathbf{v} — обозначение вектора-решения с компонентами $r, l, \mathbf{u}_\sigma, s, \mathbf{x}_\beta, \mathbf{x}_\gamma, \mathbf{x}_\alpha$; a_i ($i=1, \dots, 8$), b_j ($j=1, \dots$

..., 4) — скалярные, векторно-значные, матрично-значные аналитические функции аргумента \mathbf{v} . Функции $b_j = 0$ в точке A_0 .

Зная параметры газа перед ударной волной как функции переменных x, t , нормаль к фронту и величину r за фронтом, можно однозначно определить все параметры газа за фронтом. Получаем следующие граничные условия при $\tau = 0$:

$$l|_{\tau=0} = (ar + q(r, \mathbf{n}, \mathbf{x}, t))|_{\tau=0}, \quad \mathbf{u}_\sigma|_{\tau=0} = \mathbf{k}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)|_{\tau=0}, \quad (3.3)$$

$$s|_{\tau=0} = w(r, \mathbf{n}, \mathbf{x}, t)|_{\tau=0}, \quad D_n|_{\tau=0} = d(r, \mathbf{n}, \mathbf{x}, t)|_{\tau=0}.$$

Определим функцию \tilde{a}_n в Ω_1 : $d_n = d(r, \mathbf{n}, \mathbf{x}, t)$; в частности, в (3.1) $d_n = d(r, (\mathbf{y}_\beta \times \mathbf{y}_\gamma) \cdot |\mathbf{y}_\beta \times \mathbf{y}_\gamma|^{-1}, \mathbf{y}, t)$. Функция q обладает свойством: $q_r = 0$ в точке A_0 . Постоянная a вычисляется по формуле

$$a = (-1 + \rho_1 c_1 du_n/dp(A_0)) (1 + \rho_1 c_1 du_n/dp(A_0))^{-1},$$

где du_n/dp — угловой коэффициент (p, u_n) -диаграммы ударных волн [3, 4]. В силу того, что $du_n/dp > 0$, $|a| < 1$. Выделение линейного по r члена в первом соотношении (3.3) связано с тем, что величина a играет важную роль при выяснении условий разрешимости задачи.

Аналогичные преобразования выполняются в области Ω_2 . Соответствующие величины в Ω_2 обозначаются большими буквами: X, Y, S, U_n, U_σ и т. д. Локальные инварианты Римана вводятся следующим образом: $R = U_n - P/\rho_2 c_2$, $L = U_n + P/\rho_2 c_2$ (ρ_2, c_2 — предельные значения ρ и c из Ω_2 в точке A_0). Преобразованные уравнения и граничные условия при $\tau = 0$ имеют формально тот же вид, что (3.1), (3.2), (3.3) с заменой в обозначениях искомых функций малых букв на большие. Величина A задается формулой

$$A = (1 + \rho_2 c_2 dU_n/dP(A_0))(-1 + \rho_2 c_2 dU_n/dP(A_0))^{-1}.$$

В силу того, что наклон (P, U_n) -диаграммы $dU_n/dP < 0$, $|A| < 1$. Из (1.3) получаем граничные условия при $\alpha = 0$

$$(3.4) \quad r = hl + KL, \quad R = HL + kl,$$

где

$$h = -H = (\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2) (\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^{-1}; \\ K = 2\rho_2 c_2 (\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^{-1}; \quad k = 2\rho_1 c_1 (\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^{-1}.$$

Заменами искомых функций, вытекающими из (3.3), (3.1), (3.4) и соответствующих соотношений в Ω_2 , приведем граничные условия к однородным. Нелинейные уравнения (3.1) сведем к квазилинейным, продолжая их на производные (обозначения преобразованных величин сохраняем). Преобразованные инварианты Римана при $\alpha = 0$ удовлетворяют условиям (3.4), а при $\tau = 0$ условиям

$$(3.5) \quad l = ar, \quad L = AR.$$

Поставленная задача является задачей Гурса (нехарактеристической). Для доказательства ее разрешимости используются специальным образом продолженные уравнения

$$(3.6) \quad r_\alpha = (1 - m)r_\tau + f_1, \quad (1 + m)l_\tau = l_\alpha + f_2, \\ R_\alpha = (1 - M)R_\tau + F_1, \quad (1 + M)L_\tau = L_\alpha + F_2.$$

Вывод продолженных уравнений несколько громоздок, поэтому приведем

результат:

$$\begin{aligned}
 & (1-m)^n (1-M)^n [\delta_n \Delta_n - kaKA] D_{n-j,j}^n r = (1-M)^n (1-m)^{n-j} \times \\
 & \quad \times [\delta_n h + kKA] \left[\sum_{i=0}^{n-1} g_i^+ f_1 + \sum_{i=0}^{j-1} ag_i^- f_2 + D_{n,0}^n (l-ar) \right] + \\
 & \quad + K (1+m)^n (1-m)^{n-j} \left[\sum_{i=0}^{n-1} (G_i^+ F_1 + AG_i^- F_2) + D_{n,0}^n (L-AR) + \right. \\
 & \quad \left. + (1-M)^n D_{0,n}^n (R-HL-kl) \right] + (1-M)^n (1+m)^n \delta_n (1-m)^{-j} \times \\
 & \quad \times \left[\sum_{i=j}^{n-1} g_i^- f_2 + (1-m)^n D_{0,n}^n (r-hl-KL) \right], \\
 (3.7) \quad & (1-m)^n (1-M)^n [\delta_n \Delta_n - kaKA] D_{n-j,j}^n l = (1-M)^n (1+m)^{n-j} \delta_n \times \\
 & \quad \times \left[\sum_{i=0}^{j-1} g_i^+ f_1 + \sum_{i=0}^{n-1} ag_i^- f_2 + D_{n,0}^n (l-ar) + (1-m)^n D_{n,0}^n (r-hl-KL) \right] + \\
 & \quad + aK (1+m)^{n-j} (1-m)^n \left[\sum_{i=0}^{n-1} (G_i^+ F_1 + AG_i^- F_2) + D_{n,0}^n (L-AR) + \right. \\
 & \quad \left. + (1-M)^n D_{0,n}^n (R-HL-kl) \right] + a(1-M)^n (1-m)^n (1+m)^{-j} \times \\
 & \quad \times [\delta_n h + kAK] \left[\sum_{i=j}^{n-1} g_i^+ f_1 \right].
 \end{aligned}$$

Кроме того, справедливы формулы вида (3.7) с заменой больших букв на малые и малых на большие. Здесь

$$\begin{aligned}
 D_{n-j,j}^n &= \partial^n / \partial \alpha^{n-j} \partial \tau^j; \quad g_i^+ = (1+m)^i D_{n-i-1,i}^{n-1}; \quad g_i^- = (1-m)^i D_{n-i-1,i}^{n-1}; \\
 G_i^+ &= (1+M)^i D_{n-i-1,i}^{n-1}; \quad G_i^- = (1-M)^i D_{n-i-1,i}^{n-1}; \\
 \delta_n &= (1+m)^n (1-m)^{-n} - ah; \quad \Delta_n = (1+M)^n (1-M)^{-n} - AH.
 \end{aligned}$$

Соотношения (3.7) обладают свойством: в точке A_0 суммарный порядок дифференцирования неизвестных функций по τ и α в правой части меньше n . Следовательно, их можно использовать для последовательного отыскания производных решения. Условия разрешимости (3.7) имеют вид

$$(3.8) \quad \delta_n \Delta_n - kaKA \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Л е м м а 1. Производные решения в точке A_0 определяются однозначно.

Неравенства (3.8) следуют из определения постоянных h, H, k, K и неравенств $0 < m < 1, 0 < M < 1, |a| < 1, |A| < 1, |h| = |H| < 1$. Утверждение легко проверяется для производных первого порядка.

Нужный факт устанавливается методом математической индукции по n -суммарному порядку дифференцирования по τ и α . Из (3.7) и аналогичных соотношений в Ω_2 находятся производные порядка $n+1$ по τ и α от функций r, l, R, L через производные порядка n по τ, α . Производные других функций определяются после этого из продифференцированных уравнений (3.1), (3.2) и их аналогов. В силу того что точка A_0 взята произвольно, утверждение справедливо для всех точек Γ_0 . Определив произ-

водные, можем построить решение в виде формальных степенных рядов по переменным τ , α , $\beta - \beta_0$, $\gamma - \gamma_0$.

Для доказательства сходимости будут построены мажоранты рядов в виде функций переменного $\eta = \xi(\tau + \alpha) + \beta - \beta_0 + \gamma - \gamma_0$ ($\xi > 1$ — постоянная). Уравнения для мажорант l_m , L_m , r_m , R_m , s_m , S_m и т. д. возникают при замене коэффициентов квазилинейной системы на мажорирующие их функции. При этом сохраняется свойство обращения в нуль в точке A_0 некоторых коэффициентов системы. Зависимость коэффициентов от τ , α , β , γ мажорируется зависимостью от η . Рассмотрим случай, когда $a \neq 0$, $A \neq 0$ (обращение в нуль величин a и A возможно, например, в политропном газе с показателем адиабаты κ : $5/3 \leq \kappa \leq 2$). Потребуем, чтобы мажоранты удовлетворяли соотношениям

$$(3.9) \quad l_m = |a|r_m, \quad L_m = |A|R_m, \quad R_m = |H|L_m + k_0 l_m, \quad r_m = |h|l_m + KL_m,$$

где

$$k_0 = |aA|^{-1}K^{-1}(1 - |ah|)(1 - |AH|).$$

Последнее соотношение гарантирует существование нетривиального решения линейных однородных уравнений (3.9). Решение мажорантных уравнений ищем в виде функций переменного η . Соответствующие (3.6) мажорантные уравнения имеют вид

$$(3.10) \quad \xi r'_m = m^{-1}f_{1m}, \quad \xi l'_m = m^{-1}f_{2m}, \quad \xi R'_m = M^{-1}F_{1m}, \quad \xi L'_m = M^{-1}F_{2m}.$$

В силу (3.9) правые части уравнений (3.10) связаны соотношениями

$$(3.11) \quad f_{2m} = |a|f_{1m}, \quad F_{1m} = Mm^{-1}k_0|a|(1 - |AH|)^{-1}f_{1m}, \\ F_{2m} = |A|F_{1m}.$$

Начальные условия для всех мажорант — обращение в нуль в точке A_0 . Тогда из (3.10), (3.11) следует (3.9). Мажоранта f_{1m} выбирается так, чтобы (\gg — отношение мажорирования)

$$(3.12) \quad f_{1m} \gg K_1 f_1, \quad f_{1m} \gg |a|^{-1}K_1 f_2, \\ f_{1m} \gg mK_1(1 - |AH|)(Mk_0|a|)^{-1}F_1, \\ f_{1m} \gg m(1 - |AH|)K_1(Mk_0|aA|)^{-1}F_2 \quad (K_1 = \max(1, kk_0^{-1})).$$

В качестве f_{1m} достаточно, например, взять сумму мажорант f_i и F_i ($i = 1, 2$) с достаточно большим числовым коэффициентом. Система обыкновенных уравнений для определения мажорант приводится к нормальному виду, если ξ выбрано достаточно большим и существование решения системы следует из теоремы Коши — Ковалевской. Соответствующие выкладки аналогичны проведенным в работе [8]. По построению найденные функции удовлетворяют условиям (3.4), (3.5) с заменой k на k_0 . Для них в силу уравнений можно получить формулы вида (3.7). Из этих формул, свойств (3.12) и свойства мажорируемости остальных уравнений системы вытекает тот факт, что построенные аналитические функции мажорируют формальные степенные ряды решения задачи. Сходимость доказана при $a \neq 0$, $A \neq 0$.

Пусть $A = 0$. Тогда вместо (3.9) потребуем выполнения соотношений

$$(3.13) \quad l_m = |a|K(1 - |ah|)^{-1}L_m, \quad r_m = K(1 - |ah|)^{-1}L_m, \\ R_m = (|H| + |a|kK(1 - |ah|)^{-1})L_m.$$

Если $A = 0$, $a = 0$, вместо (3.9) будут выполнены соотношения

$$R_m = |H|L_m + kl_m, \quad r_m = |h|l_m + KL_m.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущему случаю.

Возможность обращения отображения $t = \tau + \alpha$, $x = x(\tau, \alpha, \beta, \gamma)$ при малых t доказывается так же, как в работе [8]. Утверждение теоремы 1 в случае (1.5) доказано.

4. Конфигурация А. Начальные данные (1.1) на Γ_0 удовлетворяют неравенствам (1.4). Как и в предыдущем случае, первый шаг состоит в построении аналитических решений, принимающих данные (1.1) в D_1 и D_2 . Из соотношений сильного разрыва и соотношений центрированной волны [6] можно определить предельные значения параметров газа на Γ_0 из области Ω_1 за ударной волной и области Ω_2 за центрированной волной. Условий примыкания к известному решению и данных на Γ_0 достаточно для построения центрированной волны. Задача сводится к отысканию поверхности ударной волны Γ_1 , поверхности контактного разрыва Γ_3 и решения в областях Ω_1 , Ω_2 , удовлетворяющего условиям (1.2) на Γ_1 , (1.3) на Γ_3 и условию непрерывного примыкания к заданному решению на известной характеристике Γ_2 . К такой же задаче сводится промежуточная конфигурация А.

В области Ω_1 выполняются те же преобразования. В области Ω_2 новые переменные вводятся следующим образом: известная поверхность Γ_2 параметрически задается уравнениями $t = \alpha$, $x = x_1(\alpha, \beta, \gamma)$, где функция $x_1(\alpha, \beta, \gamma)$ — решение задачи

$$x_{1\alpha} = (U_n - C)(x_{1\beta} \times x_{1\gamma}) \cdot |x_{1\beta} \times x_{1\gamma}|^{-1}, \quad x_1|_{\alpha=0} = x_0(\beta, \gamma).$$

Далее решается задача Коши

$$T_\tau = 1, \quad X_\tau = U_n(X_\beta \times X_\gamma) \cdot |X_\beta \times X_\gamma|^{-1}, \\ X|_{\tau=0} = x_1(\alpha, \beta, \gamma), \quad T|_{\tau=0} = \alpha.$$

Соотношения $T = \tau + \alpha$, $X = X(\tau, \alpha, \beta, \gamma)$ задают переход к $\tau, \alpha, \beta, \gamma$. Инварианты Римана R и L вводятся точно так же, как в п. 3. Преобразованные уравнения газовой динамики имеют формально вид (3.2) (с заменой в обозначениях малых букв на большие) с той лишь разницей, что $M = 1$. На границе $\tau = 0$ задаются L, U_σ, S как функции переменных X, T . Таким образом, рассматриваемая задача аналогична изученной в п. 3 в случае $A = 0, M = 1$. В частности, условие формальной разрешимости

$$(1 + m)^n(1 - m)^{-n} - ah \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

выполнено. Дальнейшие рассуждения аналогичны п. 3.

Доказательство возможности обращения отображения $t = \tau + \alpha$, $x = x(\tau, \alpha, \beta, \gamma)$ в областях Ω_1 и Ω_2 приведено в [7, 8]. Теорема доказана.

Изложенный метод построения решения можно применять для приближенного расчета пространственного распада разрыва в окрестности начальной поверхности разрыва.

Автор выражает благодарность Л. В. Овсянникову за полезные обсуждения.

Поступила 3 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Шуршалов Л. В. Численные исследования задачи о взрыве цилиндрического заряда конечной длины. — ЖВММФ, 1973, т. 13, № 4.
2. Козманов М. Ю. К задаче о распаде двумерного разрыва. — В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Т. 9 (№ 2). Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1978.
3. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М., Наука, 1978.
4. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. Новосибирск, изд. НГУ, 1967.

5. Сидоренко А. Д., Рождественский Б. Л. Задача с контактным разрывом.—ЖВММФ, 1968, т. 8, № 6.
6. Тешуков В. М. Центрированные волны в пространственных течениях газа.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 39. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1979.
7. Тешуков В. М. Пространственная задача о распространении контактного разрыва в идеальном газе.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 32. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1977.
8. Тешуков В. М. Построение фронта ударной волны в пространственной задаче о поршне.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 33. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1978.

УДК 533.932

ОБ УДАРНОЙ ВОЛНЕ, ПОРОЖДЕННОЙ ДЕТОНАЦИЕЙ

Н. Н. Калиткин, В. М. Синенко

(Москва)

Рассмотрим цилиндрический заряд взрывчатого вещества (ВВ) достаточно больших размеров, в котором инициирована плоская детонационная волна, бегущая вдоль оси. Когда эта волна выходит на торец заряда, происходит распад разрыва. Пусть заряд конденсированного ВВ контактирует с инертной средой, меньшей динамической жесткости (газы, вода, органические вещества). Тогда в инертную среду пойдет ударная волна, а обратно в продукты взрыва (ПВ) — волна разгрузки с двумя слабыми разрывами.

