УДК 532.593

БОРНОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

С. П. Буданов, А. С. Тибилов, В. А. Яковлев

(Ленинград)

Трудности в проведении детальных и обширных измерений параметров внутренних волн в океане до некоторой степени задерживают развитие правильно аргументированной теории. В частности, мало известно о распределении энергии внутренних волн между различными модами. По ряду причин считается, что при достаточно резко выраженном термоклине доминирует низшая мода, поведение которой наиболее подробно исследовано в теоретическом плане [1]. Однако в развитии спектра внутренних волн важную роль играют более высокие моды, характеризующиеся большими значениями поперечного градиента скорости, увеличением возможностей локальной неустойчивости и вырождения в турбулентность. Поэтому представляет интерес рассмотрение способов передачи энергии по спектру внутренних волн. Очевидно, что модовая структура формируется в зависимости от изменчивости целого ряда параметров, обусловливающих закон распространения и взаимодействия внутренних волн в океане. Поэтому, например, рассматривались задачи распространения внутренних волн при наличии горизонтальных неоднородностей поля плотности [2, 3], сдвиговых течений [4, 5], произвольного вертикального поля плотности [6] и т. д. Достаточно полный перечень литературы можно найти в [7—9].

В данной работе обсуждается один из возможных механизмов перераспределения энергии внутренних волн между различными модами — рассеяние внутренних волн на локализированных неоднородностях поля плотности. При этом поставлена простейшая задача: для описания стратифицированной жидкости используется приближение Буссинеска и пренебрегается вращением Земли, а неоднородности поля плотности считаются не меняющимися во времени и покоящимися.

В рамках сделанных предположений в линейной постановке задачи и пренебрежения силами молекулярной вязкости исходная система уравнений, описывающая динамическое состояние среды, имеет вид [1]

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\nabla p + \frac{\rho}{\rho_0} g\mathbf{k} = 0, \quad \nabla \mathbf{U} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{U}\nabla\rho_1 - \rho_0 g^{-1} N_0^2 w = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{U} \equiv \{u, v, w\}$ — вектор скорости частиц среды; p — давление; ρ — отклонение плотности от исходного распределения плотности, равного $\bar\rho(z) + \rho_1(\mathbf{r})$; $\bar\rho(z)$ — распределение плотности в отсутствие неоднородностей; $\rho_1(\mathbf{r})$—функция, характеризующая неоднородность поля плотности; $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные орты вдоль осей декартовых координат x, y, z; g — ускорение силы тяжести; $N_0^2 \equiv -\frac{g}{\rho_0}\frac{d\bar\rho}{dz}$ — частота Вяйсяля — Брента. Следует отметить, что при таком задании поля плотности, вообще говоря, существуют стационарные течения. Но, так как эти течения достаточно медленны, в первом приближении ими можно пренебречь и считать поле плотности заданной функцией, не зависящей от времени (см., например, [3]).

Ниже нас будет интересовать функция $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$. Поэтому перейдем от системы (1) к системе уравнений для u, v, w, не содержащей функции $p(x, y, z)$ и $\rho(x, y, z)$:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta w + N_0^2(z)\Delta_h w = \frac{g}{\rho_0}\Delta_h(\mathbf{U}\nabla\rho_1), \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta u = \frac{\partial^2[N_0^2 w]}{\partial x\partial z} - \frac{g}{\rho_0}\frac{\partial^2[\mathbf{U}\nabla\rho_1]}{\partial x\partial z}, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta v = \frac{\partial^2[N_0^2 w]}{\partial y\partial z} - \frac{g}{\rho_0}\frac{\partial^2[\mathbf{U}\nabla\rho_1]}{\partial y\partial z}, \end{gathered} \tag{2}$$

где $\Delta_h = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — оператор Лапласа по горизонтальным координатам. Общих методов решения системы (2) при произвольных функциях N_0^2 и $\rho_1(\mathbf{r})$ не существует. В связи с этим приходится использовать приближенные методы, наиболее распространенным из которых является метод возмущений.

Будем считать, что

$$|\beta(\mathbf{r})| \equiv \left| -\frac{g}{\rho_0} \frac{\nabla \rho_1}{N_0^2} \right| \ll 1,$$

и искать решение системы (2) в виде ряда теории возмущений по малому параметру $|\beta(\mathbf{r})|$. Для этого удобно перейти от системы дифференциальных уравнений (2) к эквивалентной ей системе интегральных уравнений. С этой целью представим решение системы (2) в виде

$$\mathbf{U} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Q}(\mathbf{r}, \nu) \exp(i\nu t)\, d\nu, \tag{3}$$

где $\mathbf{Q} = \{U, V, W\}$, причем спектральные компоненты U, V, W удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\Delta W - \frac{N_0^2}{\nu^2} \Delta_h W = -\frac{g}{\rho_0 \nu^2} \Delta_h (\mathbf{Q}\nabla\rho_1), \tag{4}$$

$$\Delta U = -\frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 (N_0^2 W)}{\partial x \partial z} + g\rho_0^{-1}\nu^{-2} \frac{\partial^2 (\mathbf{Q}\nabla\rho_1)}{\partial x \partial z},$$

$$\Delta V = -\frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 (N_0^2 W)}{\partial y \partial z} + g\rho_0^{-1}\nu^{-2} \frac{\partial^2 (\mathbf{Q}\nabla\rho_1)}{\partial y \partial z}.$$

Пусть $\mathbf{Q}_0(\mathbf{r})$ — поле первичной волны, удовлетворяющее системе (4) с $\nabla\rho_1 \equiv 0$, а $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — функция Грина первого уравнения этой системы, т. е.

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \beta_0^2 \Delta_h G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{5}$$

где $\beta_0^2 = N_0^2 \nu^{-2}$; $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$; $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. При этом, разумеется, первичное поле $\mathbf{Q}_0(\mathbf{r})$ и функция Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ удовлетворяют необходимым граничным условиям. Тогда можно записать интегральное уравнение, эквивалентное первому уравнению системы (4), в виде

$$W(\mathbf{r}) = W_0(\mathbf{r}) + \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \beta_0^2(\mathbf{r}') \Delta_h [\mathbf{Q}(\mathbf{r}') \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}')]\, d\mathbf{r}'. \tag{6}$$

Ряд для функции $W(\mathbf{r})$ строится путем итерирования интегрального уравнения (6). Первый член ряда — первичное поле. Второй член

$$W_1(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \beta_0^2(\mathbf{r}') \Delta_h [\mathbf{Q}_0(\mathbf{r}') \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}')]\, d\mathbf{r}' \tag{7}$$

описывает однократно рассеянное поле. Оно порождено непосредственно взаимодействием первичного поля $\mathbf{Q}_0(\mathbf{r})$ с неоднородностью плотности. Мы ограничимся решением уравнения (6) в виде $W_Б(\mathbf{r}) = W_0(\mathbf{r}) + W_1(\mathbf{r})$ (борновское приближение), предполагая возмущения $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r})$ достаточно малыми. При найденном решении уравнения (6) уравнения для функций U и V в борновском приближении представляют собой уравнения Пуассона, решения которых достаточно хорошо изучены (см., например, [10]). Поэтому ниже ограничимся обсуждением формулы (7).

Для того чтобы лучше уяснить основные закономерности рассеяния, сделаем ряд допущений, которые упрощают анализ, но вместе с тем сохраняют общность, достаточную для многих приложений теории. Допущения сводятся к следующим:

1. Среда считается безграничной с $\beta_0^2 = \text{const}$.
2. Первичное поле является плоской монохроматической волной, распространяющейся в отрицательном направлении осей координат под углом $0 < \alpha_0 < \pi/2$ к горизонтальной плоскости:

$$\mathbf{U}_0(r, t) = \mathbf{A}_0 \exp[i(\mathbf{kr} + \nu t)],$$

где $\mathbf{k}$ — волновой вектор и выполняется дисперсионное соотношение

(8) $$\nu = N_0/\beta_0 = N_0 \cos \alpha_0.$$

3. Неоднородность поля плотности представляет собой изолированный объем D с $\beta(\mathbf{r}) = \mathrm{const}$.

Для вычисления $W_1(\mathbf{r})$ необходимо найти функцию Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. При этом в рамках сделанных предположений граничным условием задачи будет стремление $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ к нулю на бесконечности. Будем искать решение уравнения (5) в виде

(9) $$G(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, p)\, e^{-ipz} dp.$$

Подставляя это выражение в (5), получим уравнение для функции G, решение которого известно [11]:

$$G(x, y, p) = \frac{i}{4\beta_1^2} H_0^{(1)}(\gamma\rho),$$

$\beta_1^2 \equiv \beta_0^2 - 1$, $\gamma \equiv p/\beta$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $H_0^{(1)}(x)$ — функция Ганкеля первого рода нулевого порядка. Отсюда для функции Грина $G(x, y, z)$ можно получить формулу [12]

(10) $$G(\rho, z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\beta_1 \sqrt{\beta_1^2 z^2 - \rho^2}}, & \beta_1^2 z^2 - \rho^2 > 0, \\ \dfrac{i}{2\pi\beta_1 \sqrt{\rho^2 - \beta_1^2 z^2}}, & \beta_1^2 z^2 - \rho^2 < 0. \end{cases}$$

Подставляя выражение (10) для функции Грина $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ в формулу для рассеянного поля W_1, получим

(11) $$W_1(\rho, z) = -\frac{(\beta A_0) k^2 \operatorname{ctg} \alpha_0}{2\pi} \left\{ \int_D \frac{\exp(i\mathbf{kr})\, \theta\left[\beta_1^2 (z - z')^2 - (\rho - \rho')^2\right]}{\sqrt{\beta_1^2 (z - z')^2 - (\rho - \rho')^2}} d\rho' dz' + \right.$$
$$\left. + i \int_D \frac{\exp(i\mathbf{kr})\, \theta\left[(\rho - \rho')^2 - \beta_1^2 (z - z')^2\right]}{\sqrt{(\rho - \rho')^2 - \beta_1^2 (z - z')^2}} d\rho' dz' \right\},$$

где $$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Преобразуем выражение (11). Видно, что двойные интегралы по ρ' представляют собой свертки $h * q_1$ и $h * q_2$ соответственно, где

$$h(\rho, z) \equiv f(\rho, z) \exp[i\mathbf{k}_\rho \rho],$$

$$q_1(\rho) \equiv \frac{\theta(p^2 - \rho^2)}{\sqrt{p^2 - \rho^2}}, \quad q_2(\rho) \equiv \frac{\theta(\rho^2 - p^2)}{\sqrt{\rho^2 - p^2}}, \quad f(\rho, z) = \begin{cases} 1, & \rho, z \in D, \\ 0, & \rho, z \notin D. \end{cases}$$

Переходя к фурье-образам для функций $h(\rho, z)$, $q_1(p, \rho)$, $q_2(p, \rho)$ и применяя теорему о свертке [13], получим

(12) $$W_1(\rho, z) = -\frac{i(\beta A_0) k^2 \operatorname{ctg} \alpha_0}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\varkappa_\rho, z') \frac{\exp[-i|p||\varkappa_\rho| + ik_z z']}{|\varkappa_\rho|} \times$$
$$\times e^{-i\rho\varkappa_\rho} d\varkappa_\rho dz',$$

где $$\tilde{h}(\varkappa_\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho, z) \exp(i(\mathbf{k}_\rho + \varkappa_\rho)\rho)\, d\rho.$$

Функция $\tilde{h}(\varkappa_\rho, z)$ может быть вычислена для широкого класса функций $f(\rho, z)$. В частности, много примеров подобного рода расчетов можно найти в оптике (расчет дифракции Фраунгофера на отверстиях различного вида) [14].

Из выражения (12) видно, что рассеянная волна уже не является одномодовой, а содержит непрерывный спектр волновых чисел, которые в общем случае не удовлетворяют дисперсионному соотношению для падающей волны.

В качестве примера использования формулы (12) рассмотрим неоднородности плотности двух видов.

1. *Прямоугольный цилиндр с образующими вдоль оси.* Пусть

$$f(\boldsymbol{\rho}, z) = \theta(c^2 - z^2)\theta(R - |\boldsymbol{\rho}|),$$

где c — полувысота цилиндра; R — радиус цилиндра. Тогда для $\tilde{h}(\boldsymbol{\varkappa}_\rho, z)$ можно получить выражение [14]

$$\tilde{h}(\boldsymbol{\varkappa}_\rho, z) = 2\pi^2 R \frac{J_1(R\,|\mathbf{k}_\rho + \boldsymbol{\varkappa}_\rho|)}{|\mathbf{k}_\rho + \boldsymbol{\varkappa}_\rho|}\,\theta(c^2 - z^2),$$

где $J_1(x)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка. Подставляя $\tilde{h}(\boldsymbol{\varkappa}_\rho, z)$ в (12) и интегрируя по z', получим

$$W_1(\boldsymbol{\rho}, z) = -i(\beta\mathbf{A}_0)\,k^2 R \operatorname{ctg}\alpha_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} L(\boldsymbol{\varkappa}_\rho, z)\frac{J_1(R\,|\mathbf{k}_\rho + \boldsymbol{\varkappa}_\rho|)}{|\boldsymbol{\varkappa}_\rho|\,|\mathbf{k}_\rho + \boldsymbol{\varkappa}_\rho|}\,\mathrm{e}^{-i\rho\varkappa_\rho}\,d\boldsymbol{\varkappa}_\rho; \tag{13}$$

$$L(\boldsymbol{\varkappa}_\rho, z) = \theta(z - c)\,\mathrm{e}^{-i\beta_1|\varkappa_\rho|z}\frac{c\sin\alpha_1}{\alpha_1} + \theta(-z - c)\,\mathrm{e}^{-i\beta_1|\varkappa_\rho|z}\frac{c\sin\alpha_2}{\alpha_2} + \tag{14}$$

$$+\,\theta(c - |z|)\left\{\mathrm{e}^{\frac{i}{2}\left(\alpha_1 + \alpha_2\frac{z}{c}\right)}\frac{c\sin\left[\alpha_1\dfrac{1 + \frac{z}{c}}{2}\right]}{\alpha_1} + \mathrm{e}^{\frac{i}{2}\left(\alpha_2 + \alpha_1\frac{z}{c}\right)}\frac{c\sin\left[\alpha_2\dfrac{1 - \frac{z}{c}}{2}\right]}{\alpha_2}\right\},$$

где $\alpha_1 = -c(k_z + \beta_1|\varkappa_\rho|)$; $\alpha_2 = c(k_z - \beta_1|\varkappa_\rho|)$. Из выражения (13) следует, что амплитуда поля W_1 максимальна при рассеянии вперед. При этом основной вклад в интеграл дает область значений $\boldsymbol{\varkappa}_\rho \approx -\mathbf{k}_\rho$.

Необходимым условием применимости борновского приближения является условие малости амплитуды рассеянной волны $|W_1|/|W_0| \ll 1$. Используем выражение (13) для оценки границ применимости рассматриваемого приближения. Считая, что основной вклад в интеграл дают главные максимумы функций $L(\boldsymbol{\varkappa}_\rho, z)$ и $\tilde{h}(\boldsymbol{\varkappa}_\rho, z)$, получим

$$|W_1| \leqslant \pi D k^2 \operatorname{ctg}\alpha_0\,|(\beta\mathbf{A}_0)|\min\left\{\left|\frac{1 - k_z c}{\beta_1 c}\right|, \left|\frac{1{,}22}{R} - |\mathbf{k}_\rho|\right|\right\},$$

где $D = 2\pi R^2 c$ — объем неоднородности плотности. Отсюда условие применимости борновского приближения принимает вид

$$Dk^2 \operatorname{ctg}\alpha_0 \frac{|(\beta\mathbf{A}_0)|}{A_{0z}}\min\left\{\left|\frac{\operatorname{ctg}\alpha_0(1 - k_z c)}{c}\right|, \left|\frac{1{,}22}{R} - k_\rho\right|\right\} \ll 1. \tag{15}$$

2. *Прямоугольный параллелепипед.* Пусть

$$f(\boldsymbol{\rho}, z) = \theta(a - |x|)\theta(b - |y|)\theta(c - |z|),$$

$2a$, $2b$, $2c$ — длины ребер параллелепипеда. В этом случае для функции $\tilde{h}(\boldsymbol{\varkappa}_\rho, z)$ имеем [14]

$$\tilde{h}(\boldsymbol{\varkappa}_\rho, z) = 4\theta(c - |z|)\frac{\sin a(k_x + \varkappa_x)}{k_x + \varkappa_x}\,\frac{\sin b(k_y + \varkappa_y)}{k_y + \varkappa_y},$$

откуда

$$W_1(\boldsymbol{\rho}, z) = -\frac{2i}{\pi^2}k^2 \operatorname{ctg}\alpha_0(\beta\mathbf{A}_0)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{L(\boldsymbol{\varkappa}_\rho, z)}{|\boldsymbol{\varkappa}_\rho|}\,\frac{\sin a(k_x + \varkappa_x)}{k_x + \varkappa_x}\times \tag{16}$$

$$\times\frac{\sin b(k_y + \varkappa_y)}{k_y + \varkappa_y}\,\mathrm{e}^{-i\rho\varkappa_\rho}\,d\boldsymbol{\varkappa}_\rho.$$

И в этом случае основной вклад в интеграл дает область значений $\varkappa_\rho \approx \approx -\mathbf{k}_\rho$, а W_1 максимальна при рассеянии вперед. Оценим границы применимости борновского приближения. Переходя в (16) к полярным координатам, можно получить искомое условие

$$Dk^2 \operatorname{ctg}\alpha_0 \frac{|(\beta\mathbf{A}_0)|}{A_{0z}} \min\left\{\left|\frac{\operatorname{ctg}\alpha_0(1-k_z c)}{c}\right|, \sqrt{\left|\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}-k_\rho^2\right|}\right\} \ll 1, \tag{17}$$

где $D = 8abc$ — объем неоднородности.

Интересно рассмотреть частный случай a, $b \to \infty$ (скачок плотности толщиной $2c$). Устремляя в (16) a и b к бесконечности и используя формулу

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\sin\alpha x}{x} = \pi\delta(x),$$

получим

$$W_1^{\text{ск}}(\boldsymbol{\rho}, z) = -2ik\frac{(\beta\mathbf{A}_0)}{\sin\alpha_0} L(-\mathbf{k}_\rho, z)\, e^{i\mathbf{k}_\rho\boldsymbol{\rho}}. \tag{18}$$

Как и следовало ожидать, взаимодействие плоской волны со скачком плотности не привело к изменению модового состава. Существуют лишь прошедшая и отраженная волны, причем при $k_z c \ll 1$ амплитуды этих волн одинаковы. Заметим, что выражение (18) может быть получено и из формулы (13), так как $W_1(\boldsymbol{\rho}, z) \to W_1^{\text{ск}}(\boldsymbol{\rho}, z)$ при $R \to \infty$. Условие применимости борновского приближения для описания взаимодействия плоской волны со скачком плотности, как видно из выражения (18), имеет вид

$$\frac{kc}{\sin\alpha_0} \frac{|(\beta\mathbf{A}_0)|}{A_{0z}} \ll 1. \tag{19}$$

Приведенные условия применимости борновского приближения (15), (17) и (19) для областей возмущения поля плотности частного вида могут быть получены из общей оценки применимости приближения однократного рассеяния, которую следует провести на основе выражения (12) для $W_1(\boldsymbol{\rho}, z)$. Очевидно, что в соответствии со свойствами преобразования Фурье функция $\tilde{h}(\varkappa_\rho, z)$ быстро уменьшается с ростом $|\varkappa_\rho|$ при больших $R(Rk_\rho \gg 1)$, где R — характерный горизонтальный размер. Точно так же интеграл (12) по z' быстро уменьшается с ростом $|\varkappa_\rho|$ при больших R или c, где c — характерный вертикальный размер неоднородности. Поэтому имеем

$$\frac{|W_1|}{|W_0|} = \frac{k^2\operatorname{ctg}\alpha_0}{4\pi^2} \frac{|(\beta\mathbf{A}_0)|}{A_{0z}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\rho\varkappa_\rho}}{|\varkappa_\rho|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\varkappa_\rho, z')\, e^{-i|\rho||\varkappa_\rho|+ik_z z'} dz' \right\} d\varkappa_\rho \right| \leqslant$$

$$\leqslant k^2 \operatorname{ctg}\alpha_0 \frac{|(\beta\cdot\mathbf{A}_0)|}{A_{0z}} D\varkappa_0,$$

где $\varkappa_0 = \min\left\{\left|\frac{1}{R} - k_\rho\right|, \left|\frac{\operatorname{ctg}\alpha_0(1-k_\rho c)}{c}\right|\right\}$ ограничивает спектральную область изменения горизонтальных волновых чисел, в которой амплитуда рассеянной волны существенно отлична от нуля.

Таким образом, в общем случае имеем следующее условие применимости борновского приближения:

$$k^2 \operatorname{ctg}\alpha_0 \frac{|(\beta\mathbf{A}_0)|}{A_{0z}} D \min\left\{\left|\frac{1}{R} - k_\rho\right|, \left|\frac{\operatorname{ctg}\alpha_0(1-k_z c)}{c}\right|\right\} \ll 1.$$

Оценим теперь порядок углового размера области, в которой амплитуда рассеянной волны существенна. Для этого запишем рассеянную волну в спектральном виде

$$\widetilde{W}_1(\varkappa) = -ik^2 \operatorname{ctg}\alpha_0 (\beta A_0) \frac{F(\varkappa)}{|\varkappa_\rho|} \{\pi [\delta(\varkappa_z + \beta_1 |\varkappa_\rho|) + \delta(\varkappa_z - \beta_1 |\varkappa_\rho|)] + \\ + i \left[\frac{1}{\varkappa_z - \beta_1 |\varkappa_\rho|} - \frac{1}{\varkappa_z + \beta_1 |\varkappa_\rho|}\right]\}; \tag{20}$$

$$F(\varkappa) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\varkappa_\rho, z)\, e^{i(k_z + \varkappa_z)z} dz, \quad \varkappa = \{\varkappa_\rho, \varkappa_z\}. \tag{20a}$$

Из выражения (20) видно, что пространственный спектр рассеянной волны имеет пики на частотах, удовлетворяющих дисперсионному соотношению (8). Как следует из (12), функция $\tilde{h}(\varkappa_\rho, z)$ имеет главный максимум при $\varkappa_\rho \approx -\mathbf{k}_\rho$. При этом функция $F(\varkappa)$ максимальна при $\varkappa_\rho \approx -\mathbf{k}_\rho$ и $\varkappa_z \approx -k_z$, т. е. при рассеянии вперед. Введем полярный θ и азимутальный φ углы, отвечающие направлению $\varkappa$ относительно направления $-\mathbf{k}$. Тогда диапазон углов θ, φ, в котором амплитуда рассеянной волны существенно отлична от нуля, можно оценить из следующих условий:

для θ, согласно выражению (12),

$$2k_\rho R \sin (1/2)\theta \leqslant 1 \text{ или } \theta \leqslant 1/k_\rho R;$$

для φ, согласно выражению (20a), при $|\varkappa_\rho| \approx |\mathbf{k}_\rho|$ и $|k_z - \varkappa_z|\, c \approx 1$

$$\cos\varphi \approx \frac{k^2 + k_\rho^2 + (k_z + \Delta\varkappa_z)^2 - \Delta\varkappa_z^2}{2k\sqrt{k_\rho^2 + (k_z + \Delta\varkappa_z)^2}} - \frac{ck + \sin\alpha_0}{\sqrt{(ck + \sin\alpha_0)^2 + \cos^2\alpha_0}}.$$

Таким образом, размер области, в которой амплитуда рассеянной волны существенна, заключен в горизонтальной плоскости в угле $\theta \approx 1/k_\rho R$ и в вертикальной плоскости в угле

$$\varphi \approx \arccos\left[\frac{ck + \sin\alpha_0}{\sqrt{(ck + \sin\alpha_0)^2 + \cos^2\alpha_0}}\right].$$

Из полученных оценок следует, что в отличие от оптики рассеяние внутренних волн в вертикальной плоскости остается анизотропным и в случае мелкомасштабных неоднородностей ($k_z c \ll \sin\alpha_0$). При этом угол рассеяния φ стремится к $\varphi_{\max} = \pi/2 - \alpha_0$.

Таким образом, рассеяние внутренних волн на неоднородностях плотности приводит к перераспределению энергии между различными модами и может служить одним из механизмов передачи энергии по спектру. Можно видеть, что сделанные при анализе формулы (7) ограничения на вид неоднородности поля плотности, граничных условий и исходного поля внутренних волн могут быть ослаблены. В частности, вполне обозримыми представляются следующие задачи: рассеяние внутренних волн на непрерывно-неоднородных флуктуациях плотности, учет влияния границы раздела океан — атмосфера и наличия дна (изменение граничных условий), рассмотрение рассеяния совокупности внутренних волн с многомодовой структурой и т. д. На наш взгляд, более сложным является вопрос о необходимости учета эффектов многократного рассеяния. Сама по себе эта проблема в рамках системы (1) в принципе может быть решена. Однако динамическое состояние среды, возникающее вследствие многократного рассеяния внутренних волн, может уже не описываться системой уравнений (1), например, в связи с вырождением части волнового поля в турбулентность или по другим причинам. Поэтому при учете многократного рассеяния внутренних волн необходимо тщательно исследовать вопросы о соотношении отброшенных в исходной системе (1) членов и поправок к однократно рассеянному полю.

Поступила 8 II 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. **Филлипс О.** Динамика верхнего слоя океана. М.: Мир, 1969.
2. **Самодуров А. С.** Внутренние волны в среде с меняющейся по горизонтали частотой Брента — Вяйсяля.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1972, т. 206, № 5.
3. **Миропольский Ю. З.** Распространение внутренних волн в океане с горизонтальными неоднородностями поля плотности.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1974, т. 10, № 5.
4. **Иванов Ю. А., Морозов Е. Г.** Деформация внутренних гравитационных волн потоком с горизонтальным сдвигом скорости.— Океанология, 1974, т. 14, вып. 3.
5. **Воронович А. Г., Леонов А. И., Миропольский Ю. З.** К теории образования тонкой структуры гидрофизических полей в океане.— Океанология, 1976, т. 11, № 5.
6. **Стурова И. В., Сухарев В. А.** Генерация внутренних волн локальными возмущениями в жидкости с заданным изменением плотности по глубине.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1981, т. 17, № 6.
7. **Миропольский Ю. З.** Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1981.
8. **Пелиновский Е. Н.** Распространение волн в статистически неоднородном океане.— В кн.: Нелинейные волны. М.: Наука, 1979.
9. **Ле Блон П., Майсек Л.** Волны в океане. Ч. I, II. М.: Мир, 1981.
10. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. М.: Наука, 1974.
11. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
12. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.
13. **Романовский П. И.** Ряды Фурье. М.: Наука, 1973.
14. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики. М.: Наука, 1970.

УДК 538.4

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КЕЛЬВИНА — ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. М. Коровин

(Москва)

В работе [1] в результате анализа явления параметрической неустойчивости тангенциального разрыва в несжимаемой проводящей жидкости, возникающего под действием продольного магнитного поля, осциллирующего по времени около среднего значения $\langle \mathbf{H} \rangle \neq 0$, установлено, что переменное поле стабилизирует разрыв менее эффективно, нежели постоянное поле. В пренебрежении параметрическими эффектами в [2] исследовано влияние переменного поля (случай $\langle \mathbf{H} \rangle = 0$) на устойчивость поверхности раздела однородных потоков несмешивающихся проводящей и непроводящей жидкостей и получен качественно противоположный результат: ошибочно утверждается, что переменное поле всегда оказывает дестабилизирующее влияние. В данной работе показано, что длинноволновая часть спектра двумерных возмущений поверхности раздела проводящей и непроводящей жидкостей стабилизируется переменным полем, в то время как вызываемая самим полем неустойчивость имеет характер параметрического резонанса.

1. Пусть в декартовой системе координат $Oxyz$ с осью Oz, направленной против силы тяжести, плоскость $z = 0$ является невозмущенной поверхностью раздела между покоящейся проводящей жидкостью, заполняющей область $z > 0$, и более тяжелой непроводящей жидкостью, движущейся в области $z < 0$ с постоянной скоростью $\mathbf{u} = (u_x,\ u_y,\ 0)$. Исследуем влияние переменного магнитного поля, параллельного поверхности раздела, на механизм неустойчивости Кельвина — Гельмгольца. В невозмущенном состоянии распределения магнитного поля и давления имеют вид

$$\mathbf{H}_1^0 = \left[H \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right), 0, 0\right],\quad \mathbf{H}_2^0 = (H \cos \omega t, 0, 0),\quad p_2^0 = -\rho_2 g z,$$

$$p_1^0 = \frac{H^2}{16\pi}\left\{1 + \cos 2\omega t - \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right)\left[1 + \cos\left(\frac{2z}{\delta} - 2\omega t\right)\right]\right\} - \rho_1 g z,$$

где $\delta = (2\nu_m/\omega)^{1/2}$ — толщина скин-слоя, индекс 1 относится к области $z > 0$, а индекс 2 — к области $z < 0$.