УДК 532.5

ДВИЖЕНИЕ ТОНКОГО СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО СУХОЙ ПОВЕРХНОСТИ

С. М. Шугрин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Формулируется задача о движении тонкого слоя вязкой жидкости по сухой поверхности (без учета поверхностного натяжения). Приводятся примеры расчетов. Делается сравнение с решением по соответствующей одномерной модели, которая допускает точное решение. Анализируются особенности решения.

1. Уравнения. Уравнения тонкого слоя вязкой жидкости (длинноволновое приближение) без учета поверхностного натяжения имеют вид [1] (рис. 1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial z} + g\,\frac{\partial (h\cos\theta)}{\partial x} = \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + g\sin\theta; \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \tag{1.2}$$

где $u = u(t,x,z)$; $v = v(t,x,z)$; $h = h(t,x)$; $0 \leqslant z \leqslant h$; $0 \leqslant x \leqslant l(t)$; $x \sim l(t) \Rightarrow h \sim 0$.

Уравнения (1.1), (1.2) дополняются краевыми условиями [1]:
на твердой поверхности ($z = 0$)

$$u = v = 0; \tag{1.3}$$

на свободной поверхности ($z = h$)

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial h}{\partial t} + u\,\frac{\partial h}{\partial x} = v. \tag{1.4}$$

Модель (1.1)–(1.4) далее называется двумерной.

Условия и особенности в точке контакта свободной и твердой поверхностей обсуждаются ниже. При $x = 0$ задается $u = \varphi(t,z)$, при $t = 0$ $u = u_0(x,z)$, $h = h_0(x)$. Предполагается, что $u > 0$.

Распределение скорости u по z при задании начального и краевого условий берется по параболическому закону.

2. Одномерная модель. Прежде чем обсуждать особенности модели (1.1)–(1.4), полезно рассмотреть одномерную модель. Принимая, что распределение скорости при $z \geqslant 0$ соответствует параболическому закону, и интегрируя (1.1), (1.2) по z от $z = 0$ до $z = h$, придем к уравнениям [2–4]

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hU)}{\partial x} = 0; \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial (hU)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{6}{5}\,hUU + \frac{gh^2}{2}\cos\theta\Big) = gh\sin\theta - \frac{3\nu U}{h} \qquad \Big(U = \frac{q}{h}, \quad q = \int\limits_0^h u\,dz\Big). \tag{2.2}$$

Обратим внимание на наличие особенности в члене, описывающем трение: при $h \sim 0$ и $U \neq 0$ трение становится бесконечно большим. Эта особенность решающим образом определяет характер свободной поверхности вблизи точки контакта с твердой поверхностью.

Система (2.1), (2.2) допускает простое и полезное точное решение (ранее аналогичное решение было найдено в гидравлике [4]). Пусть

$$U = \text{const} > 0 = gH^2 \sin\theta/(3\nu), \qquad \theta > 0.$$

Введем безразмерные величины:

$$\tilde{x} \equiv \frac{x}{h}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{T}, \quad \tilde{h} \equiv \frac{h}{H}, \quad \tilde{U} \equiv \frac{U}{V}, \quad T = \frac{H}{V}, \quad V = gH^2 \frac{\sin\theta}{3\nu}, \quad \text{т. е.} \quad \tilde{U} = 1.$$

Полагая $\xi \equiv \tilde{x} - \tilde{t}$, имеем $h = h(\xi)$. В данном случае удобно также взять

$$\mathrm{Re} \equiv \frac{UH}{\nu} = \frac{gH^3}{3\nu^2} \sin\theta. \tag{2.3}$$

В итоге находим

$$-A\tilde{h} + \frac{A-1}{2} \ln(1+\tilde{h}) - \frac{1+A}{2} \ln(1-\tilde{h}) = -\frac{15}{\mathrm{Re}} (\xi - \xi_0) = -\frac{15}{\mathrm{Re}} (\tilde{x} - \tilde{x}_0) - \tilde{t}_0, \quad A \equiv \frac{15}{i\mathrm{Re}}. \tag{2.4}$$

3. Особенности и условия в точке контакта. Предполагая, что при $x < l(t)$ имеем $U(t, x) > 0$ (функция U гладкая), естественное краевое условие в точке контакта $x = l(t)$ запишем в виде

$$x \to l \Rightarrow h \to 0, \qquad \frac{dl}{dt} = \lim_{x \to l} U. \tag{3.1}$$

Из (2.4) следует, что при $\tilde{h} \sim 0$

$$\frac{d\tilde{h}}{d\tilde{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{|\tilde{l} - \tilde{x}|}}, \qquad \tilde{h} \sim \sqrt{|\tilde{l} - \tilde{x}|}. \tag{3.2}$$

Особенность (3.2) для (2.1), (2.2) носит общий характер. Действительно, пусть при $x < l$ функция U гладкая и $\lim\limits_{x \to l} U = \hat{U} > \alpha$ $(\alpha = \text{const} > 0)$. Согласно (3.1), $dl/dt = \hat{U} > 0$. Учитывая (2.1) и сохраняя в (2.2) главные члены при $h \sim 0$, имеем

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \hat{U} \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \qquad \frac{1}{5} \hat{U} \hat{U} h \frac{\partial h}{\partial t} \sim -3\nu \hat{U},$$

откуда

$$h \sim \sqrt{\frac{30\,\nu |l - x|}{\hat{U}}}, \qquad \frac{\partial h}{\partial t} \sim \sqrt{\frac{15\nu}{\hat{U}} \frac{1}{|l - x|}}. \tag{3.3}$$

Для двумерной модели (1.1)–(1.4) с помощью нестрогих соображений также была получена особенность типа (3.2). При этом существенно, что в окрестности точки контакта $U(x) > \alpha$ $(\alpha = \text{const} > 0)$. Поскольку рассуждения, приводящие к (3.2), весьма нестроги, предпочтительнее их опустить и рассматривать (3.2) как правдоподобную гипотезу, подтверждаемую вычислительным экспериментом (рис. 2 и пример 1).

По-видимому, при отсутствии поверхностного натяжения особенность (3.2) имеет место и для двумерных уравнений Навье — Стокса при условии, что в окрестности точки контакта $x = l(t)$ с твердой поверхностью выполнено условие

$$U(x) = \frac{1}{h} \int_0^h u\, dz > 0 \qquad (x < l) \tag{3.4}$$

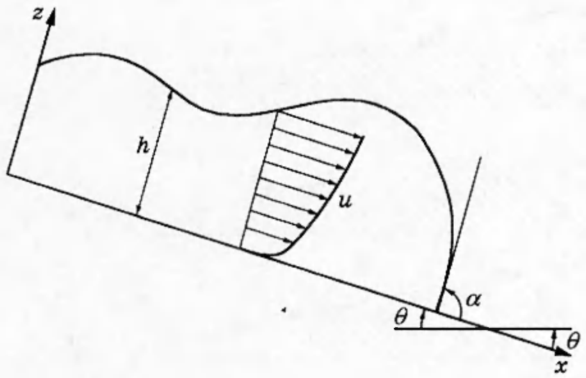

Рис. 1

Рис. 2

(граница движется вправо). Во всех этих случаях при отсутствии поверхностного натяжения и выполнении в окрестности точки контакта условия (3.4) естественное краевое условие аналогично (3.1), т. е. имеет вид

$$x \to l \Rightarrow h \to 0, \qquad \frac{dl}{dt} = \lim_{x \to l} U. \tag{3.5}$$

Если жидкость в среднем оттекает от точки контакта, т. е. в окрестности точки $x = l(t)$ выполнено условие, противоположное (3.4):

$$U(x) = \frac{1}{h}\int_0^h u\,dz \leqslant 0 \qquad (x < l), \tag{3.6}$$

то, вероятнее всего, точка контакта полностью приклеивается к твердой поверхности, т. е. (3.5) следует заменить условием

$$x \to l(t) \Rightarrow h \to 0, \qquad \frac{dl}{dt} = 0. \tag{3.7}$$

Итак, граничное условие в рассмотренных случаях при отсутствии поверхностного натяжения оказывается однотипным: если в окрестности точки контакта верно (3.4), то ставится условие (3.5), а если верно (3.6), то ставится (3.7).

Кроме того, если $\lim\limits_{x \to l} U > 0$ и в окрестности точки контакта функция $U(x,t)$ гладкая, то имеется особенность типа (3.2). Таким образом, угол α между свободной и твердой поверхностями равен $\pi/2$.

При численной реализации задачи условия (3.4)–(3.7) не очень удобны. Поэтому в расчетах делалось следующее: при $t = 0$ и $x \geqslant l(0)$ задавалось $h = \varepsilon > 0$, т. е. «наливался» слой жидкости весьма малой глубины ($\varepsilon > 0$), после чего использовалась техника сквозного счета (для двумерной модели — в сочетании с методом расщепления). Но здесь также возникают определенные вычислительные трудности, поскольку характерные размеры разностной сетки в области основного течения при $x < l$ и в области «налитой» жидкости при $x > l$ резко разнятся; трудности преодолевались с помощью неявных разностных схем, изложенных в [5].

Этот вычислительный прием «налитого» малого слоя по физическим соображениям представляется корректным при отсутствии поверхностного натяжения. Однако при наличии последнего его корректность вызывает серьезные сомнения.

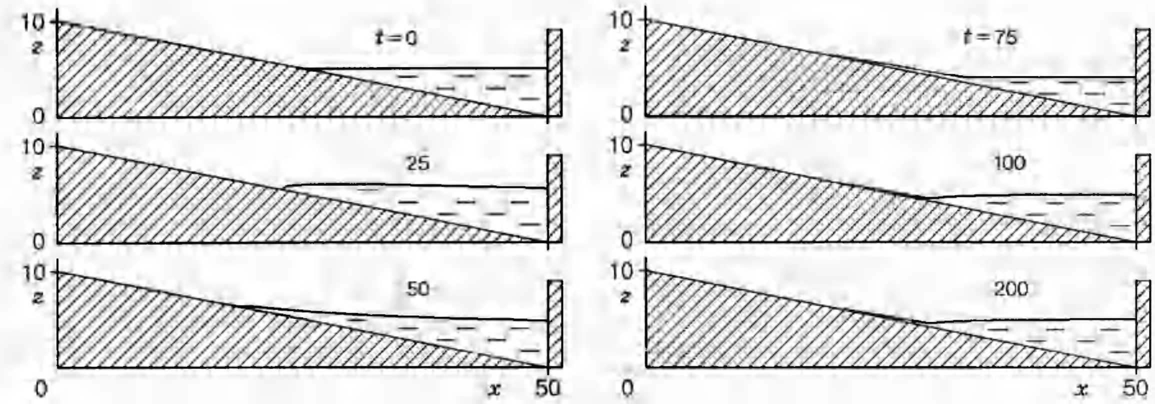

Рис. 3

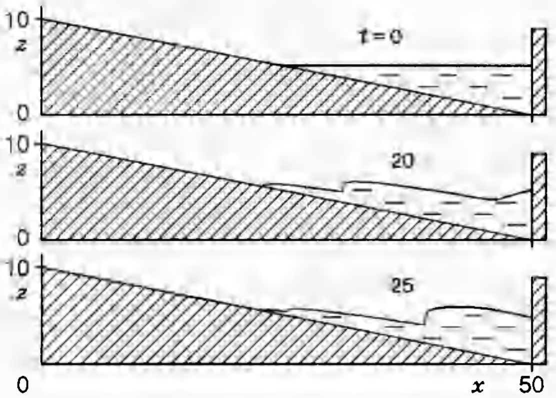

Рис. 4

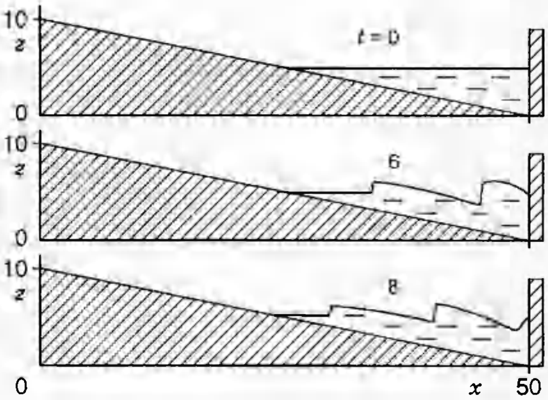

Рис. 5

Замечание. Из сказанного ясно, что введение поверхностного натяжения радикально меняет ситуацию. При точном учете поверхностного натяжения и сохранении условия прилипания (1.3) двумерная модель тонкого слоя (1.1), (1.2) при наличии контакта свободной и твердой поверхностей, как представляется, является физически и математически некорректной.

Для двумерных уравнений Навье — Стокса было доказано [6], что при $0 < \alpha < \pi$ (см. рис. 1) условия на свободной поверхности и условия прилипания несовместимы. Однако ситуации $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$, по-видимому, все же для полных уравнений Навье — Стокса физически возможны. Если $\alpha = 0$, то при $x \sim l$ жидкость катится по твердой поверхности, как колесо (это, в частности, означает в конечном счете существование особенности у вихря ω при $z \to 0$, $x \to l(t)$). При $\alpha = \pi$ точка контакта, вероятнее всего, приклеивается к твердой стенке, так что в этом случае $dl/dt = 0$ и $\lim\limits_{x \to l} u = 0$.

Из-за трудностей, связанных с совмещением условий прилипания и условий на свободной поверхности при учете поверхностного натяжения, в ряде работ условия прилипания так или иначе заменяются условиями проскальзывания, что математически регуляризирует задачу (см., например, [5, 6]). Однако физическая корректность этого приема не вполне ясна.

4. Примеры расчетов. Приведем примеры расчетов для двумерной модели (1.1)–(1.4).

Пример 1. *Сопоставление двумерной и одномерной моделей.* Для одномерной модели было построено точное решение (2.4), имеющее точки контакта свободной и твердой поверхностей с углом касания $\alpha = \pi/2$. Представляет интерес сопоставление этого решения с расчетом по двумерной модели. При $\tilde{t} = 0$ и $\tilde{x} \leqslant 100$ (в безразмерных переменных) начальный профиль $h(x)$ брался в соответствии с (2.4), при $\tilde{x} > 100$ $\tilde{h}_0 = \varepsilon = 0{,}001$, при этом $\mathrm{Re} = 10$ (см. (2.3)). Сопоставление решений при $\tilde{t} = 150$ приведено на рис. 2. Наблюдается хорошее совпадение всюду, за исключением фронта волны, хотя при этом время добегания по обеим моделям практически совпадает.

Расхождение на фронте, по-видимому, свидетельствует о некоторой неточности одномерной модели (2.1), (2.2), вероятно, из-за того, что постулат параболичности распределения скорости на фронте волны не вполне точен.

Пример 2. *Набегание волны на берег.* На рис. 3–5 приведены примеры расчета набегания волны на берег по двумерной модели. При $x = 50$ задавался следующий закон изменения отметки свободной поверхности: $\tilde{z} = \tilde{z}_0 + A \sin 2\pi\tilde{t}/T_0$. При большом периоде ($T_0 = 100$) волна мягко набегает на берег и мягко стекает (рис. 3). С уменьшением периода T_0 образуется последовательность прерывных волн (бурунов). На рис. 4 приведен пример расчета при $T_0 = 10$. Судя по проделанным расчетам, при дальнейшем уменьшении T_0 и/или росте амплитуды A количество бурунов увеличивается (рис. 5).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01546).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г.** Волновое течение пленок жидкости. Новосибирск: Наука, 1992.
2. **Шкадов В. Я.** Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 1. С. 43–51.
3. **Шкадов В. Я.** К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1968. № 2. С. 20–25.
4. **Пивоваров Ю. В.** Расчет течений вязкой несжимаемой жидкости, частично заполняющей вращающуюся полость // Проблемы вычислительной математики / А. Ф. Воеводин, В. В. Остапенко, С. М. Шугрин, Ю. В. Пивоваров. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1995. Гл. 5. С. 127–154.
5. **Пухначев В. В., Солонников В. А.** К вопросу о динамическом краевом угле // ПММ. 1982. Т. 46, вып. 6. С. 961–971.
6. **Пухначев В. В., Байокки К.** Задача с односторонними ограничениями для уравнений Навье — Стокса и проблема динамического краевого угла // ПМТФ. 1990. № 2. С. 27–40.

Поступила в редакцию 29/VII 1996 г.