

УДК 539.3

## КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ПАРАМЕТРОВ ШЕРОХОВАТОСТИ ПОВЕРХНОСТИ

А. С. Кравчук

Белорусская государственная политехническая академия, 220027 Минск

Решена задача об упругом контактном взаимодействии шероховатых диска и плоскости с круглым вырезом с учетом характеристик микрогеометрии их поверхностей. Это позволяет уточнить тенденцию влияния основных параметров задачи на напряженное состояние в исследуемом сопряжении. Сопоставление результатов анализа напряженного состояния в области контакта для различных сочетаний упругих характеристик взаимодействующих гладких тел и результатов известных исследований подтверждает высокую эффективность предлагаемого подхода.

Развитие техники ставит новые задачи в области исследования работоспособности машин и их элементов. Вместе с тем разработка новых расчетных моделей, совершенствование экспериментальных методов требуют пересмотра известных подходов и допущений при определении напряженного состояния деталей. Большое значение для инженерной практики имеет решение контактных задач теории упругости для тел с круговыми границами, когда характерный линейный размер области контакта соизмерим с радиусами кривизны соприкасающейся поверхности. Это решение составляет теоретическую основу расчета на прочность и жесткость таких элементов машин, как подшипники скольжения, шарнирные соединения, некоторые виды зубчатых передач, соединения с натягом [1].

Впервые уравнение контактной задачи для упругого шероховатого тела получено И. Я. Штаерманом [2] в предположении, согласно которому в упругом теле кроме перемещений, вызванных действием нормального давления и определяемых решением соответствующих задач теории упругости, возникают дополнительные нормальные перемещения, обусловленные чисто местными деформациями, зависящими от микроструктуры контактирующих поверхностей. В ряде работ предполагается, что дополнительные нормальные перемещения за счет деформации микровыступов контактирующих тел пропорциональны макронапряжению в некоторой степени. Данное предположение основано на приравнивании усредненных значений перемещений и напряжений в пределах базовой длины измерения шероховатости поверхности. Однако, несмотря на достаточно хорошо разработанный аппарат решения задач подобного класса с учетом влияния слоя повышенной податливости [1, 2], некоторые трудности методического характера не преодолены. Так, используемая гипотеза о степенной зависимости напряжений и перемещений поверхностного слоя с учетом реальных характеристик микрогеометрии верна при малых базовых длинах, т. е. высокой чистоте поверхности, а следовательно, при справедливости гипотезы о топографической гладкости на микроуровне [3]. Следует также отметить существенное усложнение уравнения при подобном подходе и невозможность описания с его помощью влияния волнистости. Полученная точность коэффициентов в интегральном уравнении после преобразования  $O(\varepsilon)$  гораздо ниже точности  $O(\varepsilon^2, 2\varepsilon/R)$ , предполагаемой в постановке задачи в работе [1] ( $\varepsilon = R - r$ ;  $R, r$  — радиусы цилиндрических деталей), что противоречит исходным предположкам и существенно снижает возможность анализа влияния параметра  $\varepsilon$  на распределение контактных напряжений.

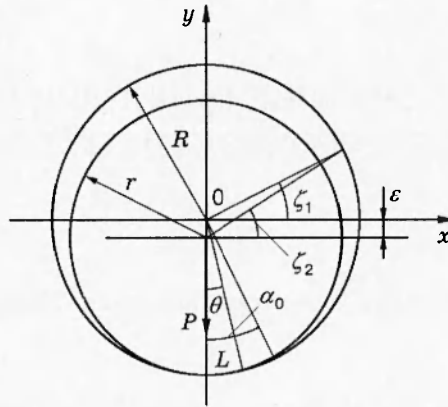


Рис. 1. Схема относительного положения контактирующих тел

Таким образом, необходима разработка единого подхода к рассмотрению контактного взаимодействия цилиндрических тел, наиболее полно учитывающего как геометрию взаимодействующих деталей, их относительное положение, микрогеометрию поверхности, так и возможность получения приближенного решения с наименьшим количеством независимых параметров, описывающего напряженное состояние в области контакта с достаточной для практики точностью [1, 3, 4].

Следуя [5, 6], предположим, что отклонения формы взаимодействующих деталей малы по сравнению с разностью их радиусов. Рассмотрим задачу о взаимодействии упругой изотропной пластины единичной толщины, имеющей круглый вырез радиуса  $R$ , с упругим диском радиуса  $r$ . Пусть  $\varepsilon^2$  и  $\varepsilon/R$  малы, в центре диска приложена сосредоточенная сила  $P$ , действующая вдоль оси  $y$  (рис. 1). Трение в области контакта  $L$  ( $-\alpha_0 \leq \theta \leq \alpha_0$ ,  $\alpha_0$  — полуугол контакта) отсутствует.

Введем переменные  $x_1 = R \cos \zeta_1$ ,  $y_1 = R \sin \zeta_1$ ,  $x_2 = r \cos \zeta_2$ ,  $y_2 = r \sin \zeta_2 - \varepsilon$ .

В области контакта  $L$  с принятой точностью  $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$  (см. [1] и рис. 1). С учетом малости перемещений по сравнению с геометрическими размерами тел выполняется условие  $(x_1 + u_1)^2 + (y_1 + v_1)^2 = (x_2 + u_2)^2 + (y_2 + v_2 - \delta)^2$ , где  $u_m, v_m$  — компоненты вектора перемещений для плоскости с цилиндрическим отверстием ( $m = 1$ ) и диска ( $m = 2$ );  $\delta$  — осадка центра диска. Пренебрегая малыми величинами более высокого порядка, получаем  $\varepsilon + u_1 \cos \zeta + v_1 \sin \zeta = u_2 \cos \zeta + (v_2 - \delta - \varepsilon) \sin \zeta$ .

Пусть  $u_m = u_m^* + u_m^{**}$ ,  $v_m = v_m^* + v_m^{**}$  ( $u_m^*, v_m^*, u_m^{**}, v_m^{**}$  — перемещения основного материала и поверхностного слоя соответственно).

Предположим, что упругие радиальные перемещения в области контакта, обусловленные деформацией микронеровности, постоянны и пропорциональны среднему контактному напряжению  $\sigma$  в некоторой степени  $k$ . Данный подход характерен для исследования плоских стыков, однако накопленный экспериментальный материал свидетельствует о возможности его применения и для цилиндрических деталей, имеющих близкие по величине радиусы [5, 6]. Учитывая принятые предположения, после элементарных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon - v - 2 \frac{\partial u_1^*}{\partial \zeta} \sin \zeta + 2 \frac{\partial v_1^*}{\partial \zeta} \cos \zeta + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \zeta^2} \cos \zeta + \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial \zeta^2} \sin \zeta = \\ = -2 \frac{\partial u_2^*}{\partial \zeta} \sin \zeta + 2 \frac{\partial v_2^*}{\partial \zeta} \cos \zeta + \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial \zeta^2} \cos \zeta + \frac{\partial^2 v_2^*}{\partial \zeta^2} \sin \zeta, \end{aligned}$$

где  $v$  — сближение взаимодействующих поверхностей, обусловленное деформацией микронеровностей в области контакта.

Кроме того, для основного материала имеем [7]

$$\frac{1}{E_m} \left( \frac{\partial v_{\zeta m}^*}{\partial \zeta} + v_{\zeta m}^* \right) = \frac{1}{E_m} (G_{1m} \sigma_{\zeta m} - \nu_m G_{2m} \sigma_r), \quad m = 1, 2.$$

Здесь  $R_1 = R$  и  $R_2 = r$ ;  $\nu_m$  — коэффициент Пуассона;  $E_m$  — модуль Юнга;  $\sigma_{\zeta m}$ ,  $\sigma_r$  — компоненты вектора нормальных напряжений;  $G_{1m} = (1 - \nu_m^2)$ ,  $G_{2m} = 1 + \nu_m$  для плоской деформации;  $G_{1m} = G_{2m} = 1$  для плоского напряженного состояния. Тогда на дуге контакта справедливо равенство

$$\begin{aligned} \varepsilon - v + \frac{R}{E_1} (G_{11} \sigma_{\zeta 1} - \nu_1 G_{21} \sigma_r) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial u_1^*}{\partial \zeta} \cos \zeta + \frac{\partial v_1^*}{\partial \zeta} \sin \zeta \right) = \\ = \frac{r}{E_2} (G_{12} \sigma_{\zeta 2} - \nu_2 G_{22} \sigma_r) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial u_2^*}{\partial \zeta} \cos \zeta + \frac{\partial v_2^*}{\partial \zeta} \sin \zeta \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Воспользуемся известными соотношениями [8]

$$\begin{aligned} \sigma_{\zeta m} + \sigma_r = 2[\Phi_m(w) + \overline{\Phi_m(w)}], \quad \sigma_{\zeta m} - \sigma_r + 2i\tau_{\zeta m} = 2e^{2i\zeta} [\bar{w}\Phi'(w) + \Psi(w)], \\ 2\mu_m(u_m^* + iv_m^*) = \alpha_m \varphi_m(w) - w\overline{\Phi_m(w)} - \overline{\psi_m(w)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $w = z$  ( $m = 1$ ) для плоскости и  $w = s$  ( $m = 2$ ) для диска;  $\mu_m$  — коэффициент Ламе;  $i = \sqrt{-1}$ ;  $\alpha_m = 3 - 4\nu_m$  для плоской деформации и  $\alpha_m = (3 - \nu_m)/(1 + \nu_m)$  для плоского напряженного состояния;  $\varphi'_m(w) = \Phi_m(w)$ ,  $\psi'_m(w) = \Psi_m(w)$ ,  $m = 1, 2$ .

Из (1), (2) следует

$$\begin{aligned} \varepsilon - v + \frac{R}{E_1} (2G_{11}[\Phi_1(t) + \overline{\Phi_1(t)}] - (G_{11} + \nu_1 G_{21})\sigma_r) + R \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\alpha_1 + 1}{4\mu_1} i[\Phi_1(t) - \overline{\Phi_1(t)}] \right) = \\ = \frac{r}{E_2} (2G_{12}[\Phi_2(h) + \overline{\Phi_2(h)}] - (G_{12} + \nu_2 G_{22})\sigma_r) + r \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\alpha_2 + 1}{4\mu_2} i[\Phi_2(h) - \overline{\Phi_2(h)}] \right), \end{aligned} \quad (3)$$

$$1/h = R/(rt).$$

Учитывая схему нагружения (см. рис. 1), отсутствие трения в области контакта и результаты [1], имеем

$$\Phi_1(z) = \frac{\alpha_1}{2\pi(1 + \alpha_1)} \frac{iP}{z} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\sigma_r(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad (4)$$

$$\Phi_2(s) = \frac{-iP}{2\pi(1 + \alpha_2)} \frac{1}{s} - \frac{iP}{2\pi(1 + \alpha_2)} \frac{s}{r^2} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\sigma_r(\xi) d\xi}{\xi - s} - \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{\sigma_r(\xi) d\xi}{\xi}, \quad \frac{1}{\xi} = \frac{R}{r\tau}.$$

Таким образом, из (3), (4) получаем интегродифференциальное уравнение относительно нормальных радиальных напряжений, все коэффициенты которого определены с заданной точностью:

$$\frac{t}{\pi i} \int_L \frac{\sigma'_r(\tau) d\tau}{\tau - t} = \gamma_1 \sigma_r(t) - \frac{iP}{\pi} \gamma_2 \left( \frac{1}{t} - \frac{t}{R^2} \right) - \gamma_3 \frac{P}{\pi} - \gamma_4 b - \gamma_5 (\varepsilon - v), \quad (5)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{(G_{12} - \nu_2 G_{22})E_1 Rr - (G_{11} - \nu_1 G_{21})E_2 R^2}{2(R^2 E_2 G_{11} + r^2 E_1 G_{12})}, \quad \gamma_2 = \frac{(1 + \nu_2)E_1 Rr + \alpha_1(1 + \nu_1)E_2 R^2}{4(R^2 E_2 G_{11} + r^2 E_1 G_{12})},$$

$$\gamma_3 = \frac{G_{12}\varepsilon R E_1}{2r(1 + \varepsilon_2)(R^2 E_2 G_{11} + r^2 E_1 G_{12})}, \quad \gamma_4 = \frac{G_{11} E_2}{R^2 E_2 G_{11} + r^2 E_1 G_{12}},$$

$$\gamma_5 = \frac{E_1 E_2 R}{2(R^2 E_2 G_{11} + r^2 E_1 G_{12})}, \quad b = -\frac{R^2}{2\pi i} \int_L \frac{\sigma_r}{\tau} d\tau; \quad v = C \left( \frac{P}{2\alpha_0 R} \right)^k; \quad t = R e^{i\zeta};$$

$C, k$  — постоянные, определяемые в зависимости от параметров шероховатого слоя  $R'$  (высоты сглаживания) и  $r'$  (расчетного радиуса кривизны выступов) [6, 9, 10].

Приближенное решение интегрального уравнения (5) можно представить в виде

$$\sigma_r(\theta) = -P \frac{\sqrt{2}}{R} \left[ \gamma_2 \frac{2}{\pi} + \frac{\gamma_1}{\alpha_0 - \cos \alpha_0 \sin \alpha_0} \right] \sqrt{\cos \theta - \cos \alpha_0} \cos(\theta/2) +$$

$$+ 2 \left[ P \left( \frac{\gamma_3}{\pi} - \frac{\gamma_1 \cos \alpha_0}{R(\alpha_0 - \cos \alpha_0 \sin \alpha_0)} \right) + \gamma_4 b + \gamma_5(\varepsilon - v) \right] \ln \left[ \frac{\sqrt{1 + \cos \theta} - \sqrt{\cos \theta - \cos \alpha_0}}{\sqrt{1 + \cos \alpha_0}} \right]. \quad (6)$$

Величины  $P$  и  $b$  вычисляются из уравнений

$$P = -2R \int_0^{\alpha_0} \sigma_r(\theta) \cos \theta d\theta, \quad b = -\frac{R^2}{\pi} \int_0^{\alpha_0} \sigma_r(\theta) d\theta.$$

При решении задачи контактного взаимодействия для гладких поверхностей (плоская деформация) установлено, что при  $\varepsilon \geq 0$  для различных сочетаний упругих постоянных взаимодействующих тел, соответствующих характеристикам изотропных материалов, применяемых в машиностроении, погрешность приближенного решения уравнения (5) в виде (6) не превосходит 4% от максимального контактного давления  $p_{\max}$  ( $p_{\max} = -\sigma_r(0)$ ), что является достаточной точностью при решении практических задач. При этом зависимости безразмерных параметров  $P/(\varepsilon E_1)$  и  $p_{\max} R/(\varepsilon E_1)$  ( $\varepsilon/R < 0,05$ ) от полуугла контакта (рис. 2) также хорошо согласуются с результатами приближенного решения поставленной задачи, полученного с использованием четырех точек коллокации [1].

Полученные решения для гладких тел могут быть приняты в качестве нулевого приближения при исследовании влияния шероховатости на распределение нормальных радиальных напряжений. Расчеты показывают, что в случае взаимодействия шероховатых тел [9] полуугол контакта несколько увеличивается по сравнению с полууглом для гладких деталей, а наибольшие контактные напряжения уменьшаются (рис. 2).

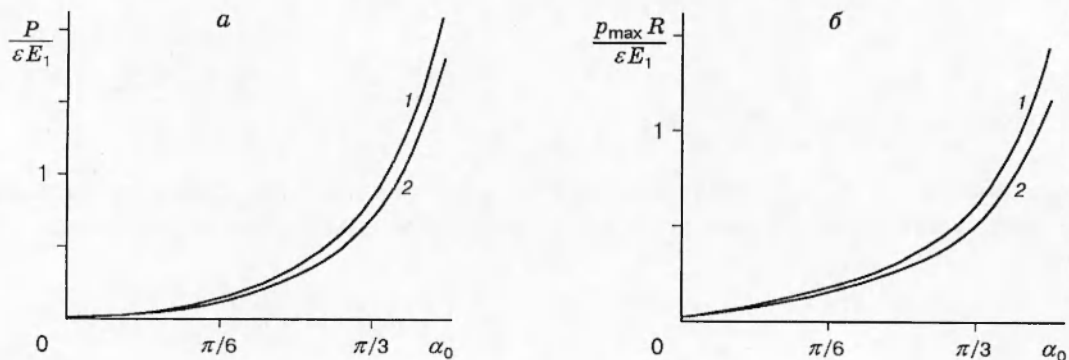


Рис. 2. Зависимость сжимающей силы (а) и максимального контактного давления (б) от полуугла контакта:

1 — гладкие поверхности, 2 — шероховатые ( $R' = 3,12$  мкм,  $r' = 8,0$  мкм)

Проведенные исследования позволяют учесть при выполнении проектных расчетов деталей не только геометрию взаимодействующих тел, их относительное положение, но и характеристики рельефа, предусмотренные ГОСТ 2789-73 «Шероховатость поверхности».

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Теплый М. И.** Контактные задачи для областей с круговыми границами. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1983.
2. **Штаерман И. Я.** Контактная задача теории упругости. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.
3. **Джонсон К.** Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989.
4. **Чернец М. В.** Про метод розрахунку ресурсу циліндричних систем ковзання // Доповіді НАН України. 1996. № 1. С. 47-50.
5. **Левина З. М., Решетов Д. Н.** Контактная жесткость машин. М.: Машиностроение, 1971.
6. **Рыжов Э. В., Суслов А. Г., Федоров В. П.** Технологическое обеспечение эксплуатационных свойств деталей машин. М.: Машиностроение, 1979.
7. **Прусов И. А.** Термоупругие анизотропные пластинки. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1978.
8. **Аннин Б. Д., Черепанов Г. П.** Упругопластическая задача. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983.
9. **Демкин Н. Б., Рыжов Э. В.** Качество поверхности и контакт деталей машин. М.: Машиностроение, 1981.
10. **Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комболов В. С.** Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977.

*Поступила в редакцию 30/І 1998 г.*

---