ПМТФ, № 2, 1967

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В ПЛАЗМЕ СО СТОЛКНОВЕНИЯМИ

Ю. Л. Климонтович, В. В. Логвинов

(Москва)

Уравнения квазилинейного приближения для плазмы со столкновениями рассматривались в работе одного из авторов [1] и в пространственно однородной плазме без магнитного поля в стационарном случае имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dp_i}\frac{k_i k_j}{k^2}\left\{\frac{1}{2}\frac{e_a^2|E|^2\nu_a}{(\omega-\mathbf{kv})^2+\nu_a^2}\frac{df_a}{dp_j}\right\}+S_a=0,\quad \varepsilon'=0,\quad \varepsilon''=0 \tag{0.1}$$

$$\varepsilon(\omega,\mathbf{k})=\varepsilon'+i\varepsilon''=1+\sum_a\frac{4\pi e_a^2 n_a}{\omega k^2}\int\frac{\mathbf{kv}}{\omega-\mathbf{kv}+i\nu_a}\left(\mathbf{k}\frac{df_a}{d\mathbf{p}}\right)d\mathbf{p} \tag{0.2}$$

Здесь — $\varepsilon(\omega, k)$ — диэлектрическая проницаемость плазмы для продольных волн ($\mathbf{k}\parallel\mathbf{E}$), $f_a(\mathbf{p})$ — функция распределения частиц сорта a, S_a — интеграл столкновений, который в кулоновской плазме без учета ее поляризации записывается в форме Ландау, и ν_a — обратное время релаксации за счет столкновений быстро меняющейся (пульсирующей) части функции распределения. В общем случае ν_a — функция скорости и в условиях, при которых были получены уравнения квазилинейного приближения, может быть выражена через функции распределения «фона». В слабонеравновесной плазме ν_a можно считать некоторой усредненной по импульсам эффективной частотой столкновений, определяющей для электронов известный вклад в мнимую часть диэлектрической проницаемости, при этом ν_a может быть вычислена [2, 3], если известны f_a.

Существенно, что уравнения (0.1) были получены для монохроматической продольной волны, и тем самым условие достаточно большой ширины волнового пакета, характерное для разработанной ранее квазилинейной теории, для них не является необходимым. Однако, как и в квазилинейной теории, предполагается, что амплитуда колебаний мала (чтобы можно было бы пренебречь нелинейным взаимодействием волн между собой), так что

$$e_a^2|E|^2/m_aT_a\omega^2\ll 1 \tag{0.3}$$

тогда как безразмерный параметр $e_a^2|E|^2/m_aT_a\nu_a^2$ может быть ~ 1 или даже $\gg 1$.

В настоящей работе в § 1 из уравнений баланса импульса и энергии получены выражения для скорости дрейфа электронов и разности температур электронов и ионов в двухкомпонентной плазме в заданном поле волны в предположении, что «фоновые» функции распределения электронов и ионов можно считать максвелловскими. Выражение для разности температур (1.14) обобщает известный результат работ Б. И. Давыдова, В. Л. Гинзбурга и А. В. Гуревича [4] о нагреве электронов в сильном электрическом поле на случай продольных волн.

В § 2 рассмотрены установившиеся высокочастотные ленгмюровские волны при наличии в плазме постоянного электронного пучка и определена их амплитуда.

В § 3 в одномерном случае на основе модельного интеграла столкновений вычислена стационарная функция распределения электронов, которая при слабой пространственной дисперсии мало отличается от максвелловской.

§ 1. Дрейф и нагрев электронов в электрическом поле волны. Рассмотрим в квазилинейном приближении уравнения баланса импульса и энергии частиц сорта a. Умножая первое уравнение (0.1) на $n\mathbf{p}_a$ и $^1/_2\, n_a p^2/m_a$ и интегрируя по импульсам, получаем соответственно для импульса и энергии

$$\frac{\mathbf{k}}{\omega}\frac{|E|^2}{8\pi}J_a(\omega,\mathbf{k}) = n_a\int \mathbf{p}S_a d\mathbf{p} \qquad (1.1)$$

$$\frac{|E|^2}{8\pi}J_a(\omega,\mathbf{k}) = n_a\int \frac{p^2}{2m_a}S_a d\mathbf{p} \qquad (1.2)$$

Здесь

$$J_a(\omega,\mathbf{k}) = \frac{4\pi e_a^2 n_a}{k^2}\int \frac{\nu_a \mathbf{kv}}{(\omega-\mathbf{kv})^2+\nu_a^2}\left(\mathbf{k}\frac{df_a}{d\mathbf{p}}\right)d\mathbf{p} \qquad (1.3)$$

характеризует изменение импульса и энергии компоненты a в результате взаимодействия частиц с волной.

При выводе (1.1) было использовано выражение для быстро меняющейся плотности тока компоненты a

$$\mathbf{j}_a^1 = -ie_a^2 n_a\int \frac{\mathbf{v}}{\omega-\mathbf{kv}+i\nu_a}\left(\mathbf{E}\frac{df_a}{d\mathbf{p}}\right)d\mathbf{p}$$

и соотношение

$$\langle \rho_a^1\mathbf{E}\rangle = \mathbf{k}\omega^{-1}\langle \mathbf{j}_a^1\mathbf{E}\rangle$$

связывающее в квазилинейном приближении $\mathbf{j}_a^1$ с быстро меняющейся плотностью заряда ρ_a^1. Угловые скобки обозначают усреднение по быстрым пульсациям [1].

Суммируя (1.1) и (1.2) по всем a, получаем соотношение

$$\sum_a \langle \rho_a^1\mathbf{E}\rangle = \frac{\mathbf{k}}{\omega}\sum_a \langle \mathbf{j}_a^1\mathbf{E}\rangle = 0$$

выражающее тот факт, что в стационарном состоянии работа электрического поля волны равна нулю, и эквивалентна третьему уравнению (0.1).

Будем предполагать, что в стационарном состоянии функции распределения всех компонент плазмы являются в нулевом приближении максвелловскими, но при этом каждая компонента может иметь свою температуру и направленную скорость

$$f_a = (\sqrt{\pi}v_a)^{-3}\exp\left\{-\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{u}_a)^2}{v_a^2}\right\}, \qquad v_a^2 = \frac{2T_a}{m_a} \qquad (1.4)$$

Вычислим интеграл (1.3). Направляя ось x вдоль $\mathbf{k}$, интегрируя по $\mathbf{p}_\perp$ и переходя к безразмерным переменным

$$x_a = \frac{\omega-ku_{ax}}{kv_a}, \quad y_a = \frac{\nu_a}{kv_a}, \quad \eta_a = \frac{u_{ax}}{v_a}, \quad \xi = \frac{v_x-u_{ax}}{v_a} \qquad (1.5)$$

получаем

$$J_a(\omega,\mathbf{k}) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\omega_a^2}{k^2v_a^2}\nu_a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi(\xi+\eta_a)e^{-\xi^2}}{(x_a-\xi)^2+y_a^2}d\xi \qquad (1.6)$$

где ω_a — ленгмюровская частота компоненты a. Последний интеграл, как легко показать, выражается через комплексный интеграл ошибок

$$w(z) = e^{-z^2}\left\{1+\frac{2i}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{t^2}dt\right\}, \qquad z = x+iy$$

[1] Заметим, что способ разделения на «фон» и пульсации, использованный при выводе (0.1), отличается от принятого в квазилинейной теории, где спектр пульсаций должен быть достаточно широким.

при этом уравнения баланса принимают следующий вид:

$$-\frac{\mathbf{k}}{\omega}\frac{|E|^2}{4\pi}\frac{\omega_a^2}{k^2 v_a^2}\nu_a\psi(z_a) = n_a\int \mathbf{p} S_a d\mathbf{p} \tag{1.7}$$

$$-\frac{|E|^2}{4\pi}\frac{\omega_a^2}{k^2 v_a^2}\nu_a\psi(z_a) = n_a\int \frac{p^2}{2m_a} S_a d\mathbf{p} \tag{1.8}$$

$$\psi(z_a) = 1 + \sqrt{\pi}\left\{\frac{x_a\eta_a + x_a^2 - y_a^2}{y_a}\operatorname{Re} w(z_a) - (\eta_a + 2x_a)\operatorname{Im} w(z_a)\right\} \tag{1.9}$$

Интегралы, входящие в правые части уравнений баланса, вычислялись различными авторами (см., например, [1, 3, 5]) и могут быть приведены к виду

$$n_a\int \mathbf{p} S_a d\mathbf{p} = -n_a m_a \sum_b \frac{\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b}{\tau_{ab}^{(u)}} \tag{1.10}$$

$$n_a\int \frac{p^2}{2m_a} S_a d\mathbf{p} = -n_a \sum_b \left\{\frac{3}{2}\frac{T_a - T_b}{\tau_{ab}^{(T)}} + m_a\frac{(u_a - u_b)(u_a v_b^2 + u_b v_a^2)}{\tau_{ab}^{(u)}(v_a^2 + v_b^2)}\right\} \tag{1.11}$$

где $\tau_{ab}^{(u)}$ и $\tau_{ab}^{(T)}$ — соответственно времена релаксации направленных скоростей и температур при столкновениях заряженных частиц сорта a с частицами сорта b.

Если пространственная дисперсия отсутствует ($k = 0$), направленные скорости электронов и ионов в двухкомпонентной плазме равны нулю, а для разности температур получаем выражение

$$T_e - T_i = \frac{e^2|E|^2\nu_e\tau_{ei}^{(T)}}{3m(\omega^2 + \nu_e^2)} \tag{1.12}$$

которое точно совпадает с известным соотношением для нагрева электронов в сильном электрическом поле, так как $\omega < \omega_e$ $\nu_e\tau_{ei}^{(T)} = {}^1/_2 M/m$ [3, 4].

Оставляя в асимптотическом разложении $\psi(z_a)$ при $|z_a| \gg 1$ первые члены по k, получаем из (1.7), (1.8), с учетом (1.10), (1.11), уравнения для направленной скорости и температуры электронов в случае слабой пространственной дисперсии

$$\mathbf{u}_e = \frac{\mathbf{k}}{\omega}\frac{e^2|E|^2\nu_e\tau_{ei}^{(u)}}{2m^2(\omega^2 + \nu_e^2)} \tag{1.13}$$

$$T_e = T_i + \frac{e^2|E|^2\nu_e\tau_{ei}^{(T)}}{3m(\omega^2 + \nu_e^2)}\left\{1 + \frac{3}{2}k^2 v_e^2\frac{3\omega^2 - \nu_e^2}{(\omega^2 + \nu_e^2)^2}\right\} \tag{1.14}$$

В последнем уравнении не учтена направленная скорость электронов, так как $\nu_e\tau_{ei}^{(u)} = 1$ [3] и, согласно (1.12), $u_e \ll v_e$. Полученные выражения, как нетрудно видеть, соответствуют высокочастотным ленгмюровским колебаниям, для которых $\omega \gg kv_e$.

§ 2. Установившиеся волны в плазме. Спектр и амплитуда установившихся продольных волн в плазме могут быть найдены из второго и третьего уравнений (0.1). Подставляя (1.4) в выражение для диэлектрической проницаемости (0.2), запишем ее через комплексный интеграл ошибок

$$\varepsilon'(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_a \frac{2\omega_a^2}{k^2 v_a^2}\varphi(z_a), \quad \varepsilon''(\omega, \mathbf{k}) = \sum_a \frac{2\omega_a^2\nu_a}{k^2 v_a^2\omega}\psi(z_a) \tag{2.1}$$

$$\varphi(z_a) = 1 - \sqrt{\pi}\left\{\left(y_a + \frac{x_a y_a}{x_a + \eta_a}\right)\operatorname{Re} w(z_a) + \left(x_a - \frac{y_a^2}{x_a + \eta_a}\right)\operatorname{Im} w(z_a)\right\} \tag{2.2}$$

Функция $\psi(z_a)$ и безразмерные переменные z_a и η_a имеют тот же смысл, что и в § 1 (см. (1.5), (1.9)).

Рассмотрим в качестве примера электронно-ионную плазму с постоянным электронным пучком, направленная скорость которого значительно превышает тепловую скорость электронов плазмы. Согласно линейной теории, в такой плазме возбуждаются нарастающие продольные высокочастотные ($\omega \approx \omega_e$) ленгмюровские волны, фазовая скорость которых близка к скорости пучка $\omega / k \approx u_0$, а инкремент для холодного пучка пропорционален $(n_0 / n_e)^{1/3}$. (В дальнейшем индексом 0 будем обозначать величины, относящиеся к пучку, считая его дополнительной компонентой плазмы.) Напишем дисперсионное уравнение для таких волн.

Используя асимптотическое разложение $w(z_a)$ при $|z_a| \gg 1$, т. е. предполагая, что

$$(\omega - \mathbf{ku}_a)^2 + \nu_a^2 \gg k^2 v_a^2$$

получаем из (2.1)

$$\varepsilon' = 1 - \sum_a \frac{\omega_a^2}{(\omega - \mathbf{ku}_a)^2 + \nu_a^2}\left\{1 - \frac{2\nu_a^2 \mathbf{ku}_a}{\omega\,[(\omega - \mathbf{ku}_a)^2 + \nu_a^2]}\right\} = 0 \qquad (2.3)$$

$$\varepsilon'' = \sum_a \frac{\nu_a \omega_a^2}{\omega\,[(\omega - \mathbf{ku}_a)^2 + \nu_a^2]}\left\{1 + \frac{2\mathbf{ku}_a\,(\omega - \mathbf{ku}_a)}{(\omega - \mathbf{ku}_a)^2 + \nu_a^2}\right\} = 0 \qquad (2.4)$$

Переходя к бесстолкновительной плазме (ν_e, $\nu_0 \to 0$, $u_e \to 0$), из (2.3) получаем известное дисперсионное уравнение для высокочастотных ленгмюровских волн, возбуждаемых быстрым моноэнергетическим электронным пучком

$$1 - \omega_e^2/\omega^2 - \omega_0^2/(\omega - \mathbf{ku}_0)^2 = 0 \qquad (2.5)$$

Влияние ионов в этом случае можно не учитывать.

В линейной теории $\omega = \mathbf{ku}_0 - \gamma$, где γ — малая величина, пропорциональная инкременту. Поэтому естественно предположить, что $(\omega - \mathbf{ku}_0)^2 \gg \nu_0^2$, так как для достижения квазилинейного режима необходимо, чтобы инкремент линейной теории превышал декремент затухания колебаний, пропорциональный ν_0. С учетом этого обстоятельства и предполагая также, что

$$(\omega - \mathbf{ku}_e)^2 \gg \nu_e^2, \qquad \omega^2 \gg (\mathbf{ku}_e)^2$$

запишем (2.4) в виде

$$\frac{\nu_e \omega_e^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{2\mathbf{ku}_e}{\omega}\right) + \frac{2\nu_0 \mathbf{ku}_0 \omega_0^2}{(\omega - \mathbf{ku}_0)^3} = 0 \qquad (2.6)$$

Уравнение (2.3) при этих условиях переходит в (2.5).

Решим полученную систему последовательными приближениями. Будем считать, что

$$\omega - \mathbf{ku}_0 = \omega_e \gamma, \quad \gamma \ll 1 \qquad (2.7)$$

Подставляя (2.7) и (2.5) в (2.6) и пренебрегая вначале членами $\gamma^{-2} n_0 / n_e$ и $2\mathbf{ku}_e / \omega$ по сравнению с единицей, получаем

$$\gamma = -(\varkappa n_0 / n_e)^{1/3}, \qquad \varkappa = 2\nu_0/\nu_e$$

В следующем приближении для нахождения u_e учитываем в (2.5), (2.6) малые члены. Используя далее уравнение баланса импульса для электронов плазмы, находим выражение для энергии поля

$$|E|^2/8\pi = {}^1/_2 m u_0^2 n_0 \gamma^{-2} (\varkappa + {}^1/_2) \qquad (2.8)$$

из которого следует, что энергия поля значительно превышает кинетическую энергию пучка. Этот вывод качественно согласуется с результатом, полученным в работе [6] для максимальной энергии колебаний, где рассматривалась инжекция моноэнергетического пучка в полубесконечную плазму. Вместе с тем, энергия поля (2.8) остается значительно меньше тепловой энергии электронов плазмы в соответствии с существованием малого параметра квазилинейной теории (0.3).

Аналогичным образом можно исследовать в квазилинейном приближении и низкочастотные колебания, возбуждаемые медленным пучком.

§ 3. Функция распределения. Стационарная функция распределения при наличии в плазме продольных волн отличается от максвелловской и должна быть определена из первого уравнения (0.1), которое в общем случае является интегродифференциальным уравнением для f_a, причем функции распределения других компонент, входящие в S_a и ν_a, в свою очередь, требуют определения. Ввиду этого полное решение указанной системы уравнений даже для двухкомпонентной плазмы представляется весьма затруднительным. Задача может быть существенно упрощена при использовании модельного интеграла столкновений.

Вычислим электронную функцию распределения в одномерном случае, полагая, что продольная волна в плазме искажает f_e только в направлении своего распространения вдоль **k**. Для кулоновских столкновений выражение, моделирующее S_e, удобно взять в форме Фоккера — Планка

$$S_{ei} = \frac{3}{2}\frac{1}{\tau_{ei}^{(T)}}\frac{d}{dv}\left\{\frac{T_i}{m}\frac{df_e}{dv} + vf_e\right\} \tag{3.1}$$

где T_i — температура ионов, а величина $\tau_{ei}{}^{(T)}$ определяет время релаксации температур электронов и ионов.

Взятый в виде (3.1) интеграл S_e учитывает только электронно-ионные столкновения, так как член, соответствующий электрон-электронным столкновениям, нелинейный. Как показал В. Л. Гинзбург [7], учет межэлектронных столкновений необходим лишь для низких частот, когда $\omega^2 \ll \nu_*{}^2$, где ν_* — некоторая эффективная частота столкновений, определяющая их вклад в проводимость. Для учета столкновений электронов с молекулами в слабоионизованной плазме можно воспользоваться модельным интегралом столкновений в форме Батнагара — Гросса — Крука, однако при этом дифференциальное уравнение для f_e получается более сложным.

Фоккер-планковская форма интеграла столкновений (3.1) обеспечивает выполнение законов сохранения числа частиц, полных импульса и энергии плазмы, и, кроме того, в состоянии равновесия, когда f_e — максвелловская и $T_e = T_i$, $S_{ei} = 0$.

Снимая одно дифференцирование, получаем из (0.1) с использованием (3.1) уравнение для определения f_e

$$\left\{1 + \frac{\delta^2}{(\omega - kv)^2 + \nu_e{}^2}\right\}\frac{df_e}{dv} + \frac{mv}{T_i}f_e = 0 \tag{3.2}$$

Величину

$$\delta = \left(\frac{e^2\,|\,E\,|^2\,\nu_e\tau_{ei}^{(T)}}{3mT_i}\right)^{1/2} \tag{3.3}$$

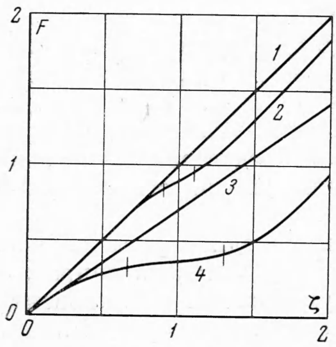
имеющую размерность частоты, можно рассматривать как эффективную частоту «столкновений» электронов с волной.

Решение линейного однородного уравнения (3.2) получить несложно. Вводя обозначения $v_* = (\omega + i\alpha)\,/\,k$, $\alpha^2 = \delta^2 + \nu_e{}^2$, можно записать его в виде

$$f_e = C \exp\left\{-\frac{mv^2}{2T_i} + \frac{m\delta^2}{T_i\alpha k} \operatorname{Im}\left[v_* \ln\left(1 - \frac{v}{v_*}\right)\right]\right\} \qquad (3.4)$$

где C — постоянная интегрирования.

Первый член в показателе экспоненты соответствует максвелловскому распределению с температурой, равной температуре ионов, а второй —определяет поправку, зависящую от амплитуды поля волны. Из (3.4) видно, что полевая поправка максимальна в интервале скоростей вблизи фазовой скорости волны ω / k. При полном пренебрежении пространственной дисперсией, разлагая логарифм в показателе экспоненты в ряд по обратным степеням v_*, можно привести (3.4) к виду



$$f_e = C \exp\left\{-\frac{mv^2}{2T_i\,(1 + \delta^2 / (\omega^2 + \nu_e^2))}\right\} \qquad (3.5)$$

Таким образом, при $k = 0$ функция распределения электронов — точно максвелловская, но с увеличенной температурой, которая, как нетрудно показать, учитывая (3.3), определяется выражением (1.12).

На фигуре 1 показаны графики электронной функции распределения в квазилинейном приближении, вычисленные по формулам (3.4) и (3.5). По оси абсцисс отложена безразмерная скорость $\zeta = kv / \omega$, по оси ординат — безразмерная функция $F(\zeta)$, которая равна квадратному корню из показателя экспоненты, деленного на величину $m\omega^2 / 2T_ik^2$. Две пары кривых *1*—*2* и *3*—*4* вычислены для различных значений параметра δ/ω, характеризующего относительную энергию поля волны, так что кривые *1* и *2* соответствуют значению $\delta / \omega = 0{,}1$, а кривые *3* и *4* — $\delta/\omega = 1$. Кроме того при расчете было принято $\delta^2 \gg \nu_e^2$.

Кривые *1* и *3* соответствуют максвелловским распределениям с увеличенной температурой (формула (3.5)). Они представляют собой прямые линии. Кривые *2* и *4* показывают наличие «плато» на функции распределения в интервале скоростей вблизи фазовой скорости волны (формула (3.4)). Из фигуры видно, что ширина плато возрастает с увеличением амплитуды поля волны. Разлагая показатель экспоненты в (3.4) в ряд по степеням $(v - \omega / k)$ и удерживая члены не выше второго порядка, можно показать, что в районе плато функция распределения также близка к максвелловской, но уже с другой эффективной температурой

$$T_* = T_i (1 + \delta^2 / \nu_e^2)$$

В плазме без столкновений ($\nu_e \to 0$, $T_* \to \infty$) плато становится строго горизонтальным.

Поступила 5 VII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Климонтович Ю. Л. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. Изд. МГУ, 1964 (См. также Дополнение к англ. изданию).
2. Силин В. П. О высокочастотной диэлектрической проницаемости плазмы. Ж. эксперим. и теор. физ., 1961, т. 41, стр. 861.
3. Логвинов В. В. О релаксации в кулоновской квазиравновесной плазме. Вестн. Моск. ун-та, 1967, № 1.
4. Гинзбург В. Л., Гуревич А. В. Нелинейные явления в плазме, находящейся в переменном электромагнитном поле. Успехи физ. наук, 1960, т. 70, № 2.
5. Сивухин Д. В. Кулоновские столкновения в полностью ионизованной плазме. Сб. «Вопросы теории плазмы», Атомиздат, 1964, вып. 4.
6. Файнберг Я. Б., Шапиро В. Д. Квазилинейная теория возбуждения колебаний при инжекции электронного пучка в плазменное полупространство. Ж. эксперим. и теор. физ., 1964, т. 47, стр. 1389.
7. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. Физматгиз, 1960.