

девиатора напряжений. При этом приращения напряжений до корректировки вычисляются по уравнениям (1.11), (1.16).

Используя (1.12), (1.13), (1.15), (2.6), можно для среды с условием (2.3) сформулировать уравнения идеального упругопластического деформирования с более общим, чем в (2.6)—(2.8), законом упругого деформирования.

Поступила 1 II 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К., Роменский Е. И. Нестационарные уравнения нелинейной теории упругости в эйлеровых координатах. — ПМТФ, 1972, № 6.
2. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов. — ПММ, 1960, № 6.
3. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964.
4. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений. — В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике. М., «Мир», 1967.
5. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
6. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969.

УДК 532.5 : 532.135

### НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЕ ИЗ ДИССИПАТИВНОГО КАУЧУКОПОДОБНОГО МАТЕРИАЛА

А. И. Леонов

(Москва)

В [1] рассматривались в изотермическом приближении волны, распространяющиеся в упруговязком стержне, а также было приведено численное решение задачи об ударе стержня конечной длины о жесткую преграду. При наличии сильных геометрических и физических нелинейностей в определяющих уравнениях в стержнях могут распространяться волны очень большой интенсивности, где существенны эффекты неизотермичности при распространении волн. Исследованию этих вопросов посвящена данная работа.

**1. Основные уравнения.** При изучении движения стержней будем использовать, как и в [1], осредненное по сечению описание. Материал стержня предполагаем несжимаемым с плотностью  $\rho_0$ .

Уравнения баланса массы, импульса и энергии в «стержневом приближении» имеют вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(fv) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}(fv) + \frac{\partial}{\partial x}(fv^2 - \rho_0^{-1}f\sigma) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\rho_0 f(U + v^2/2)\} + \frac{\partial}{\partial x}\{\rho_0 fv(U + v^2/2)\} = \frac{\partial}{\partial x}(fv\sigma - q) + \alpha \sqrt{f}(T - T_0),$$

где  $f$  — площадь поперечного сечения стержня;  $v$  — средняя по сечению скорость;  $\sigma$  — среднее по сечению нормальное напряжение (определенное, как и в однородном случае, с использованием условия обращения в нуль напряжений на свободной поверхности стержня);  $U$  — удельная внутренняя энергия;  $q$  — продольный тепловой поток;  $T$  — средняя по сечению

стержня температура;  $T_0$  — температура окружающей среды;  $\alpha > 0$  — коэффициент бокового теплообмена;  $x$  — продольная координата;  $t$  — время.

Для замыкания системы (1.1) необходимо сформулировать уравнения, описывающие термодинамическое и реологическое поведение среды.

Пусть стержень состоит из диссипативного каучукоподобного материала типа сырого (неспиготого) каучука или расплава полимера. В этом случае можно предположить, что его локально-равновесное термодинамическое состояние подобно состоянию спиготого каучука. Будем использовать понятие об «идеальном» несжимаемом каучуке [2, 3], для которого в рассматриваемом приближении удельные термодинамические потенциалы (внутренняя энергия  $U$ , энтропия  $S$  и свободная энергия  $F$ ) определяются выражениями

$$U = U_0 + c_\lambda(T - T_0), \quad S = S_0 - (\mu'/\rho_0)\psi(\lambda) + c_\lambda \ln(T/T_0), \quad (1.2)$$

$$F = F_0 + (c_\lambda - S_0)(T - T_0) - c_\lambda T \ln(T/T_0) + (\mu' T/\rho_0)\psi(\lambda),$$

где  $\lambda$  — «равновесный» термодинамический параметр, определяющий собой упругую (высокоэластическую) деформацию в стержне. В случае однородного одноосного деформирования величина  $\lambda$  представляет собой отношение длины образца в данный момент времени к его длине после мгновенной разгрузки. Отсюда следует, что при сжатии  $0 < \lambda < 1$ , при растяжении  $\lambda > 1$ . В (1.2)  $\mu'$  — постоянная, причем  $\mu' T \sim E$ , где  $E$  — модуль Юнга;  $c_\lambda$  — удельная теплоемкость при  $\lambda = \text{const}$ , которую в достаточно широком интервале температур можно считать постоянной.

Безразмерная функция  $\psi(\lambda)$  в (1.2) — некоторый упругий потенциал. В случае потенциала сеточной теории высокоэластичности [2]

$$(1.3) \quad \psi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3, \quad \mu' = (1/2)\rho_0 Nk,$$

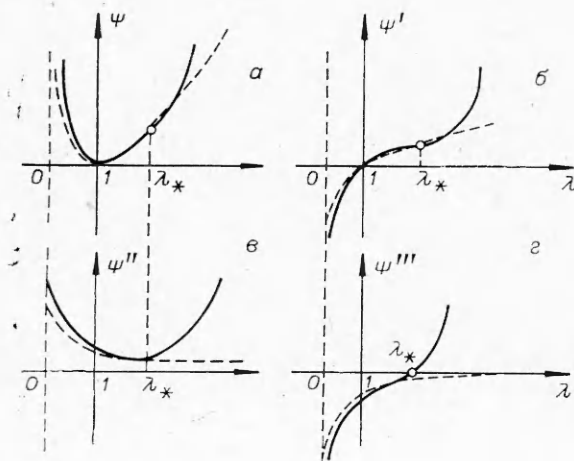
где  $N$  — число эффективных молекулярных цепей в сетке на единицу объема;  $k$  — постоянная Больцмана.

Потенциал (1.3) достаточно хорошо описывает механические свойства каучуков при не очень больших удлинениях  $\lambda < 2-3$ . При весьма больших  $\lambda$  можно использовать эмпирический потенциал [4], хорошо описывающий механические свойства каучуков при больших деформациях

$$(1.4) \quad \psi(\lambda) = (2/n)(\lambda^n + 2\lambda^{-n/2} - 3) + (b/n^m) \times (\lambda^n + 2\lambda^{-n/2} - 3)^m,$$

где  $n$ ,  $b$  и  $m$  — положительные эмпирические постоянные.

Качественные зависимости потенциала  $\psi(\lambda)$  и его первых трех производных, согласно формулам (1.3) и (1.4) (штриховые и сплошные линии соответственно), представлены на фиг. 1, от-



Фиг. 1

куда видно, что при  $\lambda \leq \lambda_*$ , где  $\lambda_*$  — точка перегиба  $\psi'(\lambda)$  для потенциала (1.4), классический потенциал качественно правильно описывает данные опыта.

Исследование простейших уравнений вязкоупругих сред при наличии произвольных конечных упругих деформаций было проведено методами неравновесной термодинамики в работах [5, 6]. В случае одноосного растяжения — сжатия эти уравнения, учитывающие специфику полимерных уруговязких сред, имеют вид

$$(1.5) \quad \sigma = \sigma_0(\lambda, T) + \xi(\lambda, T) \frac{\partial v}{\partial x}, \quad q = -\kappa(\lambda, T) \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\kappa > 0);$$

$$(1.6) \quad \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial t} + v \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) + \frac{\varphi(\lambda)}{6\theta_0(T)} - \frac{\partial v}{\partial x},$$

где  $\sigma_0(\lambda, T)$  — «равновесное» напряжение;  $\xi(\lambda, T)$  — «кельвиновская» вязкость, резко возрастающая с ростом  $\lambda$  (или  $\lambda^{-1}$ ) и резко убывающая с ростом  $T$ ;  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности. Второе выражение в (1.6) представляет собой «кинематическое соотношение», где  $\varphi(\lambda)/(6\theta_0(T))$  — скорость необратимых деформаций. При этом, как следует из [5, 6],

$$(1.7) \quad \sigma_0(\lambda, T) = \rho_0 \lambda \left. \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right|_T = \mu' T \lambda \psi'(\lambda),$$

$$\varphi(\lambda) = -\beta^{-1} \lambda \frac{d}{d\lambda} \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} [\psi(\lambda) + \psi(\lambda^{-1})] \right\},$$

$$\theta_0(T) = \theta' \exp(\Delta E/RT),$$

где  $\theta_0(T)$  — характерное время релаксации;  $\Delta E$  — энергия активации;  $R$  — газовая постоянная;  $\theta'$  — константа; величина  $\beta$  ( $0 < \beta < 1$ ) — численный параметр, учитывающий гибкость полимерных цепей.

При исследовании волн большой интенсивности будем опускать в определяющих уравнениях (1.5), (1.6) и в уравнении энергии (1.1) вязкое слагаемое в напряжении  $\xi \partial v / \partial x$  и описывающий продольную теплопроводность член  $q = -\kappa \partial T / \partial x$ , так как вне достаточно узких зон эти величины малы, а зоны, где эти величины весьма велики, будем так же, как и в [1], заменять поверхностями сильного и слабого разрывов.

Таким образом, в дальнейшем в (1.1), (1.5) будем полагать

$$(1.8) \quad \sigma = \sigma_0(\lambda, T), \quad \xi(\lambda, T) \equiv 0, \quad q \equiv 0,$$

что соответствует нелинейным реологическим уравнениям Максвелла, использовавшимся в изотермическом случае в [1].

Из (1.1) можно получить уравнение для баланса удельной внутренней энергии  $U$ , которое с учетом выражения для  $U$  из (1.2) имеет вид баланса температуры

$$(1.9) \quad \rho_0 c_\lambda \{ \partial(fT) / \partial x + \partial(fvT) / \partial x \} = \sigma f \partial v / \partial x - \alpha \sqrt{f}(T - T_0).$$

Первый член в правой части (1.9) представляет собой мощность напряжений на полной скорости деформации и, вообще говоря, не является положительно определенным.

Если использовать наряду с (1.6) известную формулу ( $c_\sigma$  — теплоемкость при постоянном напряжении)

$$(1.10) \quad c_\sigma = c_\lambda - \frac{\sigma}{\rho_0 \lambda} \left. \frac{\partial \lambda}{\partial T} \right|_\sigma,$$

то можно получить выражение для баланса энтропии, которое (за исключением сечений с сильными разрывами) можно также представить в виде баланса температуры

$$(1.11) \quad \rho_0 c_\sigma(\lambda) \{ \partial(fT)/\partial t + \partial(fvT)/\partial x \} = \sigma f \varphi(\lambda) / 6\theta_0(T) - \alpha \sqrt{f}(T - T_0).$$

При этом из (1.10) с учетом (1.7), (1.8) получим

$$c_\sigma/c_\lambda = 1 + \gamma \lambda \psi'^2 / (\lambda \psi')' \quad (\gamma = \mu' / \rho_0 c_\lambda).$$

Первый член в правой части (1.11) представляет собой диссипацию и положительно определен. Для рассматриваемых полимерных материалов величина  $\gamma$  весьма мала ( $\gamma \sim 10^{-2}$ ).

Заметим также, что формулу (1.6) можно записать в «дивергентном» виде

$$(1.12) \quad \frac{\partial \lambda^{-1}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v \lambda^{-1}) = \frac{\varphi(\lambda)}{6\theta_0(T)\lambda}.$$

Формулы настоящего и последующего пунктов при  $\theta_0 \rightarrow \infty$  ( $\beta \rightarrow \infty$ ) описывают движение несжимаемого идеально упругого каучука в стержневом приближении.

**2. Слабые разрывы при распространении волн в упруговязком стержне.** Для замкнутой системы уравнений (1.1), (1.2), (1.7) и (1.12) с учетом (1.8) характеристические корни имеют вид

$$(2.1) \quad \alpha_{1,2} = v \pm u_S, \quad \alpha_3 = v, \\ u_S^2 = u_T^2 + \frac{\sigma^2}{\rho_0 c_\lambda T}, \quad u_T^2 = \rho_0^{-1} \lambda^2 \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\sigma}{\lambda} \right) \right|_T,$$

где  $u_S$  и  $u_T$  — соответственно адиабатическая и изотермическая скорости звука в деформированном материале. При этом  $u_S > u_T$ , если  $\lambda \neq 1$ , и  $u_S = u_T = u_0(T)$  при  $\lambda = 1$ , т. е. в недеформированном стержне. Здесь

$$(2.2) \quad u_0^2(T) = \rho_0^{-1} E(T), \quad E(T) = 3n \mu' T.$$

Как следует из (1.7),  $\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\sigma}{\lambda} \right) \right|_T = \mu' T \psi''(\lambda) > 0$ ; это неравенство вытекает из условия термодинамической устойчивости для потенциала  $F$  и обеспечивает гиперболичность рассматриваемой системы уравнений.

Из (1.7), (2.1) и (2.2) имеем

$$(2.3) \quad \frac{u_T^2}{u_0^2} = \frac{\lambda^2}{3n} \psi''(\lambda), \quad \frac{u_S^2}{u_0^2} = \frac{\lambda^2}{3n} \{ \psi'' + \gamma \psi'^2 \}, \quad \gamma = \frac{\mu'}{\rho_0 c_\lambda}.$$

Характеристические корни  $\alpha_k$  для гиперболической системы совпадают со скоростями распространения слабого разрыва  $x_*(t)$ . Используя дополнительно к рассматриваемой системе уравнений кинематические условия совместности, можно получить уравнение, связывающее между собой динамические величины на слабом разрыве  $x_*$   $t$ :

$$(2.4) \quad f_*(v_* - x_*') \frac{dv_*}{dt} + \frac{1}{\rho_0 T_*'} \frac{d}{dt} (f_* \sigma_* T_*) + \frac{f_* \lambda_* \varphi(\lambda_*)}{6\rho_0 \theta_0(T_*)} \left. \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_*, T_*} + \\ + \frac{\alpha \sqrt{f_*} \sigma_* (T_* - T_0)}{\rho_0^2 c_\lambda T_*} = 0,$$

где  $\dot{f}_* = f(x_*(t), t)$ ; аналогично определены и другие величины. В изотермическом приближении, когда  $T_* = T_0 = \text{const}$ , из (2.4) следует [1]

$$f_*(v_* - x'_*) \frac{dv_*}{dt} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d(f_* \sigma_*)}{dt} + \frac{f_* \lambda_* \varphi(\lambda_*) d\sigma_*}{6\rho_0 \theta_0 d\lambda_*} = 0.$$

**3. Ударные волны в упруговязком стержне.** В системе уравнений (1.1), (1.2), (1.7) и (1.12) с учетом (1.8), как уже отмечалось для изотермического приближения в [1], могут существовать сильные разрывы (эта система напоминает уравнения газовой динамики, где роль плотности играет площадь сечения  $f$ ). При этом структура ударной волны, помимо отмеченной в [1] зоны неоднородности напряжений в переходном сечении, определяется также явлениями продольной теплопроводности и наличием вязкой составляющей напряжения в (1.5).

Пусть  $x_0(t)$  — линия сильного разрыва в плоскости  $x, t$ . Выберем направление оси  $x$  так, чтобы  $x'_0 > 0$ . Индексом 1 будем отмечать все величины перед ударной волной ( $x = x_0 - 0$ ), а индексом 2 — за ударной волной ( $x = x_0 + 0$ ). Условия на скачках для указанной системы уравнений имеют вид

$$(3.1) \quad [f(v - x'_0)] = 0, \quad \rho_0 [f(v - x'_0)^2] = [\sigma f], \\ [\lambda^{-1}(v - x'_0)] = 0, \quad \rho_0 \left[ f(v - x'_0) \left( U + \frac{v^2}{2} \right) \right] = [fv\sigma],$$

где приняты стандартные обозначения для скачка  $[y] = y_2 - y_1$ .

Первое равенство в (3.1) соответствует сохранению потока массы при переходе через ударную волну, второе — сохранению потока импульса, третье — сохранению потока упругой деформации, четвертое — сохранению потока энергии.

Заметим, что в рассматриваемой неподвижной системе координат поток массы  $j < 0$ . Так как  $f_i > 0$ , то отсюда следует

$$(3.2) \quad j f_i^{-1} = v_i - x'_0 < 0 \quad (i = 1, 2).$$

Из (3.1) можно получить следующие соотношения:

$$(3.3) \quad f_1 \lambda_1 = f_2 \lambda_2;$$

$$(3.4) \quad (x'_0 - v_i)^2 = \frac{\lambda_i^2}{\rho_0} \frac{[\sigma/\lambda]}{[\lambda]} \quad (i = 1, 2);$$

$$(3.5) \quad \rho_0 [U] = \rho_0 c_\lambda [T] = (1/2) [\lambda] (\sigma_1/\lambda_1 + \sigma_2/\lambda_2).$$

Соотношение (3.3) показывает, что переход через ударную волну сопровождается чисто упругой деформацией.

Из (3.4), используя (3.2), имеем

$$(3.6) \quad [v] = -[\lambda] \sqrt{\frac{[\sigma/\lambda]}{\rho_0 [\lambda]}}.$$

При этом из (3.4), (3.6) следует альтернатива:

$$(3.7) \quad [\sigma/\lambda] < 0, \quad [\lambda] < 0, \quad [v] > 0;$$

$$(3.8) \quad [\sigma/\lambda] > 0, \quad [\lambda] > 0, \quad [v] < 0.$$

Неравенства (3.7), обычные для газовой динамики, характеризуют ударные волны сжатия и реализуются для рассматриваемых каучукопо-

добных материалов, как будет показано ниже, в области сжатия ( $\lambda < 1$ ) и умеренных растяжений. В области очень больших растяжений ( $\lambda \gg 1$ ) для каучукоподобных материалов могут иметь место неравенства (3.8), характеризующие волны растяжения.

Из (3.5) с учетом первого равенства (1.7) следует

$$(3.9) \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{2 + \gamma[\lambda]\psi'_1}{2 - \gamma[\lambda]\psi'_2},$$

а также соотношение Гюгонио

$$\frac{\sigma_2}{\lambda_2 \psi'_2} (2 - \gamma[\lambda]\psi'_2) = \frac{\sigma_1}{\lambda_1 \psi'_1} (2 + \gamma[\lambda]\psi'_1).$$

Здесь и далее  $\psi_i^{(n)} = (d^n \psi / d\lambda^n)_{\lambda=\lambda_i}$  ( $i = 1, 2$ ).

Используя (1.2), (3.9), получим выражение для скачка энтропии  $[S]$  на ударной волне

$$(3.10) \quad \frac{[S]}{c_\lambda} = \ln \left\{ \frac{2 + \gamma[\lambda]\psi'_1}{2 - \gamma[\lambda]\psi'_2} \right\} - \gamma[\psi].$$

Формулы (3.9), (3.10) показывают, что для зависимостей  $\psi(\lambda)$ , изображенных на фиг. 1, возможная область существования ударных волн имеет конечные границы:  $0 < \lambda_- < \lambda < \lambda_+$ , где  $\lambda_-$  или  $\lambda_+$  зависят от параметра  $\lambda_1$  (или  $\lambda_2$ ) перед (или за) ударной волной. При  $\lambda \rightarrow \lambda_\pm$ , когда выражения (3.9), (3.10) становятся неограниченными, предположение о постоянстве теплоемкости  $c_\lambda$  становится неверным и для термодинамических потенциалов в (1.2) реализуется более сложная зависимость от температуры.

Для ударных волн малой интенсивности из (3.10) имеем

$$\frac{[S]}{c_\lambda} = \frac{\gamma}{12} [\lambda]^3 (\psi_1''' + 3\gamma\psi_1' \psi_1'' + \gamma^2 \psi_1'^3) + O([\lambda]^4).$$

Вследствие диссипативности ударных волн  $[S] > 0$ . Как следует из фиг. 1, при  $\lambda_1 < \lambda_*$  имеем  $\psi_1''' < 0$ . Тогда (ввиду малости  $\gamma$ ) волны малой интенсивности могут быть ударными при  $\lambda_1 < \lambda_*$  только, если  $|\lambda| < 0$  (волны сжатия). При  $\lambda_1 > \lambda_*$  имеем  $\psi_1''' > 0$ , и волны малой интенсивности могут быть ударными только при  $|\lambda| > 0$ .

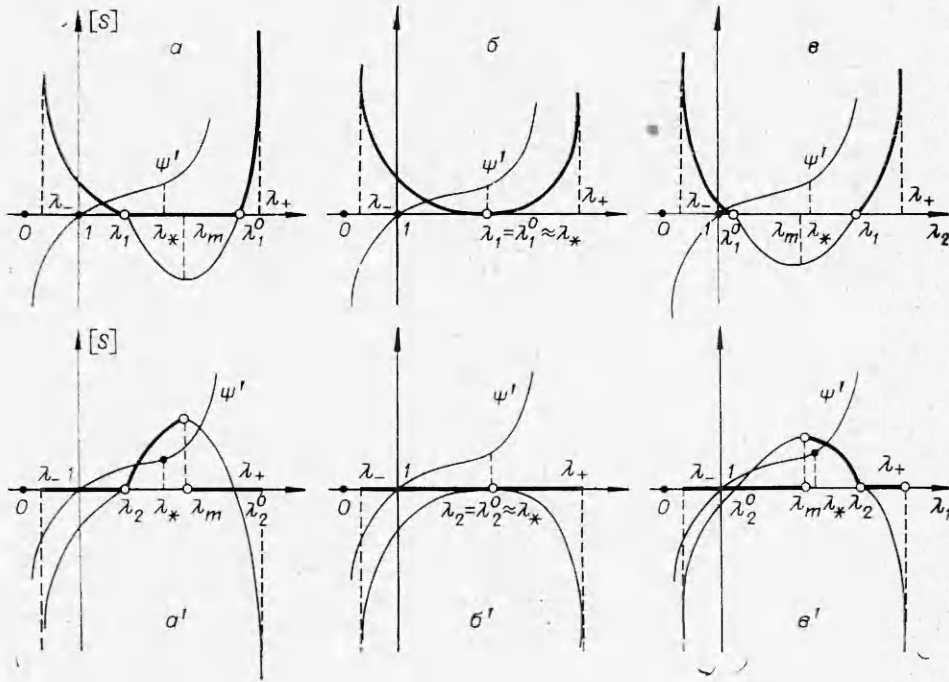
Результаты анализа поведения  $[S]$  при произвольных  $[\lambda]$  в зависимости от  $\lambda_1, \lambda_2$  показаны качественно на фиг. 2 для реального потенциала  $\psi(\lambda)$ , изображенного на фиг. 1, сплошными линиями. Рассмотрим отдельно два случая.

В первом случае, когда изучаются волны нагружения, удобно изучать зависимость  $[S]$  от  $\lambda_2$  при фиксированных значениях  $\lambda_1$  (фиг. 2,  $a-e$ ).

Во втором случае, когда изучаются волны разгрузки, удобно изучать зависимость  $[S]$  от  $\lambda_1$  при фиксированных значениях  $\lambda_2$  (фиг. 2,  $a' - e'$ ).

При этом для построений фиг. 2 использована антисимметрия функции  $[S] = g(\lambda_1, \lambda_2)$ , т. е.  $g(\lambda_2, \lambda_1) = -g(\lambda_1, \lambda_2)$ , что следует непосредственно из (3.10).

Дополнительно к физическому условию существования ударных волн  $[S] > 0$  в рассматриваемой ситуации, когда  $\psi'''(\lambda)$  меняет знак, необходимо еще рассмотреть вопрос об их устойчивости [7, 8].



Ф и г. 2

Ударная волна будет устойчивой, если одновременно выполняются неравенства

$$(3.11) \quad u_{S_1} < x'_0 < u_{S_2},$$

так как только в этом случае малые возмущения за ударной волной будут догонять ее и поставлять ей энергию, а малые возмущения перед ударной волной,двигающиеся медленнее ее, не смогут отбирать энергию у ударной волны.

Из формул (2.1) — (2.3) и (3.4) можно получить соотношения

$$(3.12) \quad (x'_0 - v_1)^2 - (u_{S_1} - v_1)^2 = -\lambda_1^2 u_0^2 (T_1) \frac{2 + \gamma [\lambda] \psi'_1}{3n \gamma c_\lambda [\lambda]} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} [S],$$

$$(u_{S_2} - v_2)^2 - (x'_0 - v_2)^2 = \lambda_2^2 u_0^2 (T_1) \frac{2 + \gamma [\lambda] \psi'_1}{3n \gamma c_\lambda [\lambda]} \frac{\partial}{\partial \lambda_2} [S].$$

Из (3.12) следует, что условия устойчивости (3.11) будут выполнены, если имеют место соотношения

$$(3.13) \quad \operatorname{sgn} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda_2} [S] \right\} = \operatorname{sgn} [\lambda], \quad \operatorname{sgn} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda_1} [S] \right\} = -\operatorname{sgn} [\lambda].$$

Рассмотрим теперь вопрос о существовании и устойчивости ударных волн нагружения и разгрузки, распространяющихся по стержням из каучукоподобного материала.

Зависимость  $[S]$  от  $\lambda_2$  при  $\lambda_1 < \lambda_*$  для реального потенциала  $\psi(\lambda)$  качественно изображена на фиг. 2, а, зависимость  $[S]$  от  $\lambda_1$  при  $\lambda_2 < \lambda_*$  — на фиг. 2, а'. Здесь  $\lambda_*$  — точка перегиба на зависимости  $\psi'(\lambda)$  (см. фиг. 1).

Как видно из фиг. 2, *a*, ударные волны нагружения существуют в этом случае ( $[S] > 0$ ) при  $\lambda_2 < \lambda_1$  (ударные волны сжатия, для которых выполняются неравенства (3.7) и при  $\lambda_2 > \lambda_1^0 > \lambda_1$  (ударные волны растяжения, для которых выполняются неравенства (3.8)). Как следует из (3.13), эти оба типа ударных волн устойчивы. В интервале же  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1^0$  существуют лишь слабые изэнтропические волны нагружения.

Из фиг. 2, *a'* видно, что ударные волны разгрузки существуют лишь в области  $\lambda_2 < \lambda_1 < \lambda_2^0$ . Однако при  $\lambda_2 < \lambda_1 < \lambda_m$  (где  $\lambda_m$  — точка максимума  $[S](\lambda_1)|_{\lambda_2=\text{const}}$ ) они, как следует из (3.13), устойчивы, а при  $\lambda_m < \lambda_1 < \lambda_2^0$  неустойчивы. Таким образом, ударные волны разгрузки фактически существуют лишь в интервале  $\lambda_2 < \lambda_1 < \lambda_m$ . Вне этого интервала существуют лишь слабые изэнтропические волны разгрузки. Устойчивые ударные и слабые волны нагружения и разгрузки показаны на фиг. 2 жирными линиями.

Только устойчивые ударные волны нагружения существуют при  $\lambda_1 = \lambda_1^0 \approx \lambda_*$  (см. фиг. 2, *b*). При этом, если  $\lambda_2 < \lambda_1$ , то это — волны сжатия с выполнением неравенств (3.7), если  $\lambda_2 > \lambda_1$ , это — ударные волны растяжения с выполнением неравенств (3.8). Только слабые изэнтропические волны разгрузки существуют при  $\lambda_2 = \lambda_2^0 \approx \lambda_*$  (см. фиг. 2, *b'*).

Зависимость  $[S]$  от  $\lambda_2$  при фиксированном  $\lambda_1 > \lambda_*$  показана на фиг. 2, *в*. Устойчивые ударные волны нагружения существуют при  $\lambda_2 < \lambda_1^0$  (ударные волны сжатия с выполнением неравенств (3.7)) и при  $\lambda_2 > \lambda_1$  (ударные волны растяжения с выполнением неравенств (3.8)). В интервале  $\lambda_1^0 < \lambda_2 < \lambda_1$  существуют лишь слабые изэнтропические волны нагружения.

Ударные волны разгрузки при  $\lambda_2 > \lambda_*$  существуют, как показано на фиг. 2, *в'*, в интервале  $\lambda_2^0 < \lambda_1 < \lambda_2$ . Однако устойчивы они, как это следует из (3.13), только в интервале  $\lambda_m < \lambda_1 < \lambda_2$ , где  $\lambda_m$  — максимум на зависимости  $[S](\lambda_1)|_{\lambda_2=\text{const}}$ . Вне этого интервала существуют только слабые изэнтропические волны разгрузки.

Диссипативные явления (релаксация, теплообмен) приводят к тому, что ситуации, представленные на фиг. 2, будут изменяться со временем, в частности одна ситуация может сменять другую. В теплоизолированном стержне, к которому энергия прикладывается лишь в течение конечного промежутка времени, весьма малого по сравнению со временем существования волн, эти изменения направлены в сторону уменьшения интенсивности волн.

**4. Примеры.** Рассмотрим сначала волны нагружения, распространяющиеся по однородному ненагруженному стержню, имеющему температуру  $T_1 = T_0$ .

В данном случае  $\lambda_1 = 1$ ,  $f_1 = \text{const}$ ,  $\sigma_1 = 0$ ,  $T_1 = T_0$ , и без ограничения общности можно считать  $v_1 = 0$ . Видно, что это ситуация, изображенная на фиг. 2, *a*.

Из фиг. 2, *a* следует, что при  $\lambda_2 < 1$  ( $\lambda_1 = 1$ ) существуют ударные волны сжатия. При этом из (3.3)–(3.5) имеем

$$(4.1) \quad f_2 = f_1 \lambda_2^{-1}, \quad T_2/T_0 = \{1 - (\gamma/2)(\lambda_2 - 1)\psi_2'\}^{-1}$$

$$x_0' = u_0(T_0)(\psi_2')^{1/2} \{3n\lambda_2(\lambda_2 - 1)(1 + (\gamma/2)(1 - \lambda_2)\psi_2')\}^{-1/2}, \quad v_2 = x_0'(1 - \lambda_2).$$

Так как  $\lambda_2 < 1$ , то  $\psi_2' < 0$  и имеем из (4.1)

$$f_2 > f_1, \quad T_2 > T_0, \quad x_0' > v_2 > u_0(T_0) > 0.$$



При достаточно гладких начальных данных фронт волны сжатия в данном случае будет укручиваться, обнаруживая тенденцию к появлению сильного разрыва.

В области  $1 < \lambda_2 < \lambda_1^0$ , как следует из фиг. 2, *a*, существуют только слабые разрывы, поэтому если степень начального растяжения  $\lambda_2(0) < \lambda_1^0$ , то даже при разрывных начальных условиях фронт волны будет размываться.

В области  $\lambda_2 > \lambda_1^0$ , т. е. при достаточно больших первоначальных деформациях растяжения, как следует из фиг. 2, *a*, возникают ударные волны растяжения, независимо от гладкости первоначального распределения искомых величин. В этом случае все величины за ударной волной снова описывают формулами (4.1) при  $\lambda_2 \gg 1$ . Отсюда следует, что  $f_2 < f_1$ ,  $T_2 > T_0$ ,  $x'_0 > u_0(T_0)$ ,  $v_2 < 0$ .

Диссипативные явления (релаксация напряжений, теплообмен) за фронтом ударной волны вносят существенные различия в ударные волны растяжения и сжатия при нагружении. В обоих случаях релаксация напряжений приводит к изменению параметра  $\lambda_2$  (при сжатии  $\lambda_2$  увеличивается, а при растяжении уменьшается) со временем, при этом интенсивность ударных волн падает. В случае ударной волны сжатия это падение интенсивности происходит вплоть до  $\lambda_2 \rightarrow 1$ , при этом ударная волна сжатия сохраняется. В случае ударной волны растяжения такое падение интенсивности с сохранением сильного разрыва существует лишь до момента времени  $t_*$ , когда  $\lambda_2(t_*)$  не сравняется с  $\lambda_1^0$ . При  $t > t_*$   $\lambda_2 < \lambda_1^0$  и ударная волна будет размываться за счет неустойчивости. Таким образом, в отличие от ударной волны сжатия ударная волна растяжения существует лишь конечное время  $t_*$ , а затем становится неустойчивой.

Учет бокового теплообмена, понижающего температуру  $T_2$  за ударной волной, вызывает увеличение (по сравнению с адиабатическим деформированием) времени релаксации и несколько замедляет вследствие этого протекание релаксационных процессов. Тем не менее качественная картина в различии обоих типов рассмотренных ударных волн нагружения остается справедливой.

Как следует из (4.1), все величины на ударной волне полностью определяются зависимостью  $\lambda_2(t)$ . Это же зависимость находится, как известно, из решения полной нелинейной краевой задачи в области за ударной волной. Если за фронтом ударной волны диссипативными явлениями можно пренебречь, то задача облегчается. Например, формулы (4.1) дают точное решение задачи об импульсном сжатии полуограниченного упругого стержня ( $\lambda_2 = \text{const}$ ).

Рассмотрим теперь волны разгрузки, распространяющиеся по однородно нагруженному стержню, релаксирующему в изотермическом режиме.

В чисто упругом случае ( $\theta_0 \rightarrow \infty$  или  $\bar{\rho} \rightarrow \infty$ )  $\lambda_2 = 1$ , а  $\lambda_1, f_1, T_1$  — известные значения,  $v_1 = 0$ , ситуация изображена на фиг. 2, *a'*, где на интервале  $1 < \lambda_1 < \lambda_m$  существуют ударные волны разгрузки растянутого образца. Соотношения на ударной волне имеют вид

$$(4.2) \quad \begin{aligned} f_2 &= \lambda_1 f_1, \quad T_2 = T_1 \{1 - \gamma(\lambda_1 - 1) \psi'_1\}, \\ x'_0 &= u_0(T_1) \lambda_1 \sqrt{\frac{\psi'_1}{3n(\lambda_1 - 1)}}, \quad v_2 = x'_0 \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1}. \end{aligned}$$

Заметим, что, согласно (4.2), имеем  $T_2 < T_1$ . Можно показать, что это падение температуры меньше, чем при разгрузке по изэнтропическому режиму.

Соотношения (4.2) представляют собой точное решение рассмотренной задачи для адиабатической разгрузки эластичного стержня, т. е. описывают распределение искомых величин и за ударной волной.

Учет релаксационных явлений может качественно изменить картину всех распределений за ударной волной. В данном случае по-прежнему  $f_1 = \text{const}$ ,  $T_1 = \text{const}$ ,  $v_1 = 0$ , однако величина  $\lambda_1(t)$  определяется из релаксационного уравнения

$$(4.3) \quad \frac{d\lambda_1}{dt} + \frac{\lambda_1 \varphi(\lambda_1)}{6\theta_0(T_1)} = 0, \quad \lambda_1(0) = \lambda_1^0.$$

Это обстоятельство приводит к тому, что за фронтом ударной волны формируется некоторое значение деформации  $\lambda_2(t) < \lambda_1(t)$ , которое определяется из решения всей нелинейной динамической задачи в целом. При  $\lambda_1 < \lambda_m$  соотношения на ударной волне описываются общими формулами (3.3)—(3.6) с учетом  $v_1 = 0$ .

В случае, когда  $x_0'(\lambda_1^0)\theta_0 L^{-1} \gg 1$  ( $L$  — длина стержня в деформированном состоянии), т. е. характерное время распространения ударной волны разгрузки по стержню меньше времени релаксации, можно выписать главные члены асимптотического решения за ударной волной

$$(4.4) \quad \lambda(x, t) \approx \lambda_2 = 1, \quad \sigma(x, t) \approx \sigma_2 = 0, \quad v(x, t) \approx v_2(t),$$

причем величины  $f_2$ ,  $T_2$ ,  $v_2$ ,  $x_0'$  удовлетворяют (4.2) с  $\lambda_1(t)$ , определенной из (4.3), а для  $f(x, t)$  будем иметь задачу Коши

$$(4.5) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + v(t) \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f|_{x=x_0(t)} = f_2(t) = f_1 \lambda_1(t),$$

имеющую решение

$$(4.6) \quad f = f_1 \lambda_1 \{l^{-1}(x - a(t))\}, \quad a(t) = \int_0^t v_2(\tau) d\tau, \quad l(t) = x_0(t) - a(t).$$

Когда  $x_0'(\lambda_1^0)\theta_0 L^{-1} \leq 1$ , формулы (4.4)—(4.6) непригодны и приходится обращаться к численному решению задачи в целом. Наиболее существенным обстоятельством в данном случае является то, что за ударной волной разгрузки в релаксирующем стержне может возникнуть зона сжатия. Действительно, если предположить, что за ударной волной

$$df/dt \equiv \partial f/\partial t + v\partial f/\partial x > 0,$$

то из первого уравнения (1.1) следует, что за ударной волной  $\partial v/\partial x < 0$ . Последнее может приводить к тому, что  $\lambda_2 < 1$ ,  $\sigma_2 < 0$ , т. е. в некоторой области за ударной волной может происходить релаксация неоднородного сжатого материала.

Отметим, что приведенные выше формулы, описывающие ударные волны разгрузки, справедливы только, если  $\lambda_1^0 < \lambda_m$  (см. фиг. 2,  $a'$ ). В противоположном случае, когда  $\lambda_1^0 > \lambda_m$ , в начале процесса разгрузки ударные волны существовать не будут, и лишь через некоторое время после начала процесса разгрузки в среде с достаточно малым временем релаксации (или для весьма длинного стержня) возникшая вначале слабая волна перейдет затем в ударную, интенсивность которой будет падать далее со временем.

Поступила 7 IV 1977

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кузина З. Н., Леонов А. И., Марков А. А. Нелинейные волны в упруговязком стержне и задача об ударе стержня конечной длины о жесткую преграду.— ПМТФ, 1978, № 1.
2. Flory P. J. Principles of Polymer Chemistry. Ithaca, 1953.
3. Boa-Teh Chu. Transverse shock waves in incompressible elastic solids.— «J. Mech. Phys. Solids», 1967, vol. 15, p. 1—14.
4. Blatz P. J., Sharda S. C., Tshoegl N. W. Strain energy function for rubberlike materials, based on a generalized measure of strain.— «Trans. Soc. Rheol.», 1974, vol. 18, N 1, p. 145—161.
5. Леонов А. И. Неравновесная термодинамика и реология упруговязких полимерных сред. Препринт лекций в Международной школе «Проблемы тепло- и массопереноса в реологически сложных средах», ИТМО АН БССР им. А. В. Лыкова. Минск. 16—28 апреля (1975).
6. Leonov A. J. Nonequilibrium thermodynamics and rheology of viscoelastic polymer media.— «Rheologica Acta», 1976, Bd 15, N. 2, S. 85—98.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехтеориздат, 1954.
8. Галли Г. Я. Об ударных волнах в средах с произвольным уравнением состояния.— «Докл. АН СССР», 1958, т. 119, вып. 6, с. 1106—1109.

УДК 534.514

### ДИСПЕРСИЯ СКОРОСТИ И РАССЕЯНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН В КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛАХ

А. А. Усов, Т. Д. Шермергор

(Москва)

Рассеяние волн на неоднородностях среды может быть рассчитано различными методами. Анализ наиболее часто используемых приближений проведен в [1, 2]. Коэффициент рассеяния ультразвуковой волны в композитах рассчитывался в работах [3—6]. При этом в [3] принималось условие малости концентрации одного из компонентов, а в [6] рассчитывались лишь асимптотики длинных и коротких волн. Попытка расчета коэффициента рассеяния продольных и поперечных ультразвуковых волн во всем диапазоне длин волн предпринята в работах [4, 5]. Расчет проводился в приближении учета парных корреляций между модулями упругости и плотностью. В работе [4] вычисления проведены при использовании гауссовой зависимости для координатной части бинарных корреляционных функций, что не соответствует композиционным материалам, а в [5] не приведен явный вид функции, позволяющей перейти от асимптотики длинных волн к коротковолновой асимптотике. Кроме того, в обеих отмеченных работах не рассматривалась дисперсия скорости распространения волны.

Ниже проводится расчет коэффициента рассеяния и дисперсии скорости продольных волн во всем диапазоне длин волн при произвольных концентрациях компонентов.

1. Методом, развитым в работах [7—9], проведем перенормировку уравнений движения

$$L_{il}u_l = 0, \quad L_{il} \equiv \nabla_k \lambda_{iklm} \nabla_m + \rho \omega^2 \delta_{il},$$

где  $\mathbf{u}$  — вектор смещения;  $\lambda_{iklm}$  — тензор модулей упругости;  $\rho$  — плотность среды;  $\omega$  — циклическая частота.

Обозначая регулярные составляющие операторов и функций угловыми скобками, а случайные — штрихами, во втором приближении теории случайных функций найдем

$$(1.1) \quad \langle L_{il} \rangle \langle u_l \rangle + \langle L'_{ip}(\mathbf{r}) \int G_{ps}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) L'_{sl}(\mathbf{r}_1) \langle u_l(\mathbf{r}_1) \rangle d\mathbf{r}_1 \rangle = 0,$$