

УДК 539.374

О СЖАТИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ПЛИТАМИ

С. Е. Александров, А. Р. Пирумов*, О. В. Чесникова*

Институт проблем механики РАН им. А. Ю. Ишлинского, 119526 Москва

* Московский государственный университет приборостроения и информатики,
107996 Москва

E-mail: alpirumov@mail.ru

В предположении, что поведение материала подчиняется цилиндрическому условию текучести и ассоциированному закону течения, рассматривается задача о плоском течении жесткопластического пористого материала между двумя шероховатыми вращающимися плитами в отсутствие стока материала в точке их вращения и при равномерном распределении пористости в начальный момент. Решение сводится к последовательно-му вычислению нескольких обыкновенных интегралов. Показано, что поведение решения зависит от величины угла раствора плит, а значение пористости на определенной стадии процесса деформирования может быть равно нулю.

Ключевые слова: пористость, трение, аналитическое решение, пластичность.

В классической теории пластичности несжимаемых материалов имеется большое количество аналитических решений, полученных полуобратным методом [1, 2]. В теории пластичности пористых материалов такие решения, по-видимому, неизвестны (даже для случая начального течения), за исключением случаев однородного напряженно-деформированного состояния и простейших задач без учета сил трения, например задач о сжатии полого цилиндра при плоскодеформированном состоянии (начальное течение), о сжатии полой сферической оболочки (начальное течение), о течении через сходящийся канал [3]. Классические задачи теории пластичности (среди которых наиболее типичной является задача Прандтля о сжатии слоя между шероховатыми плитами (см., например, [1])), имеющие достаточно простые решения в случае несжимаемого идеально жесткопластического материала (и их обобщения на другие модели несжимаемых материалов [4]), не обобщаются на модели пластически сжимаемых материалов. В частности, попытки обобщения предприняты в работе [5] для задачи Прандтля и в работе [6] для течения через бесконечный сходящийся канал, однако в обоих случаях решения не были получены (при тех же допущениях, при которых строятся классические решения). Поскольку точные решения представляют интерес и могут играть важную роль при отладке численных программ [7], поиск таких решений, особенно при наличии сил трения, является актуальной задачей.

Будем полагать, что поведение материала подчиняется цилиндрическому условию текучести, предложенному в работе [8] и записанному в виде

$$\sigma_{eq} \leq \sqrt{3} \tau_s, \quad |\sigma| \leq p_s. \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-92011_ННС_а) и Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (грант № НШ-134.2008.1).

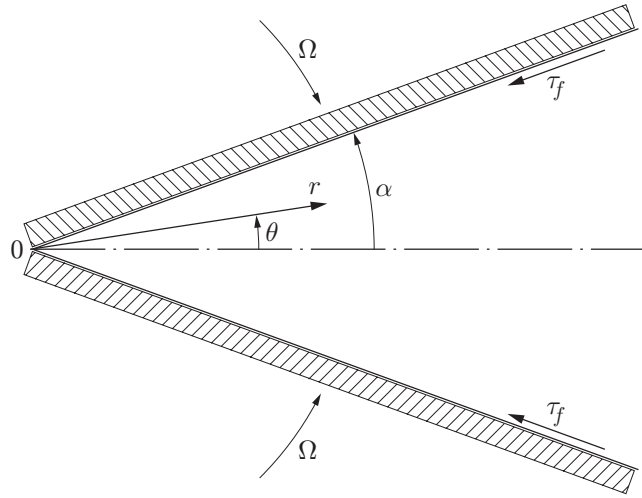


Рис. 1. Геометрия задачи

Здесь σ_{eq} — эквивалентное напряжение; σ — среднее напряжение; τ_s — предел текучести при чистом сдвиге; p_s — предел текучести при гидростатическом сжатии. Эквивалентное и среднее напряжения определяются соотношениями $\sigma_{eq} = \sqrt{3/2} (\tau_{ij} \tau_{ij})^{1/2}$, $\sigma = \sigma_{ij} \delta_{ij} / 3$, где σ_{ij} — компоненты тензора напряжения; τ_{ij} — компоненты девиатора напряжения; δ_{ij} — символ Кронекера. Величины p_s , τ_s считаются известными функциями пористости η . При $\eta \rightarrow 0$ величина $p_s \rightarrow \infty$, а величина τ_s стремится к пределу текучести при чистом сдвиге материала основы. Несмотря на простоту условия текучести (1), с его помощью можно описать некоторые экспериментальные результаты [8]. Другие решения с использованием условия текучести (1) получены в работах [9, 10]. Заметим, что при применении этого условия возможны различные режимы течения. Однако режим, описываемый соотношениями $\sigma_{eq} \leq \sqrt{3} \tau_s$, $|\sigma| < p_s$, приводит к системе уравнений классической теории пластичности несжимаемого материала, а режим $\sigma_{eq} < \sqrt{3} \tau_s$, $|\sigma| \leq p_s$ при плоской деформации невозможен. Таким образом, будем считать, что в соотношениях (1) имеет место знак равенства, причем $\sigma < 0$. Полная система уравнений, основанная на условии текучести (1), приведена в работе [11].

Рассмотрим сжатие пористого пластического материала между шероховатыми плитами, вращающимися с угловой скоростью Ω , в условиях плоскодеформированного состояния (рис. 1). Поскольку скорость деформирования не оказывает влияния на сопротивление материала, без ограничения общности можно считать, что $\Omega = 1$. В работах [12–14] решения рассматриваемой задачи получены для некоторых моделей пластически несжимаемого материала. Частным случаем этих решений является идеально жесткопластическое решение. Введем цилиндрическую систему координат $r\theta z$, ось z которой совпадает с осью вращения плит. Материал занимает область $0 \leq r < \infty$, $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$ (2α — угол раствора плит). В точке $r = 0$ сток материала отсутствует, поэтому можно предположить, что удельные силы трения τ_f направлены к этой точке (см. рис. 1). Вследствие симметрии задачи достаточно получить решение при $\theta \geq 0$. Так как $\tau_{rz} = 0$, $\tau_{\theta z} = 0$, то первое соотношение в (1) выполняется в результате подстановки

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= -\tau_s \sin \omega, & \tau_{\theta\theta} &= -(2/\sqrt{3}) \tau_s \cos \omega \sin(\gamma + \pi/3), \\ \tau_{rr} &= (2/\sqrt{3}) \tau_s \cos \omega \cos(\gamma + \pi/6), \end{aligned} \quad (2)$$

с учетом которой закон пластического течения, ассоциированный с (1), принимает вид

$$\begin{aligned} \xi_{rr} &= 2\lambda_1 \cos \omega \cos(\gamma + \pi/6) - \lambda_2, & \xi_{\theta\theta} &= -2\lambda_1 \cos \omega \sin(\gamma + \pi/3) - \lambda_2, \\ 0 &= 2\lambda_1 \cos \omega \sin \gamma - \lambda_2, & \xi_{r\theta} &= -\sqrt{3} \lambda_1 \sin \omega, & \lambda_1 &\geq 0, & \lambda_2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Исключая из уравнений (3) множители λ_1 , λ_2 , получаем

$$\frac{\xi_{rr} - \xi_{\theta\theta}}{\xi_{r\theta}} = -2 \operatorname{ctg} \omega \cos \gamma, \quad \frac{\xi_{rr} + \xi_{\theta\theta}}{\xi_{r\theta}} = 2\sqrt{3} \operatorname{ctg} \omega \sin \gamma. \quad (4)$$

Неравенства в (3) выполняются, если

$$\cos \omega \sin \gamma > 0, \quad \sin \omega > 0. \quad (5)$$

Сделанное в (5) предположение о том, что

$$\xi_{r\theta} < 0, \quad (6)$$

следует из характера течения (см. рис. 1) и должно быть проверено после получения решения.

Предположим, что компоненты девиатора напряжения не зависят от r . Так как пористость распределена равномерно, то $\tau_s = \operatorname{const}$, $p_s = \operatorname{const}$. Тогда из (1) следует, что $\sigma = \operatorname{const}$, а уравнения равновесия принимают вид

$$\frac{d\tau_{r\theta}}{d\theta} + \tau_{rr} - \tau_{\theta\theta} = 0, \quad \frac{d\tau_{\theta\theta}}{d\theta} + 2\tau_{r\theta} = 0. \quad (7)$$

Подставляя соотношения (2) в (7), получаем

$$\frac{d\omega}{d\theta} = 2 \cos \gamma, \quad \sin\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right) \frac{d\omega}{d\theta} - \operatorname{ctg} \omega \cos\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right) \frac{d\gamma}{d\theta} = \sqrt{3}. \quad (8)$$

Переходя во втором уравнении (8) к дифференцированию по ω и исключая производную $d\omega/d\theta$ с помощью первого уравнения, находим

$$\frac{d\gamma}{d\omega} = \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \gamma. \quad (9)$$

Общее решение уравнения (9) имеет вид

$$\cos \omega = C / \sin \gamma. \quad (10)$$

Из уравнения (10) и неравенств (5) следует, что $1 > C > 0$. Учитывая характер течения (см. рис. 1), можно предположить, что

$$\xi_{rr} - \xi_{\theta\theta} > 0. \quad (11)$$

(Неравенство (11) необходимо проверить после построения решения.) Тогда с учетом (5) без ограничения общности можно считать, что

$$\cos \omega > 0, \quad \cos \gamma > 0, \quad \sin \gamma > 0, \quad 0 < \omega < \pi/2, \quad 0 < \gamma < \pi/2. \quad (12)$$

При выполнении неравенств (12) подстановка (10) в первое уравнение системы (8) дает соотношение

$$\frac{d\omega}{d\theta} = 2 \left(1 - \frac{C^2}{\cos^2 \omega}\right)^{1/2}. \quad (13)$$

Общее решение уравнения (13) имеет вид

$$\operatorname{arctg}(\sqrt{2} \sin \omega / (1 - 2C^2 + \cos 2\omega)^{1/2}) = 2\theta + C_1. \quad (14)$$

Поскольку на оси симметрии $\tau_{r\theta} = 0$, из соотношений (2), (14) с учетом (12) находим зависимость $\omega(\theta)$ в неявном виде

$$\sqrt{2} \sin \omega / (1 - 2C^2 + \cos 2\omega)^{1/2} = \operatorname{tg} 2\theta. \quad (15)$$

Зависимость $\gamma(\theta)$ определяется из (10), (15) в параметрическом виде.

Представим поле скорости в форме

$$u_r = rU_r(\theta), \quad u_\theta = rU_\theta(\theta), \quad (16)$$

где величины $U_r(\theta)$, $U_\theta(\theta)$ зависят только от θ . В такой форме вектор скорости удовлетворяет условию отсутствия стока материала в точке $r = 0$ при любом выборе функций $U_r(\theta)$, $U_\theta(\theta)$. Из краевых условий $u_\theta = 0$ при $\theta = 0$, $u_\theta = -r$ при $\theta = \alpha$ следуют условия для U_θ :

$$U_\theta = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0; \quad (17)$$

$$U_\theta = -1 \quad \text{при} \quad \theta = \alpha. \quad (18)$$

Вычисляя с использованием равенств (16) компоненты тензора скорости деформации и подставляя их в (4), получаем

$$\frac{dU_\theta}{d\theta} = \operatorname{ctg} \omega \cos \gamma \frac{dU_r}{d\theta}, \quad \frac{dU_\theta}{d\theta} + 2U_r = \sqrt{3} \operatorname{ctg} \omega \sin \gamma \frac{dU_r}{d\theta}. \quad (19)$$

Исключая из второго уравнения в (19) производную $dU_\theta/d\theta$ с помощью первого уравнения и переходя в полученном выражении к дифференцированию по γ с использованием соотношений (8), (9), находим

$$\frac{dU_r}{U_r} = \frac{d\gamma}{\sin \gamma (\sqrt{3} \sin \gamma - \cos \gamma)}. \quad (20)$$

Общее решение уравнения (20) имеет вид

$$U_r = C_2(\sqrt{3} \sin \gamma - \cos \gamma) / \sin \gamma. \quad (21)$$

Переходя в первом уравнении (19) к дифференцированию по γ , исключая U_r с помощью выражения (21) и учитывая (5), (10), получаем

$$\frac{dU_\theta}{d\gamma} = \frac{CC_2 \cos \gamma}{\sin^2 \gamma (\sin^2 \gamma - C^2)^{1/2}}. \quad (22)$$

Для определения постоянных интегрирования необходимо задать закон трения при $\theta = \alpha$. Примем закон максимального трения, согласно которому при проскальзывании удельные силы трения достигают максимально возможных значений [15], а при использовании ряда моделей материала возникают сингулярные поля скорости [13–15]. Кроме того, при больших значениях касательного напряжения на поверхности контакта решения не существует. Для рассматриваемой модели материала в случае проскальзывания из (2) находим

$$\omega = \pi/2 \quad \text{при} \quad \theta = \alpha. \quad (23)$$

Сначала необходимо построить решение с учетом условия прилипания на поверхности $\theta = \alpha$: $u_r|_{\theta=\alpha} = 0$. Тогда из соотношений (16), (21) получаем

$$\gamma = \pi/6 \quad \text{при} \quad \theta = \alpha. \quad (24)$$

Будем полагать, что при $\theta = \alpha$ $\omega = \omega_s$, при $\theta = 0$ $\gamma = \gamma_0$. Тогда, учитывая, что при $\theta = 0$ $\omega = 0$, из выражений (10), (12), (15), (24) находим

$$C = \sin \gamma_0, \quad \cos \omega_s = 2 \sin \gamma_0, \quad \operatorname{tg} \omega_s = (\sqrt{3}/2) \operatorname{tg} 2\alpha. \quad (25)$$

С учетом равенств (17), (25) решение уравнения (22) запишем в виде

$$U_\theta = \sin \gamma_0 C_2 \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\cos y}{\sin^2 y (\sin^2 y - \sin^2 \gamma_0)^{1/2}} dy. \quad (26)$$

Постоянная C_2 определяется из равенств (18), (26) следующим образом:

$$C_2 = - \left(\sin \gamma_0 \int_{\gamma_0}^{\gamma_s} \frac{\cos \gamma}{\sin^2 \gamma (\sin^2 \gamma - \sin^2 \gamma_0)^{1/2}} d\gamma \right)^{-1}. \quad (27)$$

Таким образом, для выбранного значения α зависимости ω , U_r , U_θ от параметра γ определяются из формул (10), (21), (26), (27). Затем из (2), (16) можно получить распределения напряжений и скоростей. Кроме того, используя соотношение (15), можно найти зависимость искомых функций от θ в параметрическом виде. Заметим, что в (26) интеграл является несобственным, однако его сходимость легко показать. Из соотношений (25) следует, что полученное решение имеет силу только при $0 < \alpha \leq \pi/4$. При этом случай $\alpha = \pi/4$ требует отдельного рассмотрения.

Из уравнений (25) следует также, что при $\alpha = \pi/4$ выполняется условие (23), причем в этом случае $C = 0$. Согласно выражениям (3), (10) $\lambda_2 = 0$, поэтому происходит смена режима течения: вектор скорости деформации (в пространстве главных скоростей деформации, совмещенном с пространством главных напряжений) становится ортогональным боковой поверхности цилиндра, определяемого уравнениями (1). В частности, выполняется условие несжимаемости. Решение для данного случая получается при $\gamma = 0$. Однако в формулах (20), (24) необходимо исключить дифференцирование по γ , что удобнее сделать с использованием уравнений (19). Поскольку при $C = 0$ из (15) следует $\omega = 2\theta$, уравнения (19) преобразуются следующим образом:

$$\frac{dU_\theta}{d\theta} = \operatorname{ctg}(2\theta) \frac{dU_r}{d\theta}, \quad \frac{dU_\theta}{d\theta} + 2U_r = 0. \quad (28)$$

Решение уравнений (28), удовлетворяющее условиям (17), (18), имеет вид

$$U_r = \cos 2\theta, \quad U_\theta = -\sin 2\theta. \quad (29)$$

Несмотря на то что в данном случае закон трения (23) не запрещает режим проскальзывания, из решения (29) следует, что при $\theta = \alpha$ $U_r = 0$. Такие решения возможны при определенных геометрических свойствах поверхности трения [15]. Заметим, что при $\alpha = \pi/4$ решение было построено с использованием двух уравнений условия текучести (1), хотя одно из них не оказывает влияния на величину компонент тензора скорости деформации. В частности, второе уравнение системы (28) представляет собой условие несжимаемости. При $\alpha > \pi/4$ решение необходимо строить в предположении, что выполняется только уравнение $\sigma_{eq} = \sqrt{3} \tau_s$. В результате получаем систему уравнений классической теории пластичности несжимаемых материалов, поэтому соответствующее решение не приводится. В данном случае также выполняется условие прилипания. Таким образом, для рассматриваемых модели материала и краевой задачи при использовании закона максимального трения получаем режим прилипания на поверхности трения. Подобное поведение решений характерно для ряда других моделей жесткопластических материалов [14].

Распределение компонент тензора напряжения в окружном направлении определяется в аналитическом виде из формул (1), (2), (10), (15), (25). Зависимости $U_r(\theta)$, $U_\theta(\theta)$ для различных значений угла α , полученные из соотношения (21) и в результате численного интегрирования в (26), (27), показаны на рис. 2.

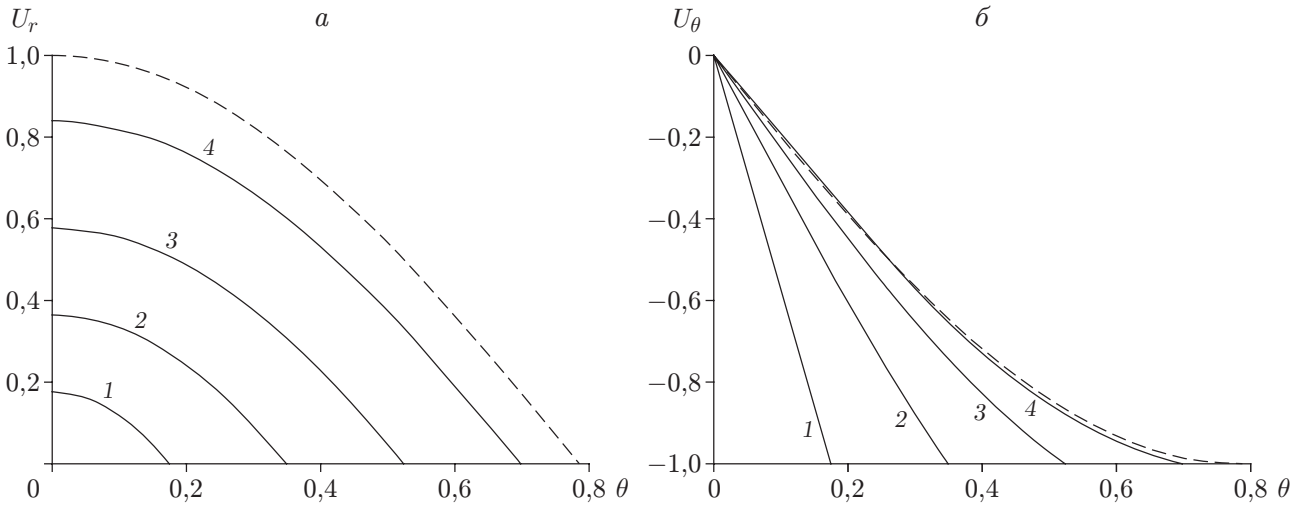


Рис. 2. Зависимости $U_r(\theta)$ (а) и $U_\theta(\theta)$ (б) при различных величинах углов α :
 1 — $\alpha = \pi/18$, 2 — $\alpha = \pi/9$, 3 — $\alpha = \pi/6$, 4 — $\alpha = 2\pi/9$; штриховые линии — решение,
 полученное из (29) при $\alpha = \pi/4$

В случае если поля скорости описываются соотношениями (16), неравенства (6), (11) принимают вид $dU_r/d\theta < 0$, $dU_\theta/d\theta < 0$. На рис. 2 видно, что эти неравенства выполняются.

В предположении, что значение пористости является произвольным, а ее распределение — равномерным, полученное решение описывает мгновенное напряженно-деформированное состояние. Однако данное решение можно распространить на случай деформирования материала с меняющейся пористостью. Из выражения для поля скоростей (16) следует, что первый инвариант тензора скорости деформации определяется соотношением $\xi = \xi_{rr} + \xi_{\theta\theta} = 2U_r + dU_\theta/d\theta$, которое с учетом (8), (9), (19)–(21) принимает вид

$$\xi = 2\sqrt{3} C_2. \tag{30}$$

Поскольку при деформировании величина C_2 является функцией времени t (или угла α), уравнение неразрывности записывается в форме

$$\frac{d(1 - \eta)}{dt} = -(1 - \eta)\xi, \tag{31}$$

где d/dt — полная производная по времени. Предположение, что величина пористости не зависит от координат, не противоречит начальному условию $\eta = \eta_0 = \text{const}$ при $t = 0$ (или $\alpha = \alpha_0$), а также уравнениям (30), (31), поэтому полную производную по времени в (31) можно заменить на локальную производную. Исключая с помощью (30) параметр ξ из уравнения (31), переходя к дифференцированию по α с помощью соотношения $d\alpha/dt = -1$ и интегрируя полученное выражение при начальном условии $\eta = \eta_0$ ($\alpha = \alpha_0$), находим

$$\eta = 1 - (1 - \eta_0) \exp\left(2\sqrt{3} \int_{\alpha_0}^{\alpha} C_2 d\alpha\right). \tag{32}$$

Полагая в уравнении (32) $\eta = 0$, для определения величины угла $\alpha = \alpha_{cr}$, при которой материал достигает беспористого состояния, получаем соотношение

$$1 = (1 - \eta_0) \exp\left(2\sqrt{3} \int_{\alpha_0}^{\alpha_{cr}} C_2 d\alpha\right). \tag{33}$$

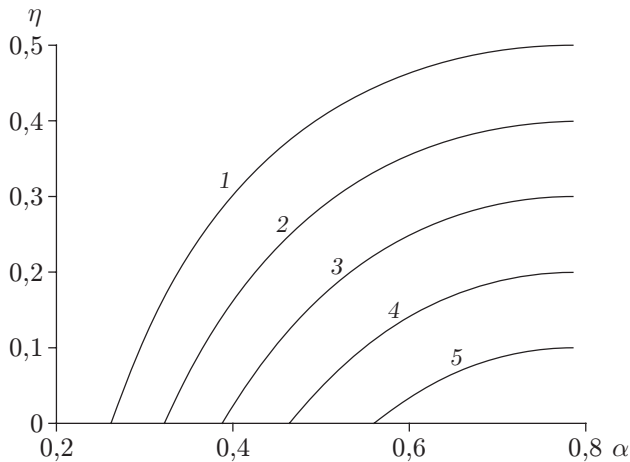


Рис. 3

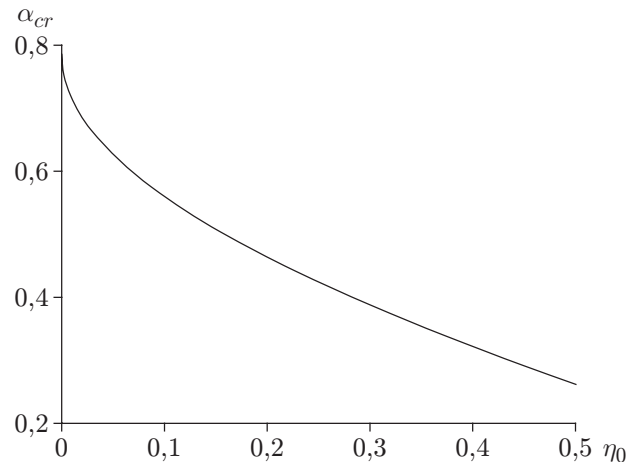


Рис. 4

Рис. 3. Зависимость пористости от величины угла раствора плит при $\alpha_0 = \pi/4$ и различных значениях начальной пористости:

1 — $\eta_0 = 0,5$, 2 — $\eta_0 = 0,4$, 3 — $\eta_0 = 0,3$, 4 — $\eta_0 = 0,2$, 5 — $\eta_0 = 0,1$

Рис. 4. Зависимость величины угла раствора плит, при которой пористость равна нулю, от начальной пористости ($\alpha_0 = \pi/4$)

Поскольку зависимость $C_2(\alpha)$ определяется соотношениями (25), (27), интегрирование в (32), (33) можно выполнить численно. На рис. 3 показано изменение пористости в процессе деформирования при различных значениях начальной пористости. На рис. 4 представлена зависимость величины угла α_{cr} от начальной пористости.

Таким образом, получено аналитическое решение начально-краевой задачи о течении жесткопластического пористого материала между двумя вращающимися шероховатыми плитами. Показано, что при использовании закона максимального трения на поверхности трения реализуется режим прилипания. В зависимости от величины угла раствора плит на поверхности текучести возникают различные режимы течения, в частности возможно течение материала без изменения пористости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
2. Задоян М. А. Пространственные задачи теории пластичности. М.: Физматлит, 1992.
3. Mear M. E., Durban D. Radial flow of sintered powder metals // Intern. J. Mech. Sci. 1989. V. 31, N 1. P. 37–49.
4. Александров С. Е. Обобщение решения Прандтля и его приложение к оценке несущей способности некоторых сварных и паяных конструкций // Пробл. машиностроения надежных машин. 2001. № 6. С. 39–43.
5. Кийко Л. К. Обобщение задачи Прандтля о сжатии полосы для сжимаемого материала // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1980. № 5. С. 1–6.
6. Durban D., Mear M. E. Asymptotic solution for extrusion of sintered powder metals // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1991. V. 58, N 2. P. 582–584.
7. Sinclair G. B., Anaya-Dufresne M., Meda G. Tuned test problems for numerical methods in engineering // Intern. J. Numer. Methods Engng. 1997. V. 40. P. 4183–4209.

8. **Друянов Б. А., Пирумов А. Р.** Исследование процесса экструзии пористого материала // Вестн. машиностроения. 1980. Т. 60, № 9. С. 61–62.
9. **Залазинский А. Г., Поляков А. П.** Модель пластически сжимаемого материала и ее применение к исследованию процесса прессования пористой заготовки // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 3. С. 140–151.
10. **Залазинский А. Г., Поляков А. А., Поляков А. П.** О пластическом сжатии пористого тела // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2003. № 1. С. 123–134.
11. **Друянов Б. А.** Прикладная теория пластичности пористых тел. М.: Машиностроение, 1989.
12. **Александров С. Е.** Сингулярные решения в одной модели пластичности с условием текучести, зависящим от среднего напряжения // Проблемы механики: Сб. ст. к 90-летию со дня рожд. А. Ю. Ишлинского / Под ред. Д. М. Климова. М.: Физматлит, 2003. С. 77–86.
13. **Александров С. Е., Лямина Е. А.** Сжатие пластического материала, чувствительного к среднему напряжению, вращающимися плитами // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2003. № 6. С. 50–60.
14. **Александров С. Е., Лямина Е. А.** Качественные различия в решениях при использовании теорий пластичности с условием текучести Кулона — Мора // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 6. С. 136–145.
15. **Alexandrov S., Richmond O.** Singular plastic flow fields near surfaces of maximum friction stress // Intern. J. Non-Linear Mech. 2001. V. 36, N 1. P. 1–11.

Поступила в редакцию 19/V 2008 г.
