УДК 532.593+532.528+532.529+532.5.013.2

МЕТОД СГЛАЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ КАВИТАЦИОННОГО РАЗРУШЕНИЯ ЖИДКОСТИ ПРИ УДАРНО-ВОЛНОВОМ НАГРУЖЕНИИ

М. Н. Давыдов, В. К. Кедринский

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mails: davydov@hydro.nsc.ru, kedr@hydro.nsc.ru

Показано, что использование метода сглаженных частиц позволяет провести исследование структуры течения кавитирующей среды с высокой концентрацией газовой фазы и описать процесс инверсии ее двухфазного состояния — переход от кавитирующей жидкости к системе газ — частицы. В результате численного анализа динамики состояния полусферической капли в процессе ее ударно-волнового нагружения установлено, что фокусировка отраженной от свободной поверхности капли ударной волны приводит к формированию в центре капли плотного быстрорасширяющегося кавитационного кластера. К моменту времени $t = 500$ мкс пузырьки в центре кластера успевают не только коалесцировать, образуя структуру типа пены, но и трансформироваться в систему газ — частицы, образовав практически свободную быстрорасширяющуюся зону. Механизм этого процесса, определенный ранее как внутренний "кавитационный взрыв" капли, подтвержден в результате математического моделирования задачи с помощью метода сглаженных частиц. Деформация кавитирующей капли завершается ее распадом на отдельные фрагменты и частицы.

Ключевые слова: метод сглаженных частиц (SPH-метод), кавитационное разрушение, ударно-волновое нагружение.

Введение. Метод сглаженных частиц (smoothed particle hydrodynamics (SPH)) [1, 2] является эффективным бессеточным лагранжевым численным методом, применяемым для расчетов структуры течений с неизвестной свободной границей, в частности высокоскоростных процессов в средах с существенно изменяющейся при интенсивном динамическом нагружении топологией моделируемых объектов [3].

В рассматриваемом методе в моделируемое физическое пространство помещается N частиц сферической формы, каждая из которых обладает массой m_i, внутренней энергией e_i, скоростью $\boldsymbol{v}_i$ и движется в соответствии с законами механики. Если в некоторый момент времени указанные физические величины известны во всех точках $j = 1, \ldots, N$, в которые помещено N частиц, т. е. задана некоторая функция $f(\boldsymbol{r}_j)$, то ее значение в произвольной точке моделируемого пространства можно получить в результате дискретизации интерполяционной формулы

$$\langle f(\boldsymbol{r})\rangle = \int f(\boldsymbol{r}')W(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', h)\, dr',$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Президиума РАН (проект № 2.6) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-1-00134а).

где h — радиус сглаживания; $W(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', h)$ — сглаживающая функция (ядро), для которой должны выполняться условия

$$\int W(\boldsymbol{r}, h)\,dr = 1, \qquad W(\boldsymbol{r}, h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \delta(\boldsymbol{r}).$$

В данной работе используется известное определение ядра, основанное на кусочно-сплайновых функциях третьей степени [4].

Численная аппроксимация функции $f(r)$, заданной только в N точках, проводится так же, как в методе интегрирования Монте-Карло. Отличие заключается в том, что точки, в которых известно значение функции, не генерируются случайным образом, а представлены в виде набора частиц в пространстве. При этом чем больше плотность точек (частиц) и чем более равномерно они распределены, тем точнее аппроксимация и соответственно выше точность полученного решения. Интерполяции функции f и ее производной в SPH-методе имеют следующий вид:

$$\langle f(\boldsymbol{r})\rangle = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho(\boldsymbol{r}'_j)}\, f(\boldsymbol{r}'_j) W(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'_j, h),$$

$$\langle \nabla f(r)\rangle = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho(\boldsymbol{r}'_j)}\, f(\boldsymbol{r}'_j)\, \nabla W(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'_j, h).$$

Поскольку сглаживающая функция W не равна нулю только в некоторой (малой) окрестности точки с координатой $\boldsymbol{r}$, то на результат интерполяции оказывают влияние не все узлы, а только те, которые попали в окрестность сглаживания данной точки. Поэтому суммирование можно проводить не по всем известным значениям функции, а только по соседним узлам (частицам), находящимся на расстоянии, не превышающем $2h$.

Следует отметить, что процедура перебора всех частиц в пространстве имеет квадратичный порядок сложности и поэтому практически не реализуется. С учетом того что частицы произвольно перемещаются в пространстве и могут свободно перемешиваться, задача эффективного (экономичного по времени) поиска соседних частиц является исключительно важной при реализации SPH-метода. Один из подходов к решению этой задачи состоит в разбиении пространства на ячейки и проведении суммирования только по частицам в соседних ячейках. Необходимо отметить, что построенная сетка является вспомогательной и предназначена для ускорения процесса поиска соседних частиц, а не для аппроксимации, поэтому не оказывает влияния на получаемое решение, и метод SPH по-прежнему остается бессеточным.

В методе SPH уравнения газовой динамики имеют вид

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = -\rho_i \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j}\,(\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_i)\cdot \nabla W(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j, h),$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{N} m_j \Big(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij}\Big) \nabla W(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j, h)$$

(уравнение движения содержит искусственную вязкость Π_{ij}). Введение искусственной вязкости позволяет решить проблему численных неустойчивостей, возникающих при решении данной системы [5]. Наиболее распространенным приемом является введение комбинации линейной и квадратичной искусственных вязкостей при взаимодействии двух частиц:

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} (-\alpha c_{ij} + \beta\mu_{ij}^2)/p_{ij}, & (\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_i)\cdot(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i) < 0, \\ 0, & (\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_i)\cdot(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i) \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\mu_{ij} = \frac{h(\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_i)(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i)}{(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i)^2 + \varepsilon h^2}, \qquad c_{ij} = \frac{c_i + c_j}{2}, \quad p_{ij} = \frac{p_i + p_j}{2}.$$

Параметры α, β, ε подбираются с учетом требуемой гладкости решения. Искусственная вязкость вводится в уравнения только для движущихся навстречу друг другу частиц и препятствует, в частности, их прониканию друг в друга при больших скоростях, когда силы давления недостаточно вследствие конечности шага интегрирования по времени.

Ниже рассмотрены две задачи, процедура решения которых с использованием традиционных численных методов [6, 7] не позволяла выполнить расчет динамики состояния моделируемой среды на стадии ее разрушения на фрагменты. Первая задача — формирование отколов в слое жидкости при отражении ударной волны (УВ) подводного взрыва от свободной поверхности этого слоя, вторая задача — "кавитационный взрыв" жидкой капли при ее ударно-волновом нагружении ультракороткой УВ. В указанных методах в качестве базовой системы уравнений использовалась модель Иорданского — Когарко — ван Вингардена (ИКВ-модель), в которой, в частности, пузырьковая жидкость и жидкие среды с ядрами кавитации рассматриваются как сплошные среды и адекватно описывается изменение средних значений плотности ρ, давления p и массовой скорости v, характеризующих ее состояние [8].

Динамика структуры плоского жидкого слоя за фронтом волн разрежения. Рассматривается УВ, имеющая треугольный профиль, с амплитудой 15 МПа и длительностью 3 мкс, генерируемая движением поршня на левой границе жидкого слоя шириной 5 см. Правой границей является свободная поверхность [9]. Жидкость содержит микронеоднородности в виде микропузырьков свободного газа с начальными радиусом 5 мкм и объемной концентрацией 10^{-4}.

На рис. 1,*а* показаны профиль ударной волны в пузырьковой среде и распределение радиусов пузырьков за фронтом УВ (зона значительного сжатия пузырьков и зона их выхода после прохождения УВ на равновесное состояние, сопровождающееся продолжительными пульсациями). На рис. 1,*б* представлена структура волны разрежения (по сути, это волновой пакет), формирующейся в результате отражения УВ от свободной поверхности слоя. Видно, что в волне разрежения происходят интенсивный рост кавитационных пузырьков и значительное увеличение объемной концентрации газовой фазы K вблизи свободной поверхности.

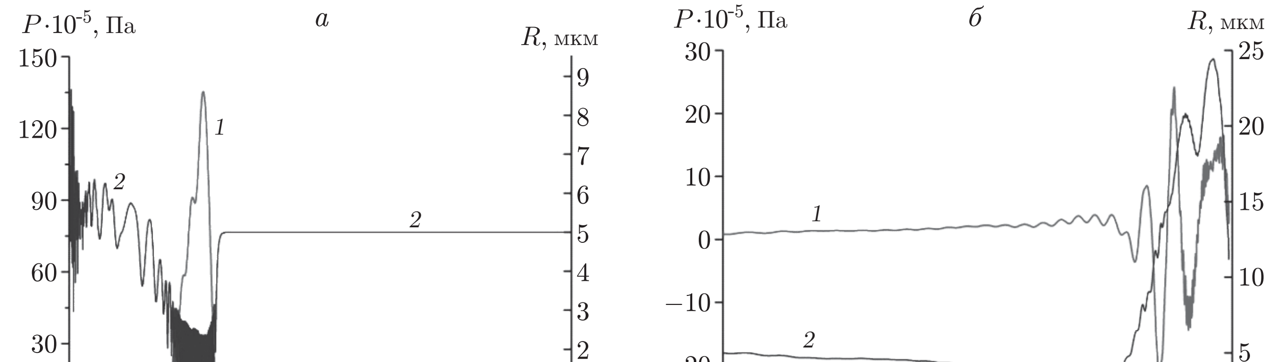

Рис. 1. Распределения давления (*1*) и радиуса пузырьков (*2*) в окрестности свободной поверхности:
а — для ударной волны ($t = 10$ мкс), *б* — для волны разрежения ($t = 37$ мкс)

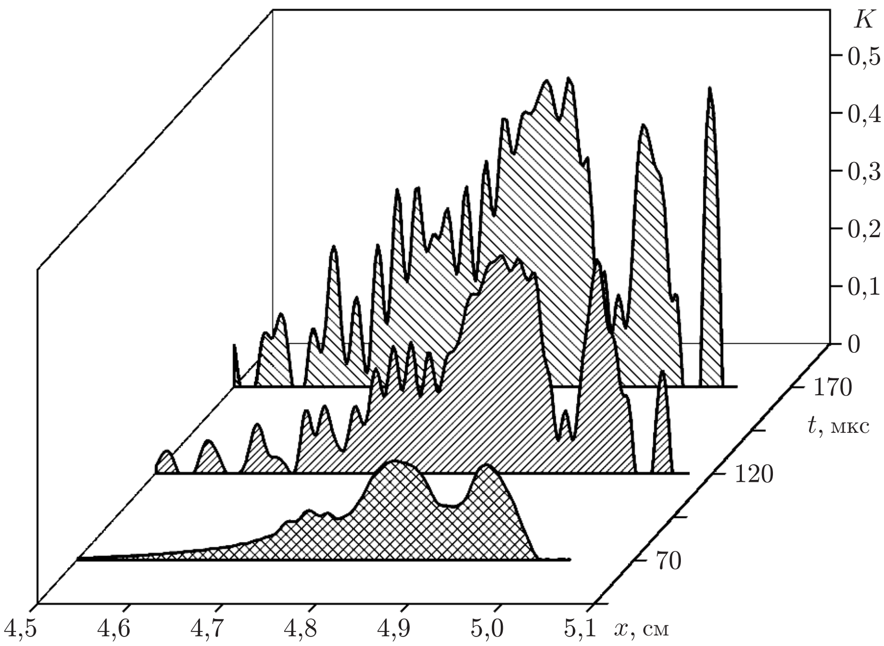

Рис. 2. Развитие кавитации вблизи свободной поверхности

Согласно данным [6] интенсивно развивающаяся кавитация оказывает существенное влияние на поле напряжений в кавитирующей зоне, которые быстро релаксируют. В экспериментах [10], выполненных в гидродинамических ударных трубах с использованием системы импульсной (*x-ray*)-аппаратуры (длительность вспышки 70 нс), установлено, что в зоне интенсивно развивающейся кавитации градиент давления стремится к нулю — наблюдается стабилизация массовой скорости (эффект "замороженной" массовой скорости). Использование этого эффекта в численном методе позволяет в рамках SPH-модели рассчитать дальнейшее развитие структуры потока вплоть до полного разрушения.

На рис. 2 показана начальная стадия изменения структуры кавитирующего слоя в моменты времени $t = 70$, 120, 170 мкс. Видно, что при $t = 120$, 170 мкс вблизи свободной поверхности формируются откольные слои, кроме того, к моменту времени $t = 170$ мкс объемная доля газовой фазы в кавитирующем слое превышает 50 %. Расчеты показывают, что к моменту времени $t = 1$ мс в окрестности свободной поверхности потока часть кавитирующего слоя трансформируется в структуру типа пены, занимающую область шириной приблизительно 1,5 см, и практически разрушается на отдельные фрагменты и частицы (рис. 3, 4): частицы жидкости разлетаются на расстояние, превышающее радиус сглаживания, что в SPH-формулировке означает потерю связи и интерпретируется как разрушение среды. Результаты расчета структуры до момента времени $t = 5{,}46$ мс подтверждают этот вывод: разрушенный слой занимает зону в интервале $x = 5{,}0 \div 9{,}8$ см, в котором у большинства частиц не остается "соседей", а некоторая группа частиц оказывается разделенной практически пустыми областями пространства.

Кавитационное разрушение капли. Экспериментально детальная картина кавитационного разрушения жидкой капли в результате ее нагружения ультракороткой УВ исследована с помощью электромагнитной гидродинамической ударной трубки [7]. Капля помещалась на диафрагму электромагнитной ударной трубки. При разрядке батареи конденсаторов на плоскую спиральную катушку, помещенную между проводящей диафрагмой и диском, возникающее в зазоре магнитное поле передает импульс диафрагме, удар которой по капле приводит к генерации в ней ударной волны.

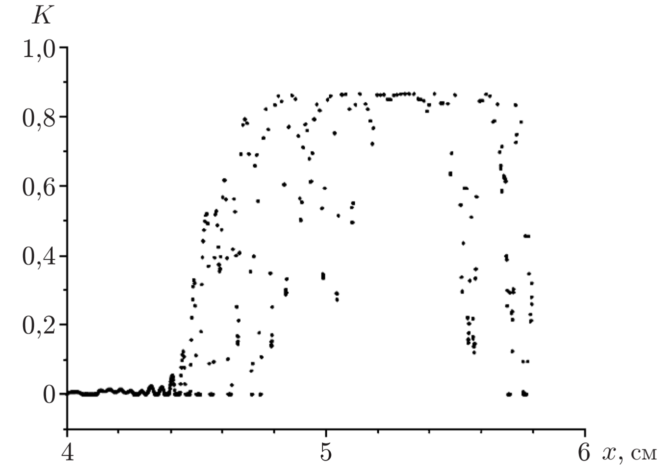

Рис. 3

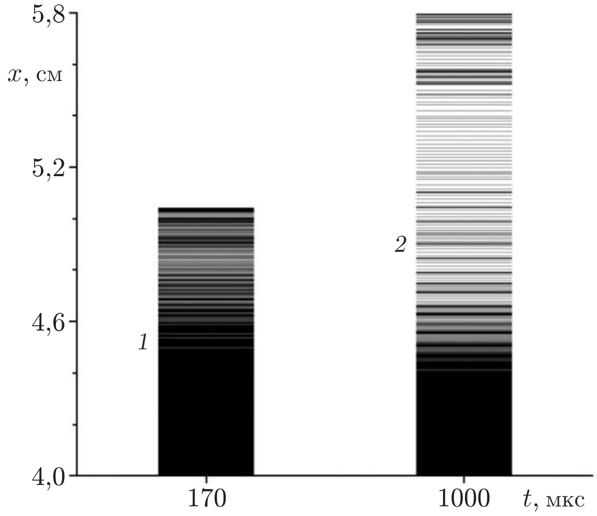

Рис. 4

Рис. 3. Распределение частиц-узлов при разрушении среды в верхней зоне ($x = 4{,}4 \div 5{,}8$ см) жидкого слоя в момент времени $t = 1$ мс

Рис. 4. Структура разрушения в верхней зоне жидкого слоя:
1 — $x = 4{,}60 \div 5{,}05$ см, $t = 0{,}17$ мс, *2* — $x = 4{,}4 \div 5{,}8$ см, $t = 1$ мс; участки черного цвета — жидкая фаза, светлые участки — зона разрушения

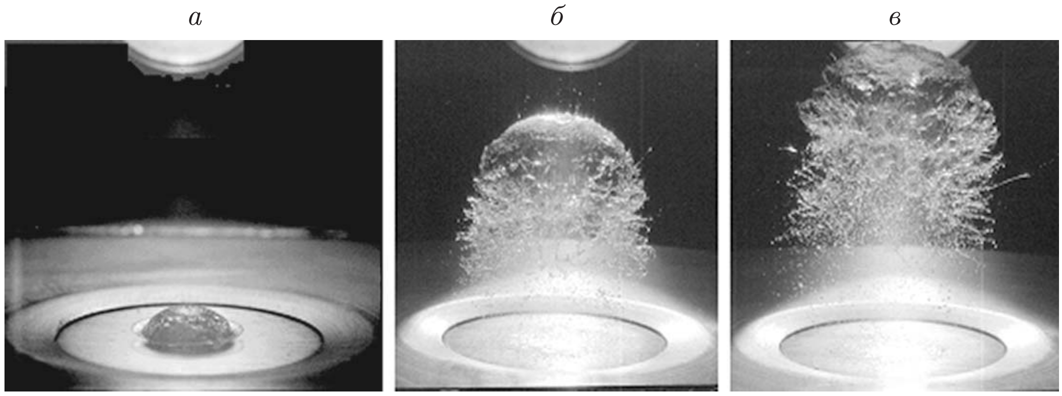

Рис. 5. Динамика структуры капли при ее нагружении ультракороткой (длительностью $3 \div 4$ мкс) ударной волной с амплитудой около 15 МПа:
а — $t = 100$ мкс, *б* — $t = 1000$ мкс, *в* — $t = 1500$ мкс

На рис. 5 представлена характерная динамика состояния разрушающейся капли (начальный диаметр приближенно равен 1,5 см) в результате ее ударно-волнового нагружения ультракороткой УВ (длительность положительной фазы $3 \div 5$ мкс) при энергии накопителя около 60 Дж (напряжение равно 7,5 кВ). Для регистрации структуры капли использовалась импульсная подсветка в широком интервале задержек (от микро- до миллисекундного диапазона), что позволяло детально исследовать динамику состояния кавитирующей капли и ее разрушение. Результаты эксперимента показывают, что в процессе разрушения капли можно выделить начальную стадию — формирование плотной кавитационной зоны (кластера) в центре капли (см. рис. 5,*а*). Формирование кластера начинается в момент появления внутри капли одиночных микрокластеров кавитационных пузырьков миллиметровых размеров, рост и объединение которых приводит к “вскипанию” капли при $t = 70 \div 100$ мкс, в результате чего ее структура приобретает ярко выраженный ячеистый характер.

При дальнейшем инерционном росте кавитационного кластера в центре капли возникает зона коалесценции пузырьков, которая разрушается, трансформируясь в быстрорасширяющуюся область, заполненную кластерами микрокапель. В дальнейшем возникает структура типа цилиндрической оболочки (в зависимости от характера нагружения), которая распадается на отдельные фрагменты и микрокапли (см. рис. 5,*б,в*).

Численное моделирование данного процесса (рассматривается полусфера на диафрагме) проведено методом SPH в осесимметричной постановке [11] в рамках комбинации ИКВ-модели и модели “замороженной” массовой скорости аналогично [12]. Заметим, что в случае осевой симметрии при интерполяции произвольной функции $f(r,z)$ осуществляется переход к цилиндрическим координатам:

$$\langle f(r,z)\rangle = \iiint F(r',z')r'W(q)\,d\varphi\,dr'\,dz' = \iint F(r',z')r'W_{3C2}(r',z',r,z,h)\,dr'\,dz'.$$

Здесь $q = \sqrt{(r-r')^2 + (z-z')^2 + 4rr'\sin^2(\varphi/2)}/h$; W_{3C2} — функция ядра, которая в случае осевой симметрии принимает вид [11]

$$W_{3C2}(r',z',r,z,h) = 4 \int\limits_0^{\arcsin(\min(1,\sqrt{(1-A)/B}\,))} W(\sqrt{A + B\sin^2 v}\,)\,dv,$$

$A = [(r-r')^2 + (z-z')^2]/h^2$; $B = 4rr'/h^2$. Данный интеграл не выражается в явном виде и вычисляется методом Симпсона.

Граничные условия на мембране и свободной границе задавались с помощью набора отдельных частиц (метод Морриса [13]). Частицы, моделирующие мембрану, в момент времени $t = 0$ начинали движение вверх с вертикальной начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с, которая в дальнейшем уменьшалась по линейному закону. При этом в капле формировалась ударная волна, имеющая треугольный профиль, с длительностью положительной фазы 3 мкс и амплитудой около 15 МПа.

Внешняя граница капли радиусом 5 мм представляла собой слой частиц, движение которых вычислялось по общим уравнениям, а давление P_0 было равно атмосферному. Число частиц в капле без учета граничных частиц составляло примерно 68 300 шт. Начальная объемная концентрация газовой фазы в капле равна $K_0 = 10^{-6}$, радиус пузырьков $R_0 = 1{,}5$ мкм. Ударная волна распространяется внутри капли, сжимает микропузырьки свободного газа и, отражаясь от свободной поверхности капли, генерирует сходящиеся к оси во́лны разрежения, что вызывает интенсивный рост микропузырьков и, следовательно, объемной доли газовой фазы.

На рис. 6 показана структура капли в начальные моменты времени $t = 3$, 5 мкс, когда волна полностью входит в каплю, отражаясь от ее полусферической свободной поверхности. В результате формируются две характерные зоны разрежения, в которых на порядок увеличивается радиус кавитационных пузырьков и на несколько порядков возрастает концентрация газовой фазы. Одна из этих зон представляет собой пузырьковый тороидально-клиновидный слой, расположенный в основании капли вблизи поверхности мембраны ($t = 3$ мкс), развитие и разрушение которого впоследствии приводит к формированию кольцевой струи, вторая зона — сферический кластер, формирующийся в центре капли на ее оси ($t = 5$ мкс).

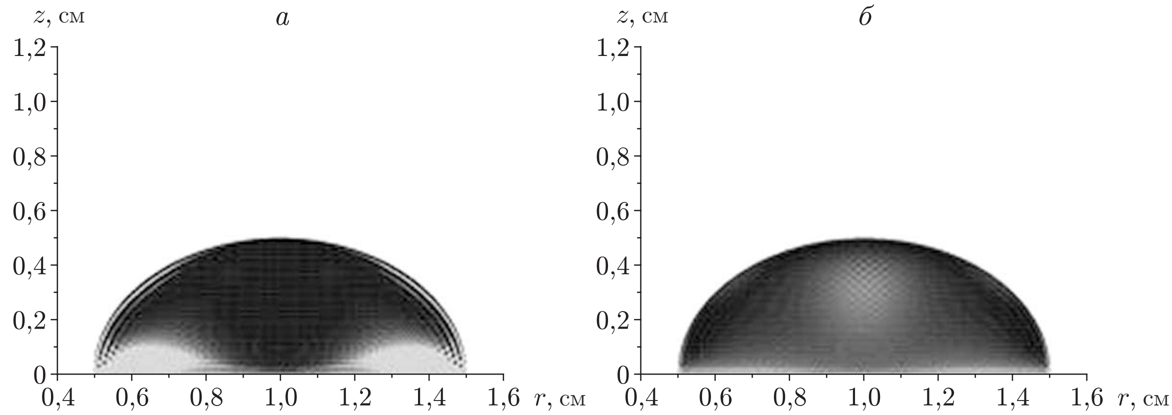

Рис. 6. Структура кавитационной зоны в различные моменты времени:
а — $t = 3$ мкс (тороидальная зона), *б* — $t = 5$ мкс (сферический кластер на оси симметрии)

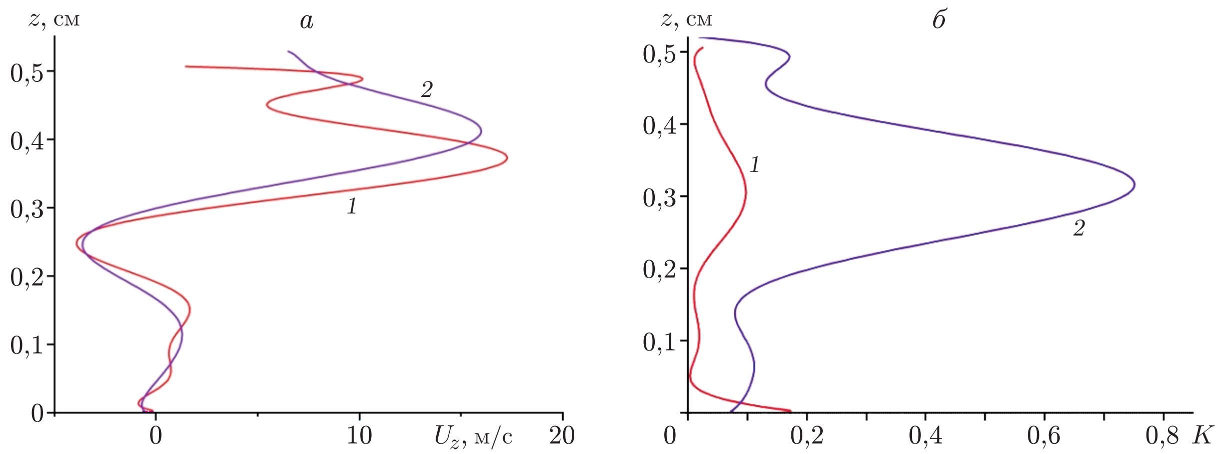

Рис. 7. Распределения массовой скорости $U_z(z)$ (*а*) и концентрации газовой фазы $K(z)$ (*б*) вдоль вертикальной оси симметрии ($r = 1$ см) капли:
1 — $t = 15$ мкс, *2* — $t = 50$ мкс

Численный анализ динамики структуры кавитирующей капли и основных параметров течения, характеризующих ее состояние на начальном этапе ($t < 100$ мкс), показал, что уже при $t = 15$ мкс объемная доля газовой фазы в значительной части исследуемой области превышает 10 %. Это позволяет перейти к модели "замороженного" поля массовой скорости, при использовании которой во всей расчетной области градиент растягивающих напряжений полагается равным нулю [6]. При этом все параметры, полученные в рамках ИКВ-модели и описывающие состояние среды к моменту перехода от этой модели к модели "замороженного" поля массовой скорости ($t = 15$ мкс), рассматриваются как начальные для модели инерционного разрушения кавитирующей среды.

На рис. 7 представлены распределения вертикальной компоненты массовой скорости U_z и объемной концентрации газовой фазы K вдоль оси симметрии капли в различные моменты времени. Моменту времени $t = 50$ мкс соответствуют профили массовой скорости U_z и концентрации K, полученные в результате интерполяции расчетных данных с помощью SPH-метода многочленом высокого порядка и достаточно хорошо отражающие характер процесса. Численный анализ показывает, что при $t = 50$ мкс в нижней и верхней

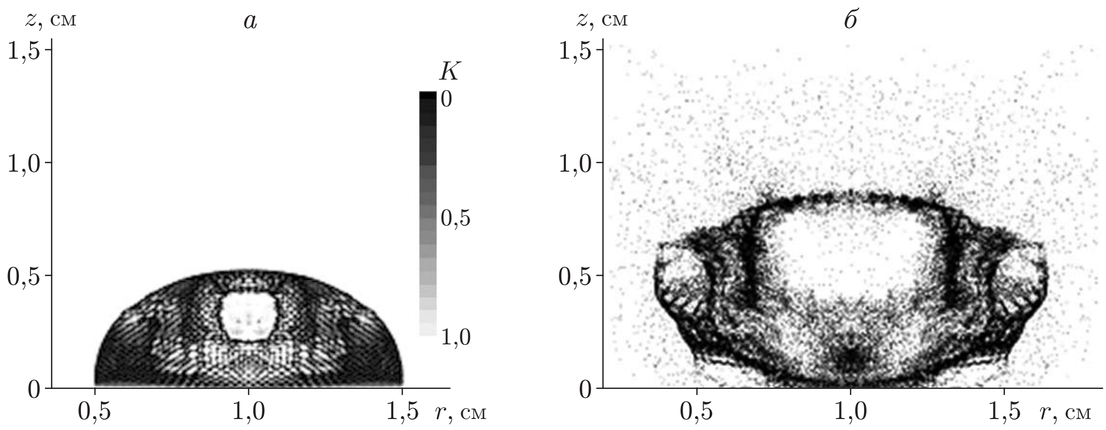

Рис. 8. Особенности динамики структуры разрушающейся капли:
а — $t = 50$ мкс (система интенсивно кавитирующих зон вокруг зоны газ — частицы);
б — $t = 500$ мкс (трансформация капли в систему зон разрушения и потеря связности)

точках разрушенной зоны на оси симметрии внутри капли имеют место существенно различные массовые скорости $U_z = -2{,}5$ м/с и $U_z = 17{,}5$ м/с. Достаточно высокую скорость приобретает верхний кавитирующий слой, что естественно, поскольку начальная массовая скорость его верхней точки должна иметь значение $U_z \approx 20$ м/с (удвоенная массовая скорость за фронтом падающей УВ).

Сравнение структур кавитирующей капли в момент времени $t = 25$ мкс, рассчитанных в рамках ИКВ-модели и модели инерционного разлета с использованием данных ИКВ-модели при $t = 15$ мкс, показало, что в целом они сходны. При этом использование модели инерционного разлета обусловливает более интенсивное развитие всех кавитационных зон.

На рис. 8 показано изменение структуры разрушающейся капли. Из рис. 8,*а* следует, что при $t = 50$ мкс интенсивный кавитационный процесс охватывает практически весь объем капли, а в ее центре появляется полость, заполненная отдельными кластерами частиц и окруженная разрушающейся средой. При этом внешние границы капли еще не претерпели существенного изменения. Согласно результатам расчета в основном разрушение происходит при $t = 200 \div 500$ мкс, что подтверждает взрывной характер инверсии двухфазного состояния — переход кавитирующей зоны в центре капли в состояние газ — частицы.

На рис. 8,*б* ($t = 500$ мкс) виден четко выраженный слой частиц, окружающих центр капли. Этот слой имеет форму, близкую к наблюдаемой в эксперименте. В дальнейшем среда распадается на несколько не связанных между собой областей, разлет которых приводит к распылению частиц (рис. 9).

Выводы. Результаты численного моделирования показывают, что с использованием метода SPH в сочетании с ИКВ-моделью и моделью “замороженного” поля массовых скоростей можно исследовать динамику состояния двухфазного течения среды с высокой концентрацией газовой фазы и описать процесс инверсии ее двухфазного состояния. Проведено сравнение результатов численного анализа процесса формирования и динамики структуры откольных зон при отражении ударной волны подводного взрыва от свободной поверхности с экспериментальными данными. Отмечена их адекватность. Численное исследование динамики состояния капли в процессе ударно-волнового нагружения показало, что фокусировка отраженной от свободной поверхности ударной волны приводит к формированию в центре капли плотного быстрорасширяющегося кавитационного кластера. Инверсия его двухфазного состояния (переход от кавитирующего состояния зоны к состо-

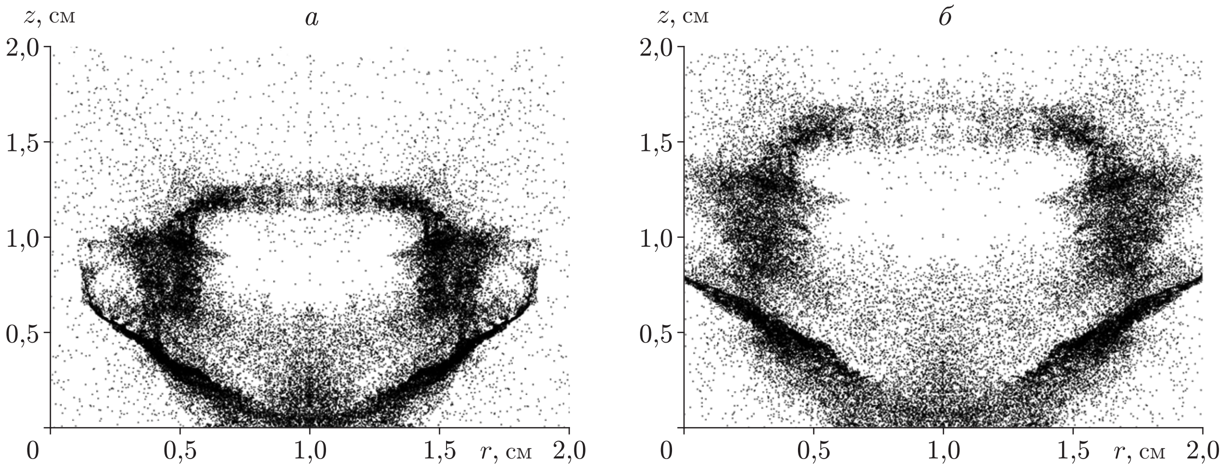

Рис. 9. Динамика структуры капли и ее разрушения при ударно-волновом нагружении:
а — стадия инерционного разлета зон разрушения ($t = 1000$ мкс); *б* — структура разрушенной капли, представляющая собой оболочку в виде кластеров невзаимодействующих частиц ($t = 1500$ мкс)

янию газ — микрокапли) может быть определена как "кавитационный взрыв" капли с последующим ее распадом на отдельные фрагменты и кластеры практически свободных частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Monaghan J. J.** Simulating free surface flows with SPH // J. Comput. Phys. 1994. V. 110, N 2. P. 399–406.
2. **Monaghan J. J.** Smoothed particle hydrodynamics // Rep. Progr. Phys. 2005. V. 68. P. 1703–1759.
3. **Афанасьев К. Е.** Численное моделирование течений жидкости со свободными границами современными численными методами // Тр. науч. шк. "Информационные и вычислительные технологии в численных расчетах и управлении вузом". Кемерово: "ИНТ", 2010. С. 245–257.
4. **Monaghan J. J., Lattanzio J. C.** A refined particle method for astrophysical problems // Astronom. Astrophys. 1985. V. 149, N 1. P. 135–143.
5. **Springel V., Yoshida N., White S.** GADGET: A code for collisionless and gasdynamical cosmological simulations // New Astronom. 2001. V. 6. P. 79–117.
6. **Давыдов М. Н., Кедринский В. К.** Двухфазные модели формирования кавитирующих отколов в жидкости // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 5. С. 72–79.
7. **Кедринский В. К., Бесов А. С., Гутник И. Э.** Инверсия двухфазного состояния жидкости при импульсном нагружении // Докл. АН. 1997. Т. 352, № 4. С. 477–479.
8. **Кедринский В. К.** Динамика зоны кавитации при подводном взрыве вблизи свободной поверхности // ПМТФ. 1975. № 5. С. 68–78.
9. **Макарчук Р. С.** Численное моделирование течений жидкости со свободными границами методом сглаженных частиц (SPH) // Тр. науч. шк. "Информационные и вычислительные технологии в численных расчетах и управлении вузом". Кемерово: "ИНТ", 2010. С. 306–316.

10. **Kedrinskiy V. K., Berngardt A. R., Chernobaev N. N.** Behaviour of a liquid under dynamic loading // Proc. of the IUTAM symp. on waves in a liquid/gas and liquid/vapour two-phase systems, Kyoto (Japan), 9–13 May 1994. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995. P. 429–438.
11. **Omang M., Borve S., Trulsen J.** SPH in spherical and cylindrical coordinates // J. Comput. Phys. 2006. V. 213, N 1. P. 391–412.
12. **Давыдов М. Н.** Развитие кавитации в капле при ударно-волновом нагружении // Динамика сплошной среды / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2001. Вып. 117. С. 17–20.
13. **Morris J. P., Fox P. J., Zhu Y.** Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH // J. Comput. Phys. 1997. V. 136, N 1. P. 214–226.

Поступила в редакцию 25/II 2013 г.