РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗРАБОТКИ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

2014 № 1

УДК 532.685:533.15

ОПИСАНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В УГОЛЬНОМ ПЛАСТЕ ПРИ НЕРАВНОВЕСНОЙ ДЕСОРБЦИИ

А. В. Федоров

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
E-mail: fedorov@itam.nsc.ru,
ул. Институтская, 4/1, 630090, г. Новосибирск, Россия

Для описания процессов фильтрации и диффузии свободного и сорбированного газа в угольном пласте используется предложенная ранее математическая модель в виде системы неоднородных параболических уравнений. Рассмотрены движения такой среды в виде бегущей волны (ударной волны), т. е. в автомодельном приближении. Доказано, что эта задача сводится к краевой задаче качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости. Дана количественная оценка влиянию времени релаксации процесса сорбции газа на структуру ударной волны.

Многофазные среды, неравновесная фильтрация

Постановка задачи и краткий обзор литературы. Математические модели для описания движения метана в угольном пласте разрабатывались в работах Р. М. Кричевского, С. А. Христиановича, А. А. Никольского, С. В. Кузнецова и их последователей в рамках теории равновесной фильтрации газа в пористых средах начиная с 50-х годов прошлого столетия [1 – 8]. В этих фундаментальных работах для описания явлений дегазации и внезапного выброса угля и газа привлечены методы механики сплошных сред, принимающие во внимание физические превращения метана (сорбцию), изотермичность / неизотермичность процессов течения газоугольной массы. Определены новые понятия: например, волна дробления, волна разрушения. Это позволило высказать некоторые гипотезы о природе внезапных выбросов и объяснить в определенной мере механизмы их протекания.

В последующем на основе методов механики гетерогенных сред с учетом фазовых переходов были разработаны математические модели стационарной двумерной нелинейной фильтрации сжимаемого газа в угольных пластах для описания полей давления газа при его фильтрации к дегазирующим скважинам [9 – 11]. Отметим, что здесь использована аналогия С. А. Христиановича между нелинейной фильтрацией газа в пористой среде и течением газа. Далее рассмотрены вопросы распространения нелинейных волн в газонасыщенной пористой среде, трактуемые как волны дробления Христиановича, возникающие “вблизи быстро движущейся свободной поверхности угля”. В [8] показана принципиальная возможность распространения по массивам угля автоволн давления свободного газа, обусловленных фильтрацией и диффузией сорбированного газа. Указывалось, что при выходе такой волны на свободную поверхность угольного пласта возможно возникновение волны разрушения. При этом волна разрушения Христиановича, т. е. волна разрежения, реализующаяся вблизи этой свободной поверхности при удовлетворении некоторому прочностному критерию, может оторвать небольшую часть угольного массива, примыкающую к свободной поверхности.

Эти исследования продолжены в настоящее время в рамках интеграционных проектов СО РАН, выполняемых под руководством чл.-кор. РАН Г. И. Грицко. Так, в [12] развита математическая модель [8] для описания фильтрации и диффузии свободного и сорбированного газа в угольном пласте. Рассмотрены ее приближенные варианты: равновесное движение газа в порах при различных видах изотермы сорбции как без учета фильтрации и диффузии, так и с их учетом. Аналитически и численно показано, что в зависимости от выполнения условий выпуклости на изотерму сорбции (условий устойчивости) может реализоваться движение газа в пласте в виде как ударной волны, так и волны разрежения. Представляет интерес изучить эту проблему для математической модели массопереноса, учитывающей неравновесность процесса десорбции. В данной работе исследуется вопрос влияния явления неравновесности десорбции метана в угольном пласте на структуру ударной волны.

Математическая модель. Система уравнений для описания неравновесной фильтрации и диффузии метана в угольном пласте имеет вид [8, 12]

$$\frac{\partial m\rho}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\rho\frac{\partial p}{\partial x}\right)=\frac{1}{\tau}[\eta-\varphi(p)],\quad \frac{\partial\eta}{\partial t}+u\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)=\frac{1}{\tau}[\eta-\varphi(p)]. \tag{1}$$

Здесь ρ — плотность свободного газа; m — пористость угля; λ — коэффициент фильтрации газа; p — давление в свободном газе; τ — время релаксации процесса десорбции; η — средняя плотность сорбированного газа; $\varphi(p)$ — изотерма сорбции; u — скорость переноса сорбированного газа; D — коэффициент диффузии. Система дополняется изотермическим уравнением состояния $p=c^2\rho$, где c — скорость звука, и является замкнутой для определения плотности и давления свободного газа и средней плотности сорбированного газа.

Равновесное течение. Для случая равновесного течения при стремлении времени релаксации десорбции к нулю, т. е. $\tau=0$, правая часть системы (1) обращается в нуль, так как в этом асимптотическом приближении средняя плотность сорбированной фазы $\eta=\varphi(p)$. Данное выражение представляет собой изотерму равновесной сорбции. Тогда, суммируя уравнения системы (1), получим нелинейное уравнение переноса массы для определения параметров движения газа в двух состояниях в пористом пласте. После замены переменной в этом уравнении $\xi=x-Ut$, где U — скорость распространения волны, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение. Интегрируя его с использованием условий на бесконечности $\xi\to\pm\infty$, $\rho\to\rho_{1,2}$, находим скорость распространения волны

$$U=\frac{\eta_2-\eta_1}{m(\rho_2-\rho_1)+(\eta_2-\eta_1)}u\,.$$

Полагая $\eta=\varphi(p)=\alpha p^2=\alpha c^4\rho^2$ (изотерма Фрейдлиха), получаем уравнение для нахождения плотности газа в свободном состоянии, решение которого имеет вид

$$A\ln|\rho-\rho_1|+B\ln|\rho-\rho_2|=\xi\,,$$

где

$$A=\frac{\rho_1}{a_1(\rho_1-\rho_2)},\quad B=\frac{\rho_2}{a_1(\rho_1-\rho_2)},\quad a_1=\frac{u\alpha c^2}{\lambda+2D\alpha c^2}\frac{m}{m+\alpha c^4(\rho_1+\rho_2)}\,.$$

Подобные решения получены также в [2, 3] и понадобятся в дальнейшем.

Упрощенная модель неравновесной фильтрации. Рассмотрим неравновесное течение метана в угольном пласте ($\tau \neq 0, \infty$) и пренебрежем коэффициентом диффузии. Введем безразмерные величины

$$\bar{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \bar{\tau} = \frac{\tau}{t_0}, \quad \bar{x} = \frac{x}{x_0}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{\rho_0}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{\rho_0}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_0}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad t_0 = \frac{x_0}{c}, \quad x_0 = \frac{\lambda_0 p_0}{c}.$$

Тогда основную систему уравнений (1) можно представить в следующем виде (черточки над безразмерными величинами далее опущены):

$$\frac{\partial(mp+\eta)}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda p \frac{\partial p}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\tau}(\eta - \varphi). \tag{1'}$$

Переходя к автомодельной переменной ξ и проделывая процедуру, аналогичную случаю равновесного течения, преобразуем эту систему уравнений к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\lambda p \frac{dp}{d\xi} = -b(p - p_1) + a(\eta - \eta_1), \quad a\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{1}{\tau}(\eta - \varphi), \tag{2}$$

где

$$a = \frac{m(p_2 - p_1)u}{m(p_2 - p_1) + (\eta_2 - \eta_1)}, \quad b = \frac{m(\eta_2 - \eta_1)u}{m(p_2 - p_1) + (\eta_2 - \eta_1)}.$$

Нетрудно показать, что при $\tau \to 0$ из последней системы уравнений (2) можно получить уравнение в равновесном приближении.

Приведем значения параметров, при которых проводились расчеты: давление $p_1 = 10$ атм, $p_2 = 1$ атм, пористость $m = 0.05$, проницаемость $\lambda = 5 \cdot 10^{-10}$ м^3·с/кг, и параметров обезразмеривания: скорость звука $c = 450$ м/с, давление $p_0 = 1$ атм, плотность $\rho_0 = p_0/c^2 = 0.5$ кг/м^3, проницаемость $\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-10}$ м^3·с/кг, параметр длины $x_0 = \lambda_0 p_0 / c = 1.126 \cdot 10^{-7}$ м.

Используя методы качественной теории дифференциальных уравнений, определим типы особых точек системы (2) при $\xi \to \pm\infty$, для чего выпишем характеристическое уравнение для определения собственных чисел матрицы Якоби:

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{ab\tau}{\lambda p} - \mu & \dfrac{a^2\tau}{\lambda p} \\ \varphi'(p) & -1-\mu \end{vmatrix} = \mu^2 + \left(\frac{ab\tau}{\lambda p} + 1\right)\mu + \frac{ab\tau}{\lambda p} - \frac{a^2\tau}{\lambda p}\varphi'(p) = 0.$$

Расчеты при различных значениях τ показывают, что при $\xi \to -\infty$, $p \to p_2$ корни характеристического уравнения имеют одинаковые знаки, т. е. имеем устойчивый узел; при $\xi \to \infty$, $p \to p_1$ знаки корней различны, т. е. имеем седло. Такое расположение особых точек соответствует решению задачи о структуре ударной волны в бесконечном угольном пласте. Тем самым доказано

Утверждение: Решение краевой задачи для системы уравнений (2) при

$$p \to p_{1,2}, \quad x \to \pm\infty, \quad p_1 > p_2$$

существует в виде бегущей волны.

О численном решении краевой задачи. Ее решение на бесконечном интервале изменения x затрудняет интегрирование задачи. Для преодоления этого применена следующая процедура. Так, для получения краевых условий на одном из концов области интегрирования системы уравнений (2) использовалось асимптотическое решение, полученное по известной процедуре путем введения параметра ε, характеризующего близость искомого решения к асимптотическому. Возникающая задача Коши затем решалась численным методом, реализующим формулы обратного дифференцирования, с переменными шагом и порядком, предназначенным для решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Вхождение во вторую особую точку обеспечивалось тем, что она была устойчивой. Полученные таким образом данные приведены в виде зависимостей давления свободного газа $p = p(\xi)$ от автомодельной переменной для различных значений времен релаксации процесса десорбции τ (рис. 1).

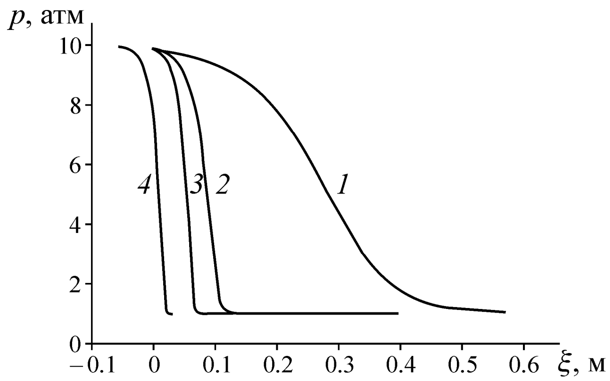

Рис. 1. Распределение давления от автомодельной переменной: *1* — $\tau = 1$ с; *2* — 0.1; *3* — 0.01; *4* — 0 с

Эти кривые являются иллюстрацией известного положения о том, что неравновесные процессы, описываемые дифференциальными уравнениями первого порядка с малым параметром при производной, выполняют роль диссипативного процесса. То есть не только процесс фильтрации свободного газа в угольном пласте, одним из первых предложенный С. А. Христиановичем для описания автоволновых явлений в нем, является ответственным за структуру этого мощного энергетического образования, но и неравновесная десорбция. Отметим, что наличие десорбции в массиве вводит дополнительные типы нелинейности помимо возможной нелинейности в зависимости коэффициента фильтрации от горного давления, а затем и давления газа.

Из рис. 1 видно, что профиль волны при уменьшении времени релаксации τ стремится к профилю, соответствующему равновесному течению (кривая *4*). С уменьшением времени релаксации уменьшается и ширина волны по Прандтлю, определяемая как

$$L_{\mathrm{Pr}} = \frac{|p_2 - p_1|}{\max|dp/d\xi|}.$$

Так, при $\tau = 1$ с имеем $L_{\mathrm{Pr}} = 0.2328$ м, при $\tau = 0.1$ с — $L_{\mathrm{Pr}} = 0.0424$ м, при $\tau = 0.01$ с — $L_{\mathrm{Pr}} = 0.0242$ м, при $\tau = 0$ с — $L_{\mathrm{Pr}} = 0.0081$ м, причем в последнем случае ширина волны обеспечивается диссипативным процессом фильтрации газа. Это позволяет утверждать, что минимальная ширина ударной волны определяется процессом фильтрации и является оценкой снизу. Последнее оправданно с физической точки зрения. Действительно, при больших временах релаксации переход из связанного состояния в свободное является затянутым, т. е. все определяется фильтрацией меньших количеств свободного газа.

На рис. 2 профили волны давления, приведенные для различных времен релаксации, показывают, что профиль штриховой линии *3* (соответствует времени релаксации 0.01 с) расположен практически на профиле давления, полученном при времени релаксации, равном нулю. Это является “сигналом”, что уже при таком времени релаксации течение почти равновесно. С ростом времени релаксации ширина структуры растет (кривые *1* и *2*). Причем за центром ударной волны, определяемым как точка с максимумом производной от давления, давление газа нарастает более плавно (расчеты проведены А. А. Шульгиным).

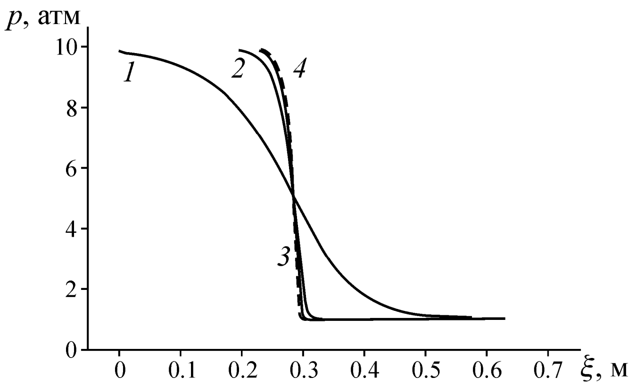

Рис. 2. Распределение давления от автомодельной переменной, приведенное к центру ударной волны: *1* — $\tau = 1$ с; *2* — 0.1; *3* — 0.01; *4* — 0 с

ВЫВОДЫ

В рамках математической модели неравновесной фильтрации газа в угольном пласте с учетом процесса десорбции построено решение в виде бегущей (ударной) волны, позволяющее аналитически определить ее структуру. После выхода ударной волны на свободную поверхность угольного массива она переходит в волну дробления Христиановича. Время релаксации процесса десорбции имеет существенное влияние на ширину ударной волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кричевский Р. М.** О природе внезапных выделений газа с выбросом угля // Бюл. МакНИИ. — 1948. — № 18.
2. **Христианович С. А.** Распределение давления газа вблизи движущейся свободной поверхности угля // Изв. АН СССР. ОТН. — 1953. — № 12.
3. **Христианович С. А.** О волне выброса // Изв. АН СССР. ОТН. — 1953. — № 12.
4. **Никольский А. А.** О волнах внезапного выброса газированных пород // ДАН СССР. — 1953. — Т. LXXXVIII. — № 4.
5. **Никольский А. А.** Волны разрушения газированных углей // ДАН СССР. — 1954. — Т. XCVI. — № 1.
6. **Кузнецов С. В., Кригман Р. Н.** Природная проницаемость угольных пластов и методы ее определения. — М.: Наука, 1978.
7. **Ворожцов Е. В., Федоров А. В., Фомин В. М.** Движение смеси газа и частиц угля в шахтах с учетом десорбции // Аэромеханика: сб. статей. — М.: Наука, 1976.
8. **Федоров А. В.** О существовании ударных волн сжатия при фильтрации газа в угольных пластах // Управление вентиляцией и газодинамическими явлениями: сб. науч. трудов. — Новосибирск: ИГД СО АН СССР, 1977.
9. **Федоров А. В.** К теории неизотермической, неравновесной десорбции газа в угольных пластах // ФТПРПИ. — 1977. — № 3.
10. **Федоров А. В.** Анализ уравнений, описывающих процесс внезапного выброса угля и газа // ЧММСС. — 1980. — Т. 11. — № 4.
11. **Федоров А. В., Фомин В. М., Охунов М. Х.** Определение толщины волны дробления Христиановича с учетом неравновесной неизотермической десорбции // ФТПРПИ. — 1981. — № 1.
12. **Федоров А. В., Федорченко И. А.** Математическое моделирование распространения метана в угольных пластах // ФТПРПИ. — 2009. — № 3.

Поступила в редакцию 22/IX 2013